EL CAMPO GRAVITACIONAL EXPLICADO POR LA ECUACION DE ONDA

DARIO ROZO M.

Presidente de la Academia Colombiana de Geografía, Miembro de Número de la Academia Colombiana de Ciencias.

La *ecuación de onda* o ecuación de ondas, llamada también ecuación de propagación, sirve con notable ventaja para la solución de los problemas que han sido resueltos por el cálculo tensorial absoluto, ciencia esta que requiere larga preparación y obliga a procedimientos intrincados y extensos, como se ha hecho en el caso del campo gravitacional.

Este problema fue resuelto por Einstein habiendo producido la admiración de todos los científicos; fue simplificado por Schwarzschild en la aplicación a un caso particular, lo que causó aplauso general; al Profesor Weyl ha comentado acertadamente la solución general pero no la ha simplificado (1). Todos estos autores emplean el cálculo tensorial con dilatados y complicados desarrollos, como lo expresa el matemático Lucien Fabre en su libro *Les Théories d'Einstein* (2). Weyl habla de las *ondas de gravitación*.

Por un método más sencillo se resolvió el problema de Schwarzschild como puede verse en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias,* Vol. IX, Nos. 36 y 37, año de 1956.

La solución de que se ha hablado al principio es tan abstracta y comprensiva que no permite a la imaginación entrever un proceso gráfico explicativo, ventaja que sí tiene la que se da a continuación.

Para dar comienzo conviene aclarar algunas ideas fundamentales referentes al *potencial,* que incluyen naturalmente el potencial newtoniano.

EL POTENCIAL tiene las dimensiones de una velocidad al cuadrado. En efecto, adoptando la grafía de Shwolson para significar las dimensiones mecánicas de una expresión, se escribirá ésta dentro de un paréntesis cuadrado y a continuación después del signo = las dimensiones mecánicas representadas por las letras mayúsculas usuales con sus respectivos exponentes, se tiene, llamando con p el potencial y siendo G la constante de gravitación cuyas dimensiones son $M^{-1}L^3T^{-2}$.

$$p = -\frac{Gm}{r} \text{ de donde } [p] = M^{-1}L^3T^{-2}L^{-1}M = L^2T^{-2} \qquad (0)$$

Estos potenciales expresados por velocidades al cuadrado deben considerarse como entidades mecánicas, y cuando explícitamente no son coeficientes de masas han recibido el nombre de *protopotenciales* o *protoenergías,* según el caso en que se encuentren.

Se denota con c^2 el máximo potencial que puede existir en la naturaleza en cuanto a su idiosincrasia constitutiva. (Ver Revista citada).

LA UNIDAD MATEMATICA DE MASA o unidad natural de masa será $1 = \frac{c^2}{c^2}$. Una masa cualquiera que se designe con m dará lugar a establecer esta igualdad

$$m = m\ \frac{c^2}{c^2}$$

la cual podrá escribirse introduciendo la cantidad n, así:

$$m = \frac{c^2}{n} \text{ o sea } nm = c^2 \qquad (1)$$

lo que da $[nm] = L^2T^{-2}$ y por consiguiente $[n] = M^{-1}L^2T^{-2}$.

Hechas las anteriores digresiones se puede pasar ya a la aplicación de la ecuación ondulatoria para explicar matemáticamente lo concerniente a la gravitación.

Para una velocidad c de propagación, la ecuación ondulatoria es

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = c^2\, \frac{\delta^2 s}{\delta r^2} \qquad (2)$$

en la cual podría intervenir la fórmula (1). Una de las soluciones de esta ecuación es $s = e^{kx} + {}^{qct}$ (3) como se demuestra en el texto de Coulson (3); en esta ecuación se tiene:

x = distancia recorrida; t = tiempo; c = velocidad de propagación; k, q = cantidades por determinar.

Si se deriva convenientemente la igualdad (3) en que la función de onda se considera en una sola dirección representada por x, dirección que se puede generalizar designándola con r, y luego eliminando entre las dos ecuaciones que resultan, la función s, se encuentra:

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{q^2}{k^2}\, c^2\, \frac{\delta^2 s}{\delta r^2} \qquad (4)$$

que es igual a la (2) cuando se tenga $q^2 = k^2$.

Para hallar la significación de q y k cuando se le atribuyan a las ecuaciones las condiciones que exige el potencial newtoniano, es cómodo ayudarse de otra forma de integración que es la siguiente:

$$s = \alpha\,(r + ct) + \beta\,(r - ct) \qquad (5)$$

en la que α y β son funciones arbitrarias; estas para el caso de potenciales no deben admitir valores periódicos; deben pues expresarse como el resultado de la medición de una distancia de progresión uniforme mediante una longitud tomada por unidad; (en los senos y cosenos la distancia no es de progresión uniforme); en consecuencia se puede escribir la (5) así:

$$s = (\alpha + \beta)\, r + (\alpha - \beta)\, ct \qquad (5\,\text{bis})$$

r es una distancia, una longitud especial; ct también es espacio longitudinal por ser el producto de velocidad por tiempo.

Si $\alpha = \beta$, resulta $s = 2\alpha r$, igualdad que da a entender que la función de onda es independiente del tiempo en este caso particular.

Para $\alpha \neq \beta$, hay que considerar que ct es una distancia función del tiempo; sea $ct = d$ y se tendrá

$$s = (\alpha + \beta) r + (\alpha - \beta) d \qquad (6)$$

Para simplificar la escritura hágase $(\alpha + \beta) = a$; $(\alpha - \beta) = u$; por tanto $s = ar + ud$ (7)

y obténgase de esta igualdad la ecuación ondulatoria que abarque las tres dimensiones espaciales. Nótese entonces que se debe tener lo siguiente

$r = f\,(x, y, z)$ e independiente de t;

$d = \phi\,(t)$ e independiente de x, y, z.

Se debe tener pues $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y en consecuencia se deduce: $\dfrac{\delta s}{\delta x} = a\,\dfrac{x}{r}$; $\dfrac{\delta^2 s}{\delta x^2} = a\,\dfrac{r^2 - x^2}{r^3}$

y análogamente: $\dfrac{\delta^2 s}{\delta y^2} = a\,\dfrac{r^2 - y^2}{r^3}$; $\dfrac{\delta^2 s}{\delta z^2} = a\,\dfrac{r^2 - z^2}{r^3}$

ahora sumando estas tres últimas igualdades se obtendrá

$$\frac{\delta^2 s}{\delta r^2} = a\,\frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r} = a\,2\,\frac{r^2}{r^3} = \frac{2a}{r} \qquad (8)$$

Para hallar $\dfrac{\delta^2 s}{\delta t^2}$, hay que derivar con relación a d, siendo d función del tiempo t. Así pues

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s}{\delta d}\,\frac{\delta d}{\delta t} \quad \therefore$$

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 s}{\delta d^2}\left[\frac{\delta s}{\delta t}\right]^2 + \frac{\delta d}{\delta t}\,\frac{\delta t^2}{\delta^2 d};$$

pero $\dfrac{\delta d}{\delta t} = c$ y como c es constante, $\dfrac{\delta^2 d}{\delta t^2} =$ CERO, y la igualdad anterior queda así: $\dfrac{\delta^2 s}{\delta t^2} = c^2\,\dfrac{\delta^2 s}{\delta d^2}$ (9)

Esta ecuación es la del movimiento ondulatorio según una dirección progresiva d; para estudiarlo según las direcciones posibles, habrá que considerar a d con sus tres coordenadas variables $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; entonces la expresión $\dfrac{\delta^2 s}{\delta d^2}$ se establece de modo análogo al empleado en la deducción de la expresión (8), y será

$$\frac{\delta^2 s}{\delta d^2} = \frac{2u}{d}$$

que sustituído en la (9) da $\dfrac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \dfrac{2u}{d}\,c^2$ (10)

Combinando la (10) con la (8) tomada en esta forma: $1 = \dfrac{r}{2a}\,\dfrac{\delta^2 s}{\delta r^2}$ (8 bis) o sea multiplicando miembro a miembro, se halla

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{2ur}{2ad}\,c^2\,\frac{\delta^2 s}{\delta r^2} = \frac{2ad}{2ur}\,c^2 \Delta^2 s \qquad (11)$$

Ahora es necesario establecer las condiciones a que deben obedecer las cantidades aun indeterminadas que hay en las dos fórmulas (4) y (11) para hacerlas concomitantes; estas condiciones deben ser

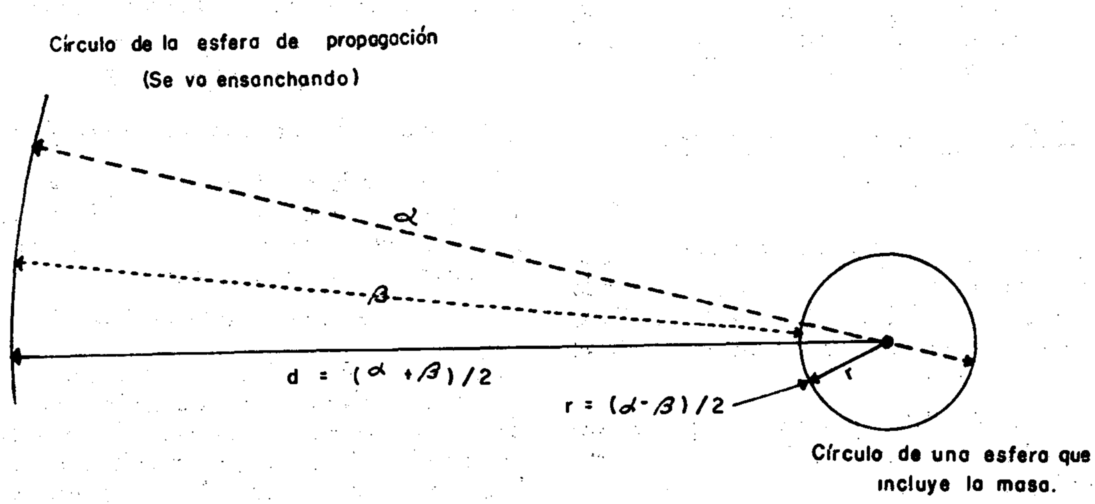
$$q^2 = 2ur \qquad (12)$$

$$k^2 = 2ad \qquad (13)$$

Para escribir la ecuación (7) se hizo $u = \alpha - \beta$; cuando $d = \beta$ se tiene $u =$ CERO y por consiguiente q debe ser igual a CERO según la (12), en consecuencia $q = u$, lo que da $2ur = u^2 \therefore 2r = u = \alpha - \beta$ por tanto

$$r = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Análogamente el valor $a = k$ satisface la ecuación (13), por consiguiente $a^2 = 2ad$, de donde $a = 2d$, por consiguiente $d = a/2$ o sea $d = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



DISCUSION DE LA FORMULA

Hay lugar a considerar dos esferas concéntricas alrededor de la masa m: la exterior de radio d en donde se manifiesta el potencial del campo producido por la masa, y la inferior de radio r en cuyo interior está contenida la mencionada masa m. Este radio es arbitrario puesto que lo es la longitud β con relación a α; la única condición es que ambas distancias pasen por el centro de la masa y que el otro extremo, tanto el de α como el de β estén sobre la esfera exterior. En realidad las dimensiones α, β, r, sólo sirven para estudiar el comportamiento del campo de gravedad conforme a la ecuación de Laplace. Sinembargo, el valor de r tiene un mínimo que es el que corresponde a la periferia del átomo, como se verá adelante.

No se puede interpretar el valor de q^2/k^2 como un coeficiente que haga cambiar el valor de c^2 sino únicamente cuando el valor de r corresponda exactamente a la superficie del átomo atrayente, que es el único caso en que el valor de β no es arbitrario. Al efecto es necesario conocer las siguientes circunstancias:

1ª *La masa atractiva está dentro de la esfera interior* r. Se hizo notar que una masa se puede expresar matemáticamente por $nm = c^2$; para sustituir este valor en la ecuación original (4) y llegar a la (2) es necesario tener $q^2 = k^2$, porque entonces resulta

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = nm \frac{\delta^2 s}{\delta r^2}\cdot$$

Pero la igualdad $q^2 = k^2$ da lugar a los valores $\pm q = \pm k$ y se sabe que $q = \alpha - \beta$ y $k = \alpha + \beta$. Las combinaciones de estos cuatro signos suministran solamente un valor aceptable, $\beta = 0$, que resulta de $\alpha - \beta = \alpha + \beta$; entonces $\alpha = 2r$, lo que indica que la masa está dentro de la esfera r. Para $-\alpha + \beta = \alpha + \beta$ se debe tener $\alpha = 0$; pero este valor indica que no hay masa y la ecuación resulta sin sentido y además $d = 0$ implica $\beta = 0$. Los dos casos restantes de combinación de signos dan valores inaceptables.

2ª *El menor valor de* r *es el del radio del átomo y dentro de él el campo de gravitación es nulo.* Esto quiere decir que el campo gravitacional producido por un átomo o corpúsculo es solamente exterior a él, como pasa a demostrarse.

Efectivamente, en el establecimiento de la ecuación ondulatoria, se tienen dos casos:

a) $\dfrac{\delta s}{\delta t} = -c\,\dfrac{\delta s}{\delta r} + const.,$ para cuando la propagación del fenómeno es hacia fuera. (*Excenter*).

b) $\dfrac{\delta s}{\delta t} = +c\,\dfrac{\delta s}{\delta r} + const.,$ para cuando la propagación del fenómeno es hacia el centro. (*Vercenter*).

Para aplicar estos criterios se deducirán de la ecuación (5 bis) los siguientes valores:

$$\frac{\delta s}{\delta t} = (\alpha - \beta)c, \quad \frac{\delta s}{\delta r} = \alpha + \beta$$

Para cuando $\beta =$ CERO, estas dos igualdades dan

$$\frac{\delta s}{\delta t} = +c\,\frac{\delta s}{\delta r}$$

que indica propagación hacia el centro.

Si $\beta \neq 0$, se tiene $\beta = \dfrac{\delta s}{\delta r} - \alpha$ y sustituyendo se encuentra

$$\frac{\delta s}{\delta r} = -c\,\frac{ds}{dr} + 2\alpha c$$

igualdad esta que está de acuerdo con la a) y por tanto la propagación se dirige hacia fuera, al exterior; el término $2\alpha c$ debe ser constante, y el valor constante de α es el que corresponde al diámetro del átomo o del corpúsculo; por consiguiente dentro del corpúsculo no hay campo de gravitación.

Una consecuencia importantísima de lo que acaba de demostrarse es que *entre dos o más corpúsculos que son tangentes unos con otros no hay fuerza de atracción mutua ninguna.* Sobre una hipótesis de esta naturaleza se ha fundado la teoría de los gases. Por otra parte, esta propiedad explica la cualidad de los líquidos y la electricidad estática.

En cuanto dos moléculas tangentes se separan una cantidad pequeñísima, se establecen fuerzas de atracción mutua; esto explica en cierto modo la dilatación que experimenta el agua cuando se solidifica.

Hay fenómenos físicos que ensanchan alrededor del átomo esta cualidad de inacción; el espacio que tiene esta propiedad y que rodea al corpúsculo se ha llamado *esfera de protección* (5) y las teorías térmicas de los gases se fundan en la consideración de tal espacio. Más adelante se intentará una explicación matemática de la esfera de protección producida por el calor.

PROBLEMAS CONCOMITANTES

POTENCIAL. El potencial correspondiente al campo de gravitación se deduce de las ecuaciones establecidas; efectivamente, sustituyendo en la (10) el valor de c^2 dado por la (1) se obtiene

$$\frac{\delta^2 s}{d} = \frac{2u}{\delta t^2}\,nm$$

en donde m es masa y las dimesiones de n son $M^{-1}L^2T^{-2}$. Como la dimensión de u es longitud, resulta $[2un] = M^{-1}L^3T^{-2}$, que son precisamente las dimensiones del *coeficiente de gravitación,* el cual suele designarse con G y se tendrá

$$\frac{\delta^2 s}{d} = G\,\frac{m}{\delta t^2} \qquad (15)$$

ecuación ésta cuyo segundo miembro da el potencial de gravitación a la distancia d de la masa que produce el campo.

ATRACCION Y REPULSION. En la teoría de las ecuaciones del movimiento ondulatorio se demuestra que si s es solución de una ecuación de onda, rs y $\dfrac{s}{r}$ serán también soluciones de la misma. Aquí r es el radio de acción el cual para el caso presente es $r = d$. Pero con el fin de acomodar las fórmulas que van a deducirse, a la nomenclatura usual, se cambiará ahora la letra d por la r que es la acostumbrada y entonces habrá que escribir $\frac{\delta t^2}{\delta^2 s} = G\frac{m}{r}$ (15)

Sea $\phi = s/r$, de lo que resulta $\frac{\delta^2\phi}{\delta t^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\delta^2 s}{\delta t^2}$ y por consiguiente $\frac{\delta^2\phi}{\delta t^2} = G\frac{m}{r^2}$ (16)

Las dimensiones de la (16) son las de la aceleración, LT^{-2}. Multiplicando cada uno de sus miembros por una masa M, se encuentra esta otra expresión

$$M\,\frac{\delta^2\phi}{\delta t^2} = G\,\frac{Mm}{r^2} \qquad (17)$$

que corresponde a las definiciones de las fuerzas en la mecánica de Newton y que comprende las leyes de la atracción.

En electromagnetismo se toma $G = 1$ y se tiene para expresión de la fuerza eléctrica $f = \frac{mm}{r^2}$

Los potenciales eléctricos se expresan por $P = \frac{m}{r}$; la masa m puede ser positiva o negativa y se tendrá $P_{+} = \frac{+m}{r}$, $P_{-} = \frac{-m}{r}$. Cuando estos potenciales son mutuos, las fuerzas que actúan entre masas eléctricas tienen las conocidas fórmulas de Coulomb.

PRINCIPIO DE LA EQUIVALENCIA. La ecuación (16) cuyas dimensiones mecánicas son las de la aceleración, comprueba el *principio de la equivalencia* de Einstein que establece que "la intensidad del campo gravitacional equivale a una aceleración".

ESFERA DE PROTECCION. En la teoría de los gases hay que introducir la hipótesis de *la esfera de protección,* entendiendo por tal una esfera que rodea al átomo o a la molécula, de radio mayor que el de dicho átomo o molécula y dentro de la cual no hay atracción entre las moléculas, esto es que dentro de tal esfera no hay campo de gravitación producido por tales moléculas.

Se intenta a continuación demostrar matemáticamente la existencia de esa esfera. La demostración estriba en que la energía calorífica que absorbe el átomo en su rededor compensa o anula la energía gravitacional que produce el mismo corpúsculo a inmediaciones de su contorno en un espacio cuyo radio es fácil de determinar.

Con tal fin puede emplearse la *divergencia* de densidad de energía; la del átomo que produce gravitación se designará *Div. A;* y la del mismo átomo al almacenar energía calorífica se llamará *Div. B.* Estas *Div.* como son contrarias, al sumarse deben anularse entre sí y ocupar cierto espacio, por tanto se tendrá:

$$Div.\ A + Div.\ B = Cero$$

Se sabe que la *Div.* de una actividad s que incluye una constante k está dada por $k\nabla^2 s$. Teniendo esto en cuenta se puede establecer $Div.\ A = Div.\,\frac{q^2}{k^2}c^2 = \frac{q^2}{k^2}c^2\Delta^2 s$

La ecuación (8) da $\nabla^2 s = \frac{\delta^2 s}{\delta r^2} = 2\,\frac{a}{r}$ o sea $\nabla^2 s = \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)/2} = 4\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ y entonces $Div.\ A = \frac{q^1}{k^2}c^2 4$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = 4\,\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)}\,c^2 = 4\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,c^2$$

Pero siendo R el radio del átomo $\alpha - \beta = 2R$ $\therefore$ $\alpha + \beta = 2(R+\beta)$ y por tanto

$$Div.\ A = 4\,\frac{R}{R+\beta}\,c^2$$

Para calcular la *Div. B* se hallará la densidad de energía correspondiente a un átomo que absorbe calor y de conformidad con lo establecido para deducir la constante térmica de los gases. Para eso se tendrá en cuenta que la masa por el cuadrado de c es energía según Einstein, que masa dividida por densidad da volumen y que el todo hay que multiplicarlo por el coeficiente de dilatación de los gases que es 1/273. La masa de un átomo de hidrógeno vale 1,008, su densidad es de 9×10^{-5}; por consiguiente $Div.\ B = \frac{1{,}008 \times c^2}{9 \times 10^{-5} \times 273} = \frac{1{,}008 \times 10^5}{2457}c^2 = 41{,}03c^2$. Sumando las dos divergencias, tomando *Div. B* como divergencia elemental, se tiene

$$4\,\frac{R}{R+\beta} + 41.03 = 0 \therefore R + 10{,}26(R+\beta) = 0 \therefore$$

$$R(1 + 10{,}26) = -10{,}26\beta \therefore -\beta = 1{,}097$$
$$-\beta = \sim 1{,}1R$$

Para interpretar este valor negativo de β hay que considerar que en el presente estudio y como se ve por el gráfico, la magnitud β se cuenta positivamente del exterior de la masa hacia ella, por consiguiente $-\beta$ hay que contarlo desde la periferia del átomo hacia afuera.

Esto hace conocer que entre el átomo y la esfera de protección media un espacio de ancho igual a $1.1R$, por consiguiente el radio de esta esfera es de $2.1R$. Los físicos adoptaron para este radio $p = 2R$. Bernoullie fue el de esta hipótesis y también la adoptaron Clausius, J. C. Maxwell y otros.

CONSECUENCIAS

De lo expuesto en este estudio se deduce:

1º La masa que produce un campo de gravitación puede considerarse dentro de un espacio circunscrito por una esfera de radio r, pero su acción gravitatoria se extiende a una distancia R cualquiera, siendo $r < R$.

2º La gravitación (potencial de gravitación) se propaga como una onda de velocidad c que procede de la constitución del espacio-tiempo y que es la máxima que produce la naturaleza y que se ha dicho que es la de la luz en el vacío.

3º El campo de gravitación que produce una molécula es exterior a ella.

4º El comportamiento de las ondas es igual al de los corpúsculos, lo que explica la transformación de unos en otros.

NOTAS

Las delicadas experiencias llevadas a cabo por los esposos Curie-Joliot han comprobado que las radiaciones gamma se transforman en electrones *positivos* y *negativos* simultáneos. Lo que dio ocasión a que se dijera que los rayos gamma o fotones gamma se *materializaban* en dos cargas eléctricas de signos contrarios y que tal experimento es prueba de la materialización de la energía.

La fórmula de Yukawa para sus mésones se puede deducir de la ecuación de la onda acompañante de Broglie-Schrödinger, la cual a su vez se establece de modo análogo.

BIBLIOGRAFIA

(1) H. Weyl. "Temps, Espace, Matière". Traducción del alemán por Juvet et Leroy. París, Librairie de Albert Blanchard, 1922.
A. S. Addington. "Espace, Temps et Gravitation". Traducción del inglés por Rossignol. Introducción por P. Langevin. París, Librairie Scientifique de J. Hermann.

(2) Lucien Gabre. "Une Nouvelle Figure de Monde. Les Théories dé Einstein". París, Payot & Cie. 1922, (capítulo V).

(3) C. A. Coulson, M. A. Prof. en Oxford. "Ondas". Versión castellana. Editorial Dossat, Madrid, Buenos Aires. Para la Ec. (16) consultar páginas 8, 9 y siguientes.

(4) "Higher Mathematics for Engineers and Physicists". McGraw-Hill. Book Co. 1943. Parágrafos 60 y 115.

(5) "La Física de los Corpúsculos" por G. Gianfranceschi, S. J., Tipografía Catalana, Casals. Caspe, 108, Barcelona, página 44.

Bogotá, septiembre 13 de 1960.

DARIO ROZO M.