

Matemáticas

Artículo original

La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega

The Archimedean spiral and the classical problems of Greek geometry

 J.M. Ayerbe Toledano

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España

Resumen

Los tres problemas clásicos de la geometría griega son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. En este artículo se indaga sobre el origen de la espiral de Arquímedes, poniendo el énfasis en su similitud con la cuadratriz de Hipias, y se analiza la forma en la que fue utilizada la curva para obtener soluciones para dos de los problemas clásicos, concretamente para la trisección del ángulo y para la cuadratura del círculo.

Palabras clave: Cuadratura del círculo; Trisección del ángulo; Tangente; Espiral; Conon de Samos; Arquímedes; Papo de Alejandría.

Abstract

The three classic problems of Greek geometry are the squaring of the circle, the trisection of the angle, and the duplication of the cube. This article inquires about the origin of the Archimedean spiral, emphasizing its similarity to the Hippias quadratrix, and analyzes the contribution of this curve to the solutions of two classic problems, specifically, the angle trisection and the quadrature of the circle.

Keywords: Squaring of the circle; Angle trisection; Tangent; Spiral; Conon of Samos, Archimedes, Pappus of Alexandria.

Introducción

Aunque la matemática griega tuvo inicialmente una orientación aritmética, debido al impulso de la escuela pitagórica que consideraba al número como el origen o la esencia de todas las cosas, la irrupción de las magnitudes inconmensurables y las paradojas asociadas a los primeros razonamientos de corte infinitesimal la hicieron virar a lo largo del siglo V a.C. hacia una forma geométrica (Ayerbe-Toledano, 2024, pág. 55), lo que favoreció que desde una época muy temprana se plantearan los tres problemas que, posteriormente, han sido conocidos como los tres problemas clásicos de la geometría griega. Estos problemas no son otros que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

El problema de la cuadratura del círculo se pregunta cómo construir, empleando únicamente rectas y circunferencias, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado¹. Por su parte el problema de la trisección del ángulo consiste en determinar la construcción geométrica que permita dividir un ángulo dado en tres partes iguales, utilizando los mismos medios que en el caso anterior. Finalmente, el problema de la duplicación del cubo estudia la forma de obtener, también mediante rectas y circunferencias, un cubo de volumen doble al de uno dado. Estos problemas actuaron como verdaderos catalizadores de la investigación durante toda la etapa griega y, aunque resultaron ser de imposible solución en los términos en los que

Citación: Ayerbe Toledano JM. La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 2025 Ago 29. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3221>

Editor: Clara Helena Sánchez

Correspondencia:

José María Ayerbe Toledano;
jayerbe@us.es

Recibido: 13 de mayo de 2025

Aceptado: 29 de julio de 2025

Publicado en línea: 29 de agosto de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

¹La igualdad de áreas entre dos figuras debe ser entendida en este contexto, con objeto de evitar anacronismos, como la posibilidad de descomponer una de ellas para transformarla en la otra en un número finito de pasos.

fueron planteados, el extraordinario ingenio de los grandes matemáticos de la Antigüedad permitió encontrar numerosas respuestas a los mismos ampliando el foco de las que eran admisibles.

Fue probablemente Platón, dada su conocida aversión a la utilización de elementos extraños en la geometría, el que estableció la obligación de emplear en las construcciones y diagramas únicamente la regla y el compás, limitación que hizo irresolubles los tres problemas clásicos y que motivó que estos no fueran considerados por Euclides como materia digna de ser incluida en *Elementos*², obra escrita a finales del siglo IV a.C. en una época en la que ya se habían obtenido algunos importantes resultados en relación con estas cuestiones. Quien no eludió en su trabajo las soluciones obtenidas en la Antigüedad para los tres problemas clásicos fue Papo de Alejandría, un matemático del siglo IV d.C. que escribió una de las referencias fundamentales que tenemos para nuestro conocimiento de la geometría griega, la *Colección Matemática* o simplemente la *Colección*, un compendio formado por ocho libros, de los que se ha perdido el primero y parte del segundo y del último. En este tratado Papo clasifica los problemas geométricos en *planos*, *sólidos* o *lineales* según que para su solución se precisen construcciones que se ejecuten únicamente con rectas y circunferencias, mediante el uso adicional de las secciones cónicas o con el concurso de otras curvas, respectivamente, dando así cabida en los diagramas a otros instrumentos de dibujo distintos de la regla y el compás. Además anticipó que los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo son *sólidos*, mientras que el de la cuadratura del círculo es *lineal*, resultados para cuya demostración rigurosa hubo de esperarse hasta el siglo XIX. Una prueba de estos resultados puede encontrarse en (Klein, 1993).

Las primeras soluciones de los tres problemas clásicos de la geometría griega se obtuvieron a lo largo del siglo IV a.C. mediante la introducción de la cuadratriz de Hipias, la primera curva definida cinemáticamente y que resultó útil para solventar los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo (Heath, 1981, Vol. I, pág. 226-229), y de las secciones cónicas, una familia de curvas con amplias aplicaciones en la matemática pero que fueron inventadas específicamente para resolver el enigma de encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes dadas³ (Ayerbe-Toledano, 2025a). Esta cuestión, como ya había señalado Hipócrates de Quíos casi un siglo antes de que Menecmo introdujera la parábola, la elipse y la hipérbola, conduce a la solución del problema de la duplicación del cubo si la segunda magnitud se toma doble de la primera (Ayerbe-Toledano, 2025b, pág. 41-43).

El objeto de este artículo es estudiar con cierto detalle la espiral de Arquímedes, incidiendo especialmente en su utilización para resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo, adentrándonos de esta forma en las respuestas encontradas a lo largo del siglo III a.C.

La espiral guarda ciertas similitudes con la cuadratriz de Hipias ya que ambas curvas pertenecen a la clase *lineal* según la tipología de Papo, se definen como una combinación de dos movimientos sincronizados, fueron inicialmente concebidas para resolver el problema de la trisección del ángulo y, posteriormente, se comprobó que también eran útiles para atacar el problema de la cuadratura del círculo. En el trabajo se reflexiona sobre el origen de la espiral, atribuyendo su invención, de acuerdo con lo señalado por Papo, a Conón de Samos, quien, como se acaba de indicar, la habría concebido específicamente para dar una solución, alternativa a la ideada por Hipias, al problema de la trisección del ángulo. Asimismo se analizan las definiciones de la espiral realizadas por Arquímedes y Papo, estudiando la evolución que se produjo en la concepción de las curvas en el periodo griego, proceso en

²En este artículo utilizaremos como referencia de este tratado el texto (Euclides, 1991-1994-2008).

³Se dice que dos magnitudes A y B son dos medias proporcionales, en proporción continua, entre otras dos C y D si se verifica que $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{D}$.

el que el *symptoma* o propiedad fundamental de la curva va adquiriendo una importancia creciente en detrimento de la propia génesis de la línea.

Finalmente se revisa la obra de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* desde la perspectiva del problema de la cuadratura del círculo, análisis que nos permitirá valorar el papel central jugado por la técnica conocida como inserción o *neusis*, que Arquímedes utilizó magistralmente en su compendio, y el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y el método de demostración por exhaustión, conceptos atribuidos a Eudoxo de Cnido pero que en manos del genio siracusano adquirieron sus más altas cotas de depuración técnica.

Algunas notas sobre la vida y la obra de Arquímedes

Vamos a dedicar esta segunda sección a presentar alguna información general que nos permita situar al personaje central de este artículo, Arquímedes. En comparación con la mayor parte de los matemáticos de la Antigüedad, de su vida poseemos numerosos apuntes procedentes de fuentes diversas. De acuerdo con lo recogido en (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 7) estas reseñas son “las indicaciones del propio Arquímedes, las referencias historiográficas de Polibio y Tito Livio y el encomio literario de Plutarco, a lo que hay que sumar algunos datos transmitidos por Cicerón y por los matemáticos posteriores”. Con objeto de situarlo en el tiempo y en el espacio debe señalarse que sabemos con certeza que lo asesinaron durante la rapiña posterior a la toma de Siracusa por los romanos en 212 a.C., en el transcurso de la Segunda Guerra Púnica (ver, por ejemplo, (Plutarco, 2006, pág. 423-424)) y, dado que por otras fuentes se tiene constancia de que murió a los 75 años, su fecha de nacimiento suele datarse en el año 287 a.C.

Aunque Arquímedes pasó la mayor parte de su vida en su tierra natal, Siracusa, hay constancia de que en su juventud residió durante algún tiempo en Alejandría, la capital cultural del mundo en aquella época. Probablemente aquella visita hay que enmarcarla en los deseos de su padre, el astrónomo Fidias, de proporcionar a su hijo, cuyas cualidades habría sabido apreciar, una educación adecuada a su enorme talento. Alejandría contaba en el siglo III a.C. con dos instituciones, el Museo y la Biblioteca, que disponían de unos fondos bibliográficos imposibles de encontrar en ningún otro lugar y en las que trabajaban los más eminentes sabios y eruditos del mundo helénico bajo la protección de la dinastía ptolemaica.

Es en esta etapa en la que se supone que Arquímedes conoció a algunos de los mejores investigadores de su tiempo, con los que trabajaría amistad y con los que, una vez de vuelta en su tierra, mantuvo una fructífera relación epistolar. En este grupo debemos destacar especialmente al matemático y astrónomo Conón de Samos, al que nos referiremos posteriormente en este trabajo. Aunque no nos ha llegado nada de la correspondencia entre ambos eruditos, hay constancia, por escritos y cartas posteriores del genio de Siracusa, que esta tuvo lugar y que, durante los primeros años tras su vuelta a Sicilia y hasta la muerte de Conón, le remitió algunos de sus trabajos científicos y fue su interlocutor habitual en Alejandría. Concretamente, en la carta que precede al compendio *Sobre la cuadratura de la parábola* (Arquímedes, 2009, pág. 161), Arquímedes precisa que “solía escribir a Conón teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados, pero que ahora han sido estudiados por mí, habiéndolos descubierto primero mediante el método mecánico y habiéndolos demostrado después por el método geométrico”.

También deben mencionarse como interlocutores de Arquímedes a Dosíteo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene, aunque probablemente a estos no los conoció personalmente. Al primero dirigió sus trabajos *Sobre la cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre los conoides y esferoides* y *Sobre las líneas espirales* ((Arquímedes y Eutocio, 2005) y (Arquímedes, 2009)). En este artículo vamos a analizar esta última obra desde la perspectiva de su aportación a la solución del problema de la cuadratura del círculo. Nuestra

mejor información sobre Dosíteo es lo que Arquímedes recoge en sus cartas, esto es, que había conocido a Conón y que estaba familiarizado con la geometría. Además se le atribuyen algunos trabajos perdidos sobre astronomía y la construcción de un espejo ustorio parabólico o alguna participación en ese propósito (ver (Diocles, 1976, pág. 140)). Sin duda era un estudioso alejandrino bien relacionado, pues hizo circular adecuadamente las obras de Arquímedes entre sus colegas.

Por lo que se refiere al segundo, al que también envió algunos tratados, entre otros *El Método sobre los teoremas mecánicos* que hoy solemos denominar simplemente como *El Método* (Arquímedes, 2009), debe reseñarse que fue el director de la Biblioteca desde el año 236 a.C. hasta su muerte acaecida hacia el año 194 a.C. y que gozó de un enorme prestigio fundamentado, sobre todo, en sus trabajos geográficos. No obstante, por lo que se refiere a las matemáticas y más concretamente a los tres problemas clásicos griegos, debe señalarse su contribución para resolver el problema de la duplicación del cubo, mediante la obtención de medias proporcionales en proporción continua, que nos ha llegado a través de Eutocio en sus *Comentarios* al Libro II de la obra de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 378-383). En esta fuente se hace referencia a lo orgulloso que se sentía Eratóstenes de un ingenio mecánico que había ideado para la obtención práctica de medias proporcionales al que posteriormente Papo denominó “mesolabio”, literalmente “constructor de medias”, y que ha llegado a identificarse de tal manera con el problema de la duplicación del cubo que a menudo se le denomina a este como “problema del mesolabio”. Un estudio detallado de las contribuciones de Eratóstenes en su doble condición de geómetra y geodesta puede encontrarse en (Ayerbe-Toledano, 2025b).

A los efectos que interesan a este artículo sabemos por Plutarco que Arquímedes, siguiendo la tradición platónica, no estaba en absoluto interesado por las aplicaciones prácticas de la geometría y que solo accedió a desarrollar algunos inventos a petición del rey Hieron II, tirano de Siracusa, con el que es posible que tuviera alguna relación de parentesco. En este sentido en (Plutarco, 2006, pág. 414) se recoge lo siguiente:

“Este hombre [Arquímedes] los tenía [los ingenios] por materia nada digna de interés y la mayor parte habían sido resultados accesorios de juegos geométricos, pues ya antes el rey Hierón le apreciaba y había convencido a Arquímedes de que volviera algo de su arte de lo inteligible a lo corpóreo y lo hiciera más conocido para la gente del común mezclando de algún modo lo racional con lo sensible en los asuntos prácticos”.

Y un poco más adelante (Plutarco, 2006, pág. 419), apostillando esta misma idea, señala: “Considerando que las ocupaciones relativas a la mecánica y, en general, todo género de arte tocante a lo útil era innoble y vil [Arquímedes] puso su propia estimación sólo en aquello en lo que la belleza y la excelencia se da sin mezcla con lo útil”.

Sin embargo estas palabras de Plutarco deben ser acogidas con cierto recelo. No cabe duda de que la formación de Arquímedes estuvo fuertemente influida por su estancia en Alejandría y, de hecho, su obra matemática es de una perfección técnica y un rigor científico que en nada desmerece de la metodología seguida en *Elementos* de Euclides. Además, y esta no es una cuestión menor, no nos ha llegado ningún compendio del genio de Siracusa dedicado a sus obras de ingeniería, lo que podría indicar que no las consideraba de entidad suficiente como para ponerlas por escrito. No obstante, no cabe pensar que los artilugios diseñados por Arquímedes fueran únicamente un pasatiempo derivado de sus investigaciones geométricas, sino que, por su originalidad e importancia, deben considerarse como una parte fundamental de su aportación a la ciencia. En este sentido en (González-Urbaneja, 2006, pág. LXVII) se especula con que uno de los motivos que podría haberle impelido a abandonar Alejandría y volver a Sicilia pudo ser el hecho de que la rígida concepción de la ciencia en la cultura helenística, sustancialmente teórica y abstracta, limitaba su capacidad investigadora y su genio creativo. En cualquier caso, su admiración por la ciencia pura es

indiscutible toda vez que en su propia tumba mandó grabar un cilindro circunscrito a una esfera, junto con un epigrama que describía la relación de dos tercios que vincula tanto los respectivos volúmenes como las superficies totales, distinguiendo de esta forma, entre toda su producción científica, precisamente estos resultados como aquellos por los que sentía una mayor predilección.

En relación con los inventos de Arquímedes interesa ahora destacar los que preparó para la defensa de Siracusa frente a los ataques del cónsul romano Marcelo. En (Plutarco, 2006, pág. 415-419) se relata con cierto detalle esta participación, que resultó extraordinariamente exitosa, hasta el punto de hacer desistir a Marcelo de tomar la ciudad por asalto y obligarle a rendirla mediante un ardid después de más de tres años de asedio. Plutarco lo recoge en el siguiente pasaje:

“Y al final, [viendo] Marcelo que los romanos estaban tan asustados que si veían una cuerdecita o un madero que sobresalía un poco del muro daban media vuelta y huían gritando que Arquímedes ponía en marcha otro ingenio contra ellos, renunció a toda clase de batalla y ataque y a partir de entonces hizo depender el asedio del tiempo”.

La utilización de las matemáticas para la construcción y mejora de las catapultas y otros instrumentos de guerra está bien documentada en la tradición griega. En relación concretamente con el problema de la duplicación del cubo Eutocio pone en boca de Eratóstenes las siguientes palabras en (Arquímedes y Eutocio, 2005, pág. 379-380): “La idea [para el cálculo de medias proporcionales] será útil también para quienes quieran hacer mayores las catapultas o los ingenios para lanzar proyectiles. Porque es preciso agrandarlo todo en proporción: los grosores y los tamaños y los orificios y las tuercas y las correas que van insertadas, si se quiere aumentar el proyectil en proporción, y esto no es posible hacerlo sin el descubrimiento de las medias proporcionales”.

Y Arquímedes debió de ser un maestro en este arte pues Plutarco documenta cómo los romanos fueron obligados a retirarse, en los sucesivos intentos que realizaron para tomar Siracusa, a consecuencia de la cantidad de piedras y otros proyectiles de gran tamaño con que eran bombardeados. Así, en (Plutarco, 2006, pág. 416) se afirma: “Cuando los romanos atacaron por ambos flancos, los siracusanos quedaron asombrados y sin decir palabra por causa del miedo, pensando que no tenían manera de enfrentarse a una violencia y un ejército tan grande. Pero Arquímedes, poniendo en funcionamiento sus máquinas, hizo frente a la infantería con proyectiles de todas clases y piedras de enorme magnitud lanzadas con estruendo y velocidad increíbles y como nada les protegía del peso, iban poniendo patas arriba a todos los que pillaban debajo y sembraban el revuelo entre las formaciones”.

Sirvan estas referencias para demostrar el dominio que poseía Arquímedes del problema de la duplicación del cubo, mediante la obtención de medias proporcionales en proporción continua, pero a nosotros en este artículo nos interesa en particular la investigación que realizó sobre la espiral, una nueva curva conocida en la actualidad como espiral de Arquímedes, que le permitió encontrar una solución al problema de la cuadratura del círculo.

La espiral de Arquímedes y el problema de la trisección del ángulo

La espiral fue estudiada por Arquímedes de manera específica y exhaustiva en su tratado titulado *Sobre las líneas espirales*. Nosotros tomaremos como fuente en este artículo la traducción al español de la obra de Arquímedes recogida en (Arquímedes, 2009, pág. 13-71). No obstante, se han revisado cuidadosamente todas las demostraciones de las proposiciones, con objeto de evitar en lo posible la forma retórica de las mismas, y se han incluido referencias precisas de los resultados utilizados por el genio siracusano. Con esta actuación se ha pretendido hacer más accesible al lector contemporáneo esta difícil obra de Arquímedes,

en la parte que hemos tratado en este artículo, pero la notación moderna no debe hacernos caer en el anacronismo de identificar las magnitudes con números reales o de aplicar sin más las reglas del álgebra actual en los cálculos con razones y proporciones. Para evitarlo se hace referencia siempre a los resultados de Euclides que justifican las operaciones entre magnitudes que se efectúan.

En la carta a Dosíteo que precede al compendio Arquímedes se refiere a Conón, del que dice que había fallecido unos años antes y del que alaba su inteligencia poco corriente para las matemáticas y su excelente afición al estudio, señalando que antes de su muerte le había planteado algunos problemas de los que no tenía constancia de que se hubiera logrado algún avance posterior. Entre los problemas que Arquímedes planteó a Conón estarían los teoremas principales incluidos posteriormente en su compendio dedicado a la espiral, pero lo que no queda claro es si esta curva fue concebida inicialmente por Arquímedes o ya era conocida por los estudiosos alejandrinos. Papo parece atribuir la invención de la curva a Conón y, justamente antes de definir la línea en el Libro IV de la *Colección Matemática*, agradece el trabajo de sus predecesores (Pappus, 2010, pág. 119): “el geómetra Conón de Samos, que propuso el teorema principal acerca de la espiral, y Arquímedes, que lo probó utilizando una asombrosa línea de ataque”.

Aunque en (Heath, 1981, Vol. II, pag. 359) y en (Pappus, 2010, pág. 119) se señala que la cita de Papo que acabamos de mencionar podría ser errónea, ya que de acuerdo con la carta de Arquímedes fue este quien le propuso el teorema a Conón y no al revés, nosotros damos credibilidad a la atribución de la autoría de la curva al sabio de Samos y consideramos al menos verosímil que Conón ideara la curva como una alternativa a la cuadratriz de Hipias para solucionar el problema de la trisección del ángulo, dadas las críticas que la construcción de la cuadratriz podría estar recibiendo. En efecto, se sabe por autores posteriores, especialmente por Papo, que algunos matemáticos de la Antigüedad fueron muy críticos con la línea ideada por Hipias, señalando la dificultad de su construcción. En (Pappus, 2010, pág. 132-133) se reseñan dos serias objeciones puestas de manifiesto por Esporo de Nicea (aprox. 240 d. C.-300 d. C.) que, probablemente, aunque fuera de una forma menos explícita, podrían estar ya planteadas en vida de Conón.

Por otra parte en esta época, fuertemente influenciada por la sombra de Platón, estarían muy presentes en los ambientes alejandrinos las severas críticas vertidas por el gran filósofo sobre la persona de Hipias de Élida en los dos Diálogos que llevan su nombre, *Hipias Menor* e *Hipias Mayor*, lo que pudo contribuir también a la revisión de su obra científica con el ánimo de desacreditarla. Aunque esta situación estaba ya superada en la etapa de Proclo, que reconoce en (Proclus, 1970, pág. 52) la notable reputación del elidense como geómetra, probablemente la coyuntura era muy distinta al principio del siglo III a.C., en la época inmediatamente posterior a la muerte de Euclides. En definitiva parece plausible que el descrédito de Hipias, en el marco general de las implacables críticas a los sofistas realizadas por Platón, unido a las dificultades detectadas en la construcción de la cuadratriz, fuera lo que animó a Conón a buscar una línea alternativa, aunque similar en cuanto a su génesis como combinación de dos movimientos y a su idoneidad para dividir un ángulo en tantas partes como se precise. Lo que resulta verdaderamente admirable es que esta curva, manteniendo su similitud con la cuadratriz hasta el final, también fuera de utilidad para cuadrar el círculo.

A continuación vamos a revisar la definición de la espiral y sus principales elementos, siguiendo la nomenclatura establecida por Arquímedes en su tratado que, suponemos, partiría de la que hubiera realizado Conón y que este habría trasladado a aquel en el curso de su perdida relación epistolar.

Definición 1 *Espiral de Arquímedes y principales elementos.*

Si se traza una línea recta⁴ en un plano y, permaneciendo fijo uno de sus extremos y haciéndola girar un número cualquiera de veces con movimiento uniforme, vuelve de nuevo a la posición inicial y, al mismo tiempo que se hace girar la línea, un punto se desplaza por la recta uniformemente partiendo del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano (curva OCEABD en la Figura 1).

Llámesse principio de la espiral al extremo de la recta que permanece fijo mientras esta se desplaza⁵ (punto O en la Figura 1).

Y principio del giro a la posición de la línea en la que la recta empezó a girar.

Llámesse recta primera a la que recorre en el primer giro el punto que se desplaza por la recta (segmento OA en la Figura 1) y segunda a la que recorre el mismo punto en el segundo giro (segmento AD en la Figura 1) y, de manera semejante, llámense a las otras con nombre homónimo de esos giros.

Llámesse área primera a la comprendida por la espiral descrita en su primer giro y la recta primera (determinada por la espiral OCEA y el segmento OA en la Figura 1), y área segunda a la comprendida por la espiral en su segundo giro y la recta segunda (determinada por la espiral ABD y el segmento AD en la Figura 1), y llámense sucesivamente a las demás.

Y si desde el punto que es principio de la espiral se traza una línea recta, llámese lo de delante de esta recta a lo que está hacia el lado que se produce el giro, y lo de detrás lo que está hacia el otro lado.

Llámesse círculo primero al trazado con centro en el punto que es principio de la espiral y con la recta primera por radio (de centro O y radio OA en la Figura 1); círculo segundo al trazado con el mismo centro y con el doble de esa recta por radio (de centro O y radio OD en la Figura 1), y los demás sucesivos a estos de la misma manera.

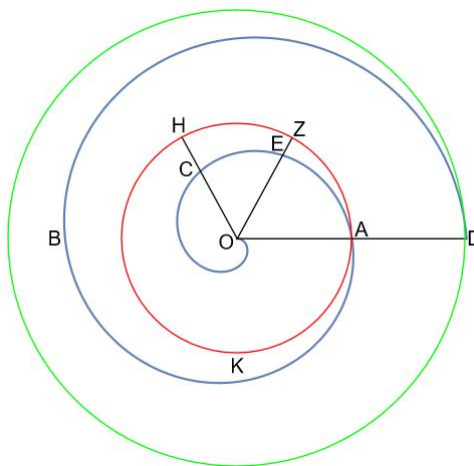


Figura 1. Espiral y sus elementos.

Como vemos en la definición, la espiral se materializa mediante la combinación de dos movimientos uniformes: por un lado el movimiento de rotación de la recta, permaneciendo fijo uno de sus extremos, y por otro el movimiento de traslación del punto sobre la recta, partiendo del principio de la espiral. Precisamente las dos primeras proposiciones del tratado analizan, con el implacable rigor que caracteriza al genio de Siracusa, las propiedades

⁴En realidad es una semirrecta, pues uno de los extremos debe permanecer fijo.

⁵Se refiere al desplazamiento en su movimiento de rotación.

del movimiento rectilíneo uniforme, estableciendo que la razón entre el espacio recorrido y el tiempo empleado por un punto que se desplaza uniformemente por una línea recta es constante durante todo el movimiento, esto es, que la velocidad permanece constante, y deduciendo de este hecho que en los movimientos uniformes también se mantiene inalterable la razón entre los espacios cuando son recorridos en los mismos tiempos. En realidad estos dos resultados, aunque Arquímedes explicita una demostración para ellos, son consecuencia directa de la naturaleza del movimiento uniforme y lógicamente también serían conocidos y utilizados por los matemáticos anteriores a Arquímedes. Además, de la definición de la espiral siguen inmediatamente los tres resultados siguientes, que Arquímedes recoge como las proposiciones 12, 14 y 15 de su tratado, pero que sin duda ninguna serían conocidos por Conón y estarían en la base de su concepción de la curva.

Proposición 1 *Si a la espiral descrita en un giro cualquiera la cortan un número cualquiera de rectas que parten del principio de la espiral y forman unas con otras ángulos iguales, se excederán [las rectas] entre sí en lo mismo [es decir, sus longitudes estarán en progresión aritmética].*

Demostración. Sea una espiral con principio en O y en la que inciden los segmentos OB , OC , OD y OE que forman unos con otros ángulos iguales como se indica en la Figura 2. Hemos de probar que $OE - OD = OD - OC = OC - OB$.

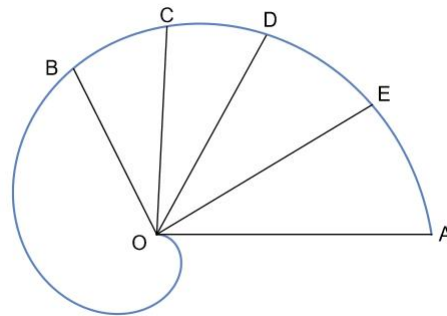


Figura 2. Segmentos cuya longitud varía en progresión aritmética.

En efecto, al ser el movimiento uniforme, el tiempo en que la recta desplazada en sentido circular llega desde OB hasta OC es el mismo que el tiempo en que, al desplazarse el punto que está en la recta, recorre el exceso entre OC y OB , y lo mismo puede decirse de las restantes posiciones, al ser el giro con el mismo ángulo. De este hecho se obtiene el resultado. $\square$

Proposición 2 *Si dos rectas que parten del punto que es principio de la espiral cortan a la espiral trazada en su primer giro y son prolongadas hasta la circunferencia del círculo primero, las rectas que cortan a la espiral guardarán entre sí la misma razón que los arcos de círculo que quedan entre el extremo de la espiral y los extremos de las rectas prolongadas que resultan en la circunferencia, tomados los arcos hacia lo de delante desde el extremo de la espiral.*

Demostración. En las condiciones de la Figura 3 se ha de demostrar que

$$\frac{OE}{OC} = \frac{\text{arco}(AKZ)}{\text{arco}(AKH)}$$

donde los arcos mencionados están tomados sobre el círculo primero.

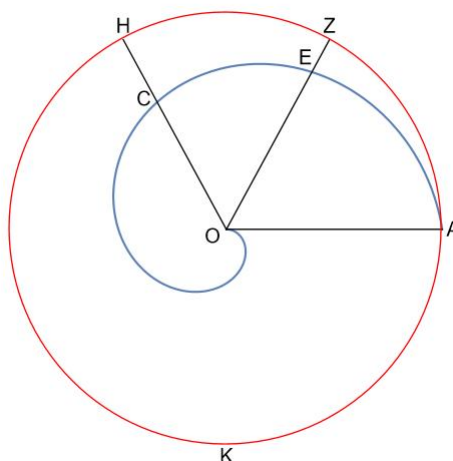


Figura 3. Proporción entre rectas que parten del origen de la espiral y arcos del círculo primero.

En efecto, al desplazarse en círculo el segmento OA está claro que el punto A se ha ido desplazando a velocidad uniforme por la circunferencia del primer círculo, mientras que el punto O , que se desplaza también uniformemente por la recta, recorre la línea OA ⁶. Así el punto A , desplazándose uniformemente por la circunferencia del primer círculo, recorre el arco AKZ en el mismo tiempo que el punto O recorre el segmento OE y también el punto A , desplazándose uniformemente por la circunferencia del primer círculo, recorre el arco AKH en el mismo tiempo que el punto O recorre el segmento OC . Como en los movimientos uniformes se mantiene constante la razón entre los espacios recorridos en los mismos tiempos, de acuerdo con la mencionada proposición 2 del tratado de Arquímedes, se sigue el resultado. $\square$

Corolario 1

Si rectas que parten del principio de la espiral trazada en su segundo giro inciden en ella, las rectas guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados [tal como se describen en la proposición anterior] tomados conjuntamente con la circunferencia entera del [primer] círculo.

Corolario 2

Si rectas que parten del principio de la espiral trazada en cualquier giro inciden en ella, las rectas guardarán entre sí la misma razón que los arcos indicados [tal como se describen en la proposición anterior] tomados conjuntamente con la circunferencia entera del [primer] círculo [multiplicada] tantas veces como el número del giro menos uno.

La relación de proporcionalidad recogida en la proposición 2, así como las de los corolarios 1 y 2, constituyen la propiedad fundamental o *symptoma* de la curva, esto es, la relación matemática precisa que cumplen los puntos de la curva y solo ellos. Así, aunque lógicamente esto no lo hicieron los griegos pues faltaban casi dos mil años para que se identificaran las curvas con sus ecuaciones, estas propiedades, junto con la representación simbólica de las proporciones y su manipulación algebraica, permiten en la actualidad obtener fácilmente la ecuación de la espiral en coordenadas polares. En efecto, tomando un punto P cualquiera del primer giro de la espiral, cuyas coordenadas polares serán $P(r, \theta)$, y eligiendo también

⁶En sentido estricto los puntos A y O no se desplazan puesto que son fijos. Las palabras de Arquímedes deben entenderse en el sentido de que los que se desplazan son un punto que partiendo de A recorre la circunferencia del primer círculo, y otro que saliendo de O recorre la recta OA .

el punto A final del primer giro de la espiral, de la proposición 2 se sigue que, si llamamos O al principio de la espiral, entonces

$$\frac{OP}{OA} = \frac{\text{arco}(AP)}{c}$$

tomando el arco señalado sobre el primer círculo y siendo c la longitud de la circunferencia de dicho círculo. Sustituyendo queda

$$\frac{r}{OA} = \frac{OA \cdot \theta}{2\pi \cdot OA}$$

y, en consecuencia, se deduce que la ecuación en coordenadas polares del primer giro de la espiral es $r = \frac{OA}{2\pi} \theta = a \cdot \theta$, donde a^7 es una constante positiva que depende únicamente de las velocidades uniformes lineal y angular y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Razonando de manera análoga, pero utilizando los corolarios 1 y 2, se obtendría que, si P es un punto perteneciente al giro n -ésimo de la espiral expresado en coordenadas polares $P(r, \theta)$, la ecuación en dichas coordenadas de ese giro de la espiral sería

$$r = a(\theta + 2(n-1)\pi), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

En definitiva, podemos expresar la espiral en la forma $r = a \cdot \theta$, donde $\theta \geq 0$ y a es una constante positiva que depende únicamente de las velocidades uniformes lineal y angular.

Como hemos señalado, la espiral también fue estudiada en profundidad por Papo en el Libro IV de la *Colección* (ver (Pappus, 2010, pág. 119-125)), en el marco de una presentación sistemática y organizada de las tres principales curvas *lineales*, esto es, la espiral, la conoide de Nicomedes y la cuadratriz. El maestro alejandrino define la espiral de la siguiente forma:

“Sea un círculo dado, con centro B y radio BA . Asumamos que la línea BA está en movimiento de tal forma que, mientras B permanece fijo, A se mueve uniformemente a lo largo de la circunferencia del círculo y, al mismo tiempo un punto, partiendo de B , se mueve uniformemente en la dirección de A , de tal forma que el tiempo que tarda el punto en recorrer BA es el mismo que tarda el punto A en recorrer la circunferencia del círculo. Ahora, el punto que se mueve a lo largo de la línea BA describirá la línea $BEZA$ durante la rotación, y su punto de partida será el punto B , mientras que el punto de partida de la rotación será BA .

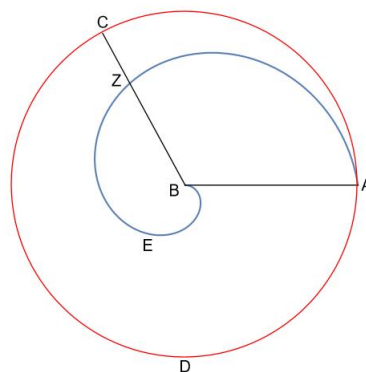


Figura 4. Génesis de la espiral según Papo.

Esta línea es llamada espiral. Y su principal *symptoma* es de la siguiente forma. Si unimos mediante una línea recta B con un punto cualquiera de la espiral Z , y este segmento BZ lo

⁷Lógicamente, la identificación de la razón con un número real no era posible en la matemática griega.

prolongamos hasta el punto C de la circunferencia, el segmento BA es al segmento BZ como la circunferencia completa es al arco ADC .”

Como podemos ver, aunque las definiciones de Papo y Arquímedes son muy similares, presentan alguna sutil diferencia. En efecto, mientras que en la de Papo el círculo primero se ha fijado *a priori*, en la definición de Arquímedes este círculo se obtiene como una consecuencia de la combinación de movimientos que se describe, es decir, se determina *a posteriori*. Esta diferencia es relevante porque en las curvas cuya generación se realiza mediante una composición de movimientos sincronizados, es esencial conocer la ratio entre los mismos para que la curva quede perfectamente descrita y, por tanto, esté libre de contradicciones conceptuales. Y en el caso de la espiral la ratio entre ambos movimientos es la de la circunferencia respecto al radio, es decir, esencialmente π , y esta razón era desconocida. Este problema es el mismo que aquejaba a la cuadratriz de Hipias y al que nos hemos referido anteriormente, por lo que resulta sorprendente que Papo no lo mencione siquiera en relación con la espiral. De hecho, en la definición de Papo el inconveniente se manifiesta en toda su crudeza, al haber fijado *a priori* el primer círculo, mientras que Arquímedes, más astuto, obvia el problema al usar movimientos sincronizados en una ratio dada de antemano, obteniendo el círculo primero posteriormente.

Sin embargo Papo parece avanzar respecto del genio de Siracusa en la identificación del *symptoma* de la curva como el elemento clave a partir del cual pueden obtenerse las diferentes propiedades de la misma. En esta concepción se pone el énfasis, para la definición de la línea, en la determinación de su propiedad fundamental, relegando la cuestión de la génesis de la curva a una posición secundaria, casi se podría decir que irrelevante puesto que lo que verdaderamente interesa es la relación matemática que deben cumplir los puntos de la curva y sólo ellos.

Aunque probablemente Papo no tenía todavía una conciencia clara de que el *symptoma* de la curva la definía completamente, y por ello habla de su “*symptoma* principal”, sí parece progresar respecto de la concepción arquimediana al destacar de manera más relevante el papel central que juega la propiedad fundamental de la curva en la determinación de sus propiedades. De hecho, en el Libro IV de la *Colección* repite el mismo esquema de presentación para las tres curvas *lineales* mencionadas, en un esfuerzo no disimulado por darles un estatus matemático aceptable que permitiera superar las reticencias que la génesis de las mismas como movimientos sincronizados había generado entre sus predecesores.

El hecho de que los matemáticos griegos definieran algunas curvas utilizando movimientos uniformes no quiere decir que la tradición euclídea considerara esta forma de proceder como parte del discurso matemático. Papo toma conciencia de que, para superar las contradicciones conceptuales inherentes a la generación de las líneas como una combinación de movimientos sincronizados en una ratio desconocida, era necesario concebirlas de otra forma. Con esta finalidad se esfuerza por resaltar la importancia del *symptoma* de la curva, en detrimento de su génesis, y pone el acento en lo que muchos siglos después, expresado en un lenguaje algebraico adecuado, será su ecuación.

Veamos ahora cómo podemos utilizar la espiral para trisecar un ángulo dado. Como hemos señalado, entendemos que la búsqueda de soluciones a este problema fue lo que motivó a Conón para definir la curva. Arquímedes no se refiere en absoluto a este tema en su tratado *Sobre las líneas espirales* y, dado que no parece posible que a un genio de su talla le pasara desapercibido un hecho tan íntimamente ligado a la naturaleza de la curva, debemos concluir que esta aplicación de la espiral le habría sido trasladada por Conón y, por ello, ni siquiera la menciona. En relación con el problema de la trisección del ángulo, Proclo en (**Proclus**, 1970, pág. 212) indica, después de referirse a las soluciones halladas por Hipias y Nicomedes, que “otros han comenzado desde las espirales de Arquímedes y han dividido un ángulo rectilíneo dado en una ratio dada”, afirmación que, aunque no aclara quién aplicó por

primera vez la espiral a este problema clásico, sí parece atestiguar que no fue Arquímedes.

Para dividir en tres partes iguales (o en la ratio que se desee pues el procedimiento es el mismo) un ángulo dado $\widehat{AOP}$ se debe situar en O el origen de la espiral, siendo A el punto final de la primera vuelta y P el punto de intersección de la espiral con la recta que limita el ángulo que comienza en OA , todo ello tal como se indica en la Figura 5.

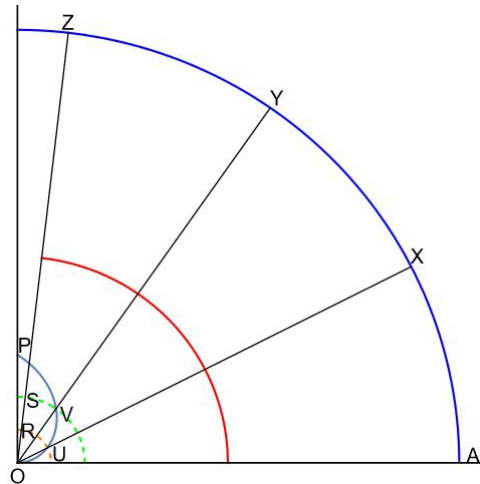


Figura 5. Trisección del ángulo.

Entonces, para trisecar el ángulo $\widehat{AOP}$ se divide el segmento OP en tres partes iguales⁸ mediante los puntos R y S y se trazan las circunferencias concéntricas de centro O y radios OR y OS . Estas circunferencias cortarían a la espiral en los puntos U y V , respectivamente. Obviamente se tiene que

$$\frac{OU}{OP} = \frac{OR}{OP} = \frac{1}{3}$$

por la construcción realizada. Pero por la proposición 2, si llamamos Z , Y y X a los puntos de corte de las rectas OP , OV y OU , respectivamente, con la circunferencia del primer círculo, se verifica que⁹

$$\frac{OU}{OP} = \frac{\text{arco}(AX)}{\text{arco}(AZ)} = \frac{\widehat{AOX}}{\widehat{AOZ}} = \frac{1}{3}$$

Así, las rectas OX y OY dividen el ángulo $\widehat{AOP}$ en tres partes iguales.

Aplicación de la espiral a la cuadratura del círculo

Como sucedió en el caso de la cuadratriz de Hipias, la espiral también pudo ser utilizada para obtener una solución al problema de la cuadratura del círculo. El resultado clave, obtenido por Arquímedes en su tratado *Sobre las líneas espirales* como la proposición 18, no es nada sencillo y para su demostración se requerirá de una serie de proposiciones previas. El teorema permite rectificar la circunferencia, pues lo que se prueba es que la subtangente a la espiral en el punto final de la primera vuelta coincide con la longitud de la circunferencia del primer círculo. Una vez rectificada la circunferencia, si ahora se desea cuadrar un círculo de radio $r = OA$, basta trazar la espiral con principio en O y recta primera OA y su tangente en el punto A . Se verifica entonces que la recta tangente corta a la perpendicular a OA por

⁸*Elementos*, Prop. VI.9.

⁹La segunda igualdad es consecuencia de *Elementos*, Prop. VI.33.

O en un punto B de forma que la longitud de OB coincide con la de la circunferencia del primer círculo de la espiral c , es decir, con la de la circunferencia dada de radio $r = OA$.

Una vez obtenido el segmento OB de longitud c construimos el rectángulo de lados OB y OA que determina, en virtud de la proposición 1 del compendio de Arquímedes *Sobre la medida del círculo*, un área doble a la del círculo de partida, por lo que el rectángulo de lados $\frac{OB}{2}$ y OA tiene el mismo área que el círculo inicial. Finalmente, si hallamos la media proporcional entre los lados del rectángulo¹⁰, resultará que el cuadrado construido a partir de ese segmento¹¹ tendrá la misma área que el círculo dado de radio OA .

En el tratado *Sobre las líneas espirales* Arquímedes hace uso, como en otros trabajos anteriores, del que hoy llamamos principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas. En el último párrafo de la carta a Dosíteo que precede al compendio señala lo siguiente (Arquímedes, 2009, pág. 18):

“Asumo aquí también el siguiente postulado de los que figuran en los libros publicados anteriormente: en las líneas desiguales y las áreas desiguales, es posible que el exceso en que excede la mayor a la menor, sumado repetidamente a sí mismo, exceda a cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón”.

Este principio se debe a Eudoxo de Cnido, probablemente el matemático más importante vinculado a la Academia de Platón, y aparece recogido en *Elementos* (Euclides, 1991-1994-2008, Libros V-IX, pág. 10) como la definición V.4 de la siguiente forma: “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra”.

Sin embargo Arquímedes, como acabamos de ver, lo consideró, más correctamente, un principio o postulado. Arquímedes utiliza este axioma para probar la proposición 4 del compendio en la que demuestra que, dadas dos líneas desiguales, una recta y una circunferencia de círculo, es posible tomar una recta menor que la mayor de las líneas dadas pero mayor que la menor. En la proposición 18 necesitará asumir que, dada una circunferencia y un segmento, si ambas magnitudes son desiguales, siempre podrá encontrarse un segmento mayor que la menor y menor que la mayor.

Para llegar al resultado central a los efectos de resolver el problema de la cuadratura del círculo, es decir, a la mencionada proposición 18, vamos a comenzar revisando las proposiciones 5 a 8 del compendio de Arquímedes que, como se verá enseguida, son muy similares. Se trata de cuatro resultados técnicos que nada tienen que ver con las espirales, pero que resultarán fundamentales posteriormente para obtener el teorema principal. Los cuatro lemas desarrollan construcciones geométricas que utilizan el llamado método de inserción¹². Los griegos denominaban “inserción” a una relación entre figuras que consiste en admitir que dadas dos curvas en general y un punto fijo, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo, al que llamaban polo, y tal que sus intersecciones con las curvas dadas determina un segmento de longitud prefijada, denominada *diastema*¹³.

En las proposiciones citadas Arquímedes asume estas construcciones como posibles, pero sin realizarlas expresamente ni dar ninguna explicación sobre las mismas. En (Heath, 1981, Vol. II, pág. 65-66) se señala que, “excepto en la primera de ellas, la solución teórica no puede ser obtenida mediante construcciones con regla y compás, y depende en general de la solución de una ecuación de cuarto grado que puede obtenerse mediante la intersección de una hipérbola equilátera y una parábola. Es bastante posible, no obstante, que estos

¹⁰*Elementos*, Prop. VI.13.

¹¹*Elementos*, Prop. I.46.

¹²Denominado también *neusis* por muchos autores que simplemente trasladan a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego.

¹³Esta palabra traslada a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego que se traduce literalmente por “distancia”.

problemas fueran a menudo resueltos en la práctica mediante algún procedimiento mecánico, a saber, colocando una regla, mediante prueba, en la posición de la línea requerida: para ello solo es necesario situar la regla de forma que pase por el polo y, utilizando ese punto como un pivote, girarla adecuadamente hasta que la intersección con las curvas dadas tenga la longitud deseada”. En (Heath, 2002, pág. c-cxxii) se detalla algo más el estudio de estas inserciones y la utilización que Arquímedes hizo de las mismas, así como su aplicación a los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo.

Aunque la operación inserción se consideraba en la Antigüedad un argumento matemático legítimo y, de hecho, se tiene constancia de que ya fue usada por Hipócrates de Quíos en el siglo V a.C. para la cuadratura de la tercera lúnula¹⁴, el criterio general extendido en la época griega era el de evitar, siempre que fuera posible, su utilización en las construcciones geométricas ya que estas, de acuerdo con la concepción platónica de las matemáticas, debían realizarse empleando como únicos instrumentos de dibujo la regla y el compás. En esta ocasión este criterio no fue seguido por Arquímedes, mostrando una vez más su independencia respecto de los moldes impuestos en *Elementos*. Pero en este caso Arquímedes también infringió otra regla y es la de que cada problema debe resolverse con el menor aparato matemático posible en el sentido de que, si un problema es *plano*, no serían admisibles las soluciones que utilizaran otras curvas *sólidas* o *lineales* mientras que si es *sólido*, solo deberían considerarse las respuestas que se materializaran mediante secciones cónicas. Por ello fue duramente criticado por Papo en la siguiente cita del Libro IV de la *Colección* (Pappus, 2010, pág. 145-146):

“Parece ser un grave error en el que caen los geómetras cuando uno descubre la solución de un problema *plano* mediante el uso de cónicas u otras líneas o lo resuelve mediante un procedimiento extraño [...] como hace Arquímedes cuando en su tratado *Sobre las líneas espirales* asume una inserción de carácter *sólido* con referencia a un círculo; porque es posible sin pedir ayuda a nada *sólido* encontrar la prueba del teorema dado por Arquímedes. Quiero decir en efecto que [es posible] mostrar que la circunferencia del círculo en la primera rotación [de la espiral] es igual a la línea recta dibujada formando ángulos rectos con la recta generadora [de la espiral] hasta [el punto de intersección con] la tangente de la espiral”.

Efectivamente Papo dió una construcción por medio de cónicas (ver (Heath, 2002, pág. cvii-cix)) de la inserción utilizada por Arquímedes en la proposición 8 de su tratado y también se ha comprobado que es posible probar la proposición 18 por métodos puramente *planos*, sin recurrir a una inserción *sólida* (ver (Heath, 1981, Vol. II, pág. 556-561)), tal como Papo menciona en la cita anterior, lo que corrobora la pertinencia de la crítica de este ilustre matemático de la Antigüedad tardía.

No obstante, las críticas de Papo deben ser matizadas teniendo en cuenta que en la etapa del genio de Siracusa era habitual utilizar las inserciones sin mayores comentarios ni justificaciones específicas y que no fue hasta posteriormente¹⁵ que esta operación perdió su condición de mero dispositivo en los diagramas y comenzó a comprenderse la necesidad de construirlas específicamente, indicando en cada caso si eran *planas*, *sólidas* o *lineales* según que se utilizaran para trazarlas solo rectas y circunferencias, secciones cónicas u otras curvas, respectivamente.

Veamos ya los resultados de Arquímedes que, dado su carácter técnico¹⁶, hemos recogido como lemas. El primer lema será fundamental en la demostración de la proposición 4, el

¹⁴Este hecho se recoge en el fragmento relativo a las lúnulas de Hipócrates, de la *Historia de la Matemática* de Eudemo de Rodas, obra desaparecida pero de la que nos ha llegado ese extracto a través de una reproducción contenida en un comentario aristotélico de Simplicio del siglo VI d.C. incluido en (Vera, 1970, pág. 680-685).

¹⁵Según (Zeuthen, 1886) fue Apolonio el primero que advirtió la necesidad de diferenciar entre inserciones *planas* o *sólidas*.

¹⁶El término *técnico* debe entenderse en este contexto en el sentido de que se trata de *enunciados de construcción* y no de *enunciados teóricos*.

lema 2 será necesario para probar el lema 3 y los lemas 3 y 4 jugarán un papel clave en el teorema 1.

Lema 1 Dado un círculo $[ABC]$ y una recta $[FB]$ tangente al círculo [en el punto B] es posible trazar desde el centro $[K]$ del círculo una recta hasta la tangente $[KZ]$ que corta a la circunferencia en T de forma que el segmento TZ [la recta entre la tangente y la circunferencia del círculo] guarde con el radio [del círculo] una razón menor que la que guarda el arco de circunferencia BT [el comprendido entre el punto de contacto de la tangente B y la recta trazada T] con cualquier arco de círculo dado.

Demostración. Sea ABC un círculo de centro K , sea FB la tangente a la circunferencia en B y dese también un arco de circunferencia cualquiera. Consideremos un segmento mayor que el arco dado que se denotará por E .

Por el punto K se traza la recta AKC paralela a FB y elegimos en ella un punto H de forma que si se une H con B el punto de intersección de esta recta con la circunferencia, que llamaremos T , verifique que¹⁷ $TH = E$. Una vez trazada desde el centro la recta KT , prolongamos esta recta hasta cortar a la tangente en el punto Z , todo ello tal como se indica en la Figura 6.

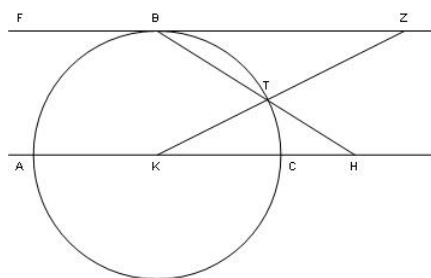


Figura 6. Primer lema técnico.

Se verifica que los triángulos BZT y TKH son semejantes, puesto que son iguales¹⁸, respectivamente, los ángulos $\widehat{KTH}$ y $\widehat{BTZ}$, $\widehat{TKH}$ y $\widehat{BZT}$ y $\widehat{KHT}$ y $\widehat{ZBT}$. Por tanto¹⁹

$$\frac{TZ}{TK} = \frac{TB}{TH} < \frac{\text{arco}(TB)}{\text{arco dado}}$$

dado que $TB < \text{arco}(TB)$ y $TH = E$ es mayor que el arco dado²⁰. En consecuencia

$$\frac{TZ}{\text{radio}} < \frac{\text{arco}(TB)}{\text{arco dado}}$$

□

Lema 2 Dado un círculo $[ABC]$ y en el círculo una cuerda $[AC]$ menor que el diámetro, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ hasta su circunferencia una recta $[KB]$ que corte a la cuerda dada en el círculo [en E] de manera que la recta tomada entre la circunferencia y la cuerda $[EB]$ guarde la razón que se indique con la recta que una B [el extremo de la incidente que está sobre la circunferencia] con un extremo de la cuerda dada en el círculo $[C]$, siempre que la razón dada sea menor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

¹⁷ Arquímedes asume esta inserción, con polo en B y diastema E , sin mayores precisiones.

¹⁸ *Elementos*, Prop. I.15 y I.29.

¹⁹ *Elementos* Prop. VI.4.

²⁰ *Elementos*, Prop. V.8.

Demostración. Consideremos el círculo ABC con centro en K y sea dada en él la cuerda AC menor que el diámetro y sean dadas las magnitudes Z y H tales que²¹ $\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT}$. Trazamos desde el centro K una paralela a AC y sea CD la perpendicular a KC en C . La recta CD es, por tanto, la tangente a la circunferencia en²² C . Todo ello tal como se indica en la Figura 7.

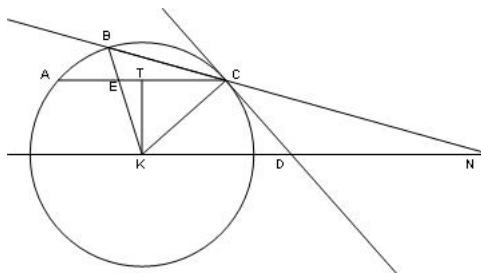


Figura 7. Segundo lema técnico.

Se verifica que los triángulos TCK y KCD son semejantes²³ ya que los ángulos $\widehat{CTK}$ y $\widehat{KCD}$ son rectos, siendo iguales²⁴, además, los ángulos $\widehat{TCK}$ y $\widehat{CKD}$, por lo que también lo serán $\widehat{TKC}$ y $\widehat{KDC}$. Así se obtiene que $\frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CD}$, lo que implica que $\frac{Z}{H} < \frac{KC}{CD}$.

Dado que $\frac{Z}{H} < \frac{KC}{CD}$, podemos encontrar un segmento $BN > CD$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{BN}$, tomando B sobre el arco (AC) , N sobre la recta KD y obligando al segmento a pasar por el punto C . Obsérvese que siempre es posible tomar el segmento BN de esta forma ya que, si la magnitud BN fuese muy próxima a CD se tomaría B muy cerca de C , y si tuviera que ser mucho mayor se tomaría B tan próximo a A como se precisara²⁵.

Puesto que $KB = KC = \text{radio}$, sigue que $\frac{KB}{BN} = \frac{Z}{H}$ y, en consecuencia, $\frac{EB}{BC} = \frac{Z}{H}$ ya que los triángulos KBN y EBC son semejantes²⁶ pues son iguales²⁷, respectivamente, los ángulos $\widehat{EBC}$ y $\widehat{KBN}$, $\widehat{BEC}$ y $\widehat{BKN}$ y $\widehat{BCE}$ y $\widehat{BNK}$. $\square$

Lema 3 Con los mismos datos del lema anterior y prolongada la cuerda $[AC]$ en el círculo, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ hasta la cuerda prolongada una recta $[KE]$ de manera que la parte de la recta que queda entre la circunferencia y la prolongación de la cuerda $[IE]$ guarde la razón que se indique con la que une el extremo de la recta cortada dentro $[del círculo]$ con el extremo de la prolongación $[CI]$, siempre que la razón dada sea mayor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

Demostración. Dado que $\frac{Z}{H} > \frac{TC}{KT}$ y que los triángulos TCK y KCD son semejantes, como vimos en el lema anterior, se sigue que $\frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CD}$, lo que implica que $\frac{KC}{CD} < \frac{Z}{H}$. Así podemos encontrar un segmento $IN < CD$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{IN}$, eligiendo el punto I en el arco de circunferencia entre C y F , de forma que IN sea tendente a C . Así, si I se aproxima a C la magnitud IN se aproxima a CD tanto como se quiera, mientras que si I se aproxima a F la magnitud IN se puede hacer tan pequeña como sea necesario²⁸, todo ello tal como se indica en la Figura 8.

²¹ Por *Elementos*, Prop. III.3, se sabe que la perpendicular desde el centro del círculo a la cuerda la corta en su punto medio.

²² *Elementos*, Prop. III.18 y III.19.

²³ *Elementos*, Prop. VI.4.

²⁴ *Elementos*, Prop. I.29 y I.32.

²⁵ Aquí aparece de nuevo una inserción con polo en C y *diastema* BN , pero sin mencionarse nada sobre cómo se realizaría la construcción.

²⁶ *Elementos*, Prop. VI.4.

²⁷ *Elementos*, Prop. I.29.

²⁸ Aquí se utiliza de nuevo una inserción, en este caso con polo en C y *diastema* IN .

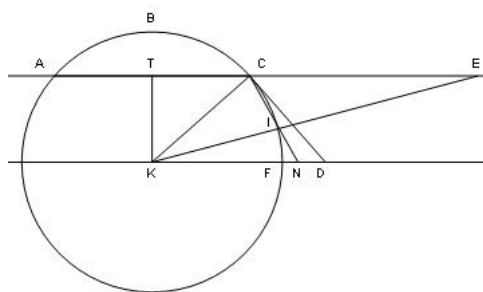


Figura 8. Tercer lema técnico.

Observemos ahora que los triángulos CIE y KIN son semejantes²⁹ puesto que son iguales³⁰, respectivamente, los ángulos $\widehat{CIE}$ y $\widehat{KIN}$, $\widehat{CEI}$ y $\widehat{IKN}$ y $\widehat{ECI}$ y $\widehat{INK}$. Así $\frac{KI}{IN} = \frac{IE}{CI}$ y como $KI = KC$ se sigue que

$$\frac{IE}{CI} = \frac{KC}{IN} = \frac{Z}{H}$$

□

Lema 4 Dado un círculo $[ABC]$ y en el círculo una cuerda $[AC]$ menor que un diámetro y otra línea tangente al círculo en el extremo de la cuerda $[C]$, es posible trazar desde el centro del círculo $[K]$ una recta hasta la cuerda $[KE]$ de manera que [la parte] de ella entre la circunferencia del círculo y la cuerda $[BE]$ guarde con [la parte] tomada de la tangente $[IC]$ la razón que se indique, siempre que dicha razón sea menor que la que guarda la mitad de la cuerda dada en el círculo $[TC]$ con la perpendicular trazada desde el centro hasta ella $[KT]$.

Demostración. Sea ABC el círculo dado y considérese en el círculo una cuerda AC menor que el diámetro. Sea VP la tangente al círculo en el punto C , tal como se indica en la Figura 9. Sean Z y H dos magnitudes tales que $\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT}$.

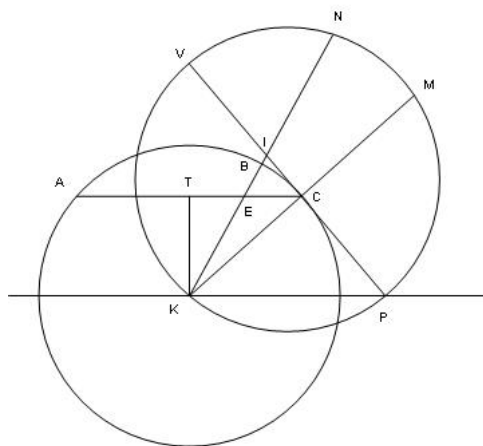


Figura 9. Cuarto lema técnico.

Si se traza KP paralela a AC se tiene que los triángulos TCK y KCP son semejantes, como

²⁹ *Elementos*, Prop. VI.4.

³⁰ *Elementos*, Prop. I.15 y I.29.

se probó en el lema 2. Así

$$\frac{Z}{H} < \frac{TC}{KT} = \frac{KC}{CP}$$

Podemos, por tanto, tomar un segmento $CV > CP$ tal que $\frac{Z}{H} = \frac{KC}{CV}$. Dado que los tres puntos V , K y P no están alineados por la construcción realizada, trazamos la circunferencia que pasa por ellos³¹ VKP . Puesto que $CV > CP$ y KC y VP son perpendiculares, cabe que pongamos otra línea $IN = MC$ tendente a K , que cortará a la circunferencia del círculo ABC en un punto B y a la tangente en C en un punto³² I .

Entonces se tiene, por un lado, que $VI \cdot IP = KI \cdot IN$ pues las cuerdas VP y KN se cortan en³³ I y, por otro, que $KE \cdot IP = KI \cdot CP$ ya que, al ser semejantes los triángulos ECI y KPI sigue³⁴ que $\frac{KE}{KI} = \frac{CP}{IP}$.

Así, de las dos igualdades anteriores, se obtiene que

$$\frac{KE \cdot IP}{VI \cdot IP} = \frac{KI \cdot CP}{KI \cdot IN}$$

lo que implica que $\frac{KE}{VI} = \frac{CP}{IN}$ y, en consecuencia que $\frac{KE}{VI} = \frac{CP}{MC}$ ya que $IN = MC$ por construcción.

Razonando de manera similar con las cuerdas KM y VP que se cortan en el punto C se obtiene que $KC \cdot MC = CV \cdot CP$ y así

$$\frac{CP}{MC} = \frac{KC}{CV} = \frac{KE}{VI}$$

Pero

$$\frac{KC}{CV} = \frac{KE}{VI} = \frac{KB - BE}{CV - IC} = \frac{KC - BE}{CV - IC}$$

lo que implica que³⁵ $\frac{KC}{CV} = \frac{BE}{IC}$ y, por tanto, $\frac{BE}{IC} = \frac{Z}{H}$. □

Después de estos resultados técnicos que, como vemos, no tienen nada que ver propiamente con la espiral, Arquímedes prueba tres propiedades de la tangente a la espiral preparatorias del resultado principal. Como se señala en (Arquímedes, 2009, pág. 12) “este tratado es el primer estudio a fondo sobre tangentes a una curva diferente del círculo”; poco tiempo después Apolonio hizo lo propio con las tangentes a las cónicas en su gran obra dedicada a estas curvas.

La tangente a la circunferencia había sido definida por Euclides de la siguiente forma³⁶: “Se dice que es tangente a un círculo la recta que, tocando el círculo y siendo prolongada, no corta el círculo”. Obviamente esta definición, entendida literalmente, no es de aplicación a la espiral ya que, si se prolonga suficientemente la recta que “toca” a la espiral en un punto, esta terminará cortándola en otros muchos. No obstante, la definición sigue siendo totalmente válida si nos restringimos a un entorno del punto de tangencia y entendemos que es por este motivo por el que Arquímedes, tan puntilloso la mayoría de las veces, no consideró necesario dar una definición precisa de la tangente a la espiral. Así la tangente a la espiral en un punto sería para Arquímedes la recta que la “toca” en dicho punto, esto es, que entra en contacto con ella en el punto de tangencia, pero sin atravesarla, es decir, “dejándola a un lado”.

³¹Elementos, Prop. IV.5.

³²Aquí aparece de nuevo una inserción, en este caso con polo en K y diámetro MC . Esta es la inserción que fue criticada por Papo en la Colección.

³³Elementos, Prop. III.35.

³⁴Elementos, Prop. VI.2.

³⁵Elementos, Prop. V.19.

³⁶Elementos, Def. III.2.

Aunque Arquímedes da por supuesto que la tangente a la espiral en cada punto existe, sí considera necesario probar que si una recta es tangente a la espiral, entonces el punto de tangencia es único. La prueba muestra además que la espiral siempre es cóncava hacia el origen, hecho que será posteriormente utilizado en el teorema principal para garantizar que cualquier segmento que una el origen de la espiral con la tangente a esta en el punto final de la primera vuelta ha de cortar previamente a la propia espiral.

Proposición 3 *Si una recta es tangente a la espiral [“toca” a la espiral], lo será en un solo punto [la “tocará” en un único punto].*

Demostración. Sea $OCTHA$ una espiral con principio en O y sea OA el principio del giro. Sea tangente a la espiral una recta EZ y supongamos que toca a la espiral en dos puntos C y H . Tracemos OC y OH y córtese por la mitad el ángulo comprendido entre³⁷ OH y OC , siendo T el punto en que corta a la espiral la recta que divide el ángulo por la mitad, todo ello tal como se indica en la Figura 10.

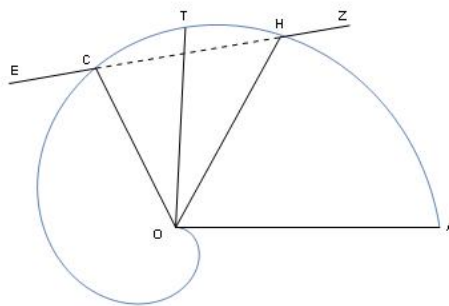


Figura 10. Recta tangente a la espiral.

Entonces OH excede a OT en lo mismo que OT excede a OC , en virtud de la proposición 1 puesto que contienen ángulos iguales. Así $OH + OC = 2 \cdot OT$ y, por tanto, el punto T debe ser exterior al triángulo³⁸ OCH . Por tanto es evidente que el punto en que la recta OT corta a CH está entre O y T . Luego la recta EZ corta a la espiral, ya que uno de los puntos del segmento determinado por los puntos C y H es interior a la curva, lo que contradice el hecho de que EZ sea tangente³⁹. $\square$

Proposición 4 *Si una línea recta es tangente a la espiral trazada en su primer giro y desde el punto de tangencia se traza una línea recta hasta el punto que es principio de la espiral, los ángulos que forma la tangente con la línea trazada son desiguales, siendo obtuso el que está hacia lo de delante y agudo el que está hacia lo de detrás.*

Demostración. Sea $OBCDA$ una espiral trazada en su primer giro, siendo O el principio de la espiral y la recta OA el principio del giro. Sea AKH el círculo primero y sea ECZ la tangente a la espiral en C y desde C hasta O trácese CO , todo ello tal como se indica en la Figura 11.

Se ha de demostrar que el ángulo $\widehat{OCZ}$ es un ángulo obtuso. Para ello trácese un círculo CTN con centro en O y radio OC . Por fuerza el arco de este círculo que mira hacia delante [CT] cae dentro de la espiral, mientras que el que mira hacia detrás cae fuera⁴⁰.

³⁷ *Elementos*, Prop. I.8.

³⁸ Arquímedes utiliza aquí, sin mayor comentario, que si un ángulo de un triángulo es cortado por la mitad, la suma de los lados que lo forman es mayor que el doble de la bisectriz.

³⁹ Obsérvese que la prueba muestra que la espiral es cóncava respecto del origen en cada punto.

⁴⁰ Obsérvese que de las rectas que inciden en la espiral partiendo de O , las que inciden en lo de delante desde C son mayores que OC y las que inciden en lo de detrás, menores.

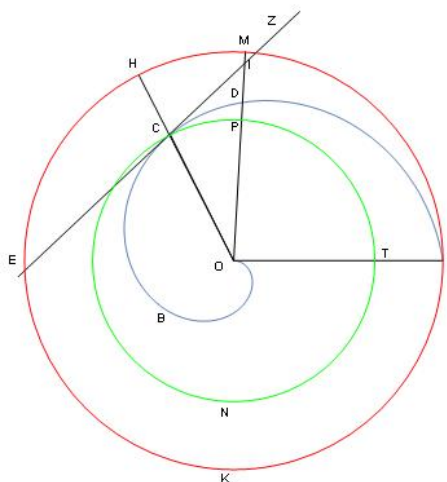


Figura 11. Ángulos determinados por la tangente.

Que el ángulo $\widehat{OCZ}$ no es agudo es evidente, puesto que es mayor o igual que el comprendido entre OC y el arco (CT) y este ya es mayor o igual a un recto. Precisamente el ángulo será recto si EZ es la tangente a la circunferencia CTN en⁴¹ C . Supóngase pues que estamos en ese caso y que ECZ es tangente a la circunferencia CTN . Entonces por el lema 1, dado el arco (CNT) es posible trazar una recta OI desde O hasta la tangente, que cortará a la circunferencia CTN en P y a la espiral en D , de modo que la recta que quede entre la tangente y la circunferencia [PI] guarde con el radio OP de dicha circunferencia una razón menor que la que guarda el arco que queda entre el punto de tangencia C y el punto P con el arco (CNT) . Así

$$\frac{PI}{OP} < \frac{\arccos(CP)}{\arccos(CNT)}$$

y, por tanto,

$$\frac{PI}{OP} + \frac{OP}{OP} < \frac{\arccos(CP)}{\arccos(CNT)} + \frac{\arccos(CNT)}{\arccos(CNT)}$$

Así

$$\frac{OI}{OP} < \frac{\arccos(PCNT)}{\arccos(CNT)}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{OI}{OP} < \frac{\arccos(AKHM)}{\arccos(AKH)}$$

toda vez que las circunferencias CTN y $AKHMA$ son concéntricas y los arcos considerados en cada una de ellas corresponden a los mismos ángulos centrales⁴².

Pero de acuerdo con la propiedad fundamental de la espiral recogida en la proposición 2,

$$\frac{\text{arco}(AKHM)}{\text{arco}(AKH)} = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{OP}$$

y, por tanto, $\frac{OI}{OP} < \frac{OD}{OP}$, lo cual es imposible pues $OI > OD$ ya que, como la espiral es cóncava hacia el origen en cualquier punto, para ir desde O hasta el punto I situado sobre la tangente a la espiral en C , necesariamente hay que cortarla de acuerdo con la construcción realizada.

⁴¹*Elementos*, Prop. III.16, Porisma.

⁴²*Elementos*, Prop. VI.33

Por tanto ECZ no es tangente a la circunferencia CTN y, en consecuencia, el ángulo $\widehat{OCZ}$ es obtuso y el restante $\widehat{OCE}$ será agudo como se quería probar. $\square$

La prueba obviamente puede replicarse para la tangente a la espiral en cualquier giro, por lo que se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3 *Y efectivamente ocurrirá lo mismo si la recta es tangente a la espiral trazada en su segundo giro [o en cualquier otro].*

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el resultado fundamental que permitirá rectificar la circunferencia. Arquímedes hace la demostración utilizando el método de exhaustión, un procedimiento de prueba en el que llegó a ser un verdadero maestro y cuyo máximo exponente de perfección es quizás el teorema que veremos a continuación. La técnica se basa en el conocido principio de exhaustión, que no es otro que la proposición X.1 de *Elementos*: “Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor [o igual] que su mitad, y de la que queda una magnitud mayor [o igual] que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada”. Este resultado está íntimamente conectado con el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y también se atribuye a Eudoxo de Cnido. La importancia de ambos radica en que permiten obtener magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se quiera, evitando las confusas elucubraciones de corte infinitesimal que habían conducido, entre otras paradojas, a las aporías de Zenón de Elea o a las “demostraciones” de la cuadratura del círculo debidas a Antifón de Atenas y a Bryson de Heraclea (ver (González-Urbaneja, 2008, pág. 46-50)).

Los principios de continuidad y de exhaustión hacen innecesaria la utilización de cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, transformando anteriores argumentos imprecisos y vagos en razonamientos rigurosos que anticipan en más de dos mil años la noción de límite del cálculo infinitesimal que no apareció hasta principios del siglo XIX, de la mano de Cauchy y Bolzano, y que no tomó su forma actual hasta los trabajos de Weierstrass en el último tercio de dicho siglo, si bien no puede obviarse que los griegos no identificaban las magnitudes con números reales como se hace en la actualidad. De esta forma la matemática griega consiguió eludir la presencia del infinito actual, proscrito por Aristóteles, sin renunciar a la potencia de técnicas que en la actualidad englobaríamos en el área del análisis matemático. La íntima conexión entre el postulado de continuidad, el principio de exhaustión y los métodos infinitesimales se muestra claramente en los trabajos de Arquímedes para la determinación de longitudes, áreas y volúmenes, lo que ha permitido señalar a este como un brillante precursor de los procedimientos propios del cálculo integral.

El método de demostración por exhaustión, cuyo nombre fue introducido por primera vez por el matemático belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667) en su obra *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum conicæ*, consiste en una doble reducción al absurdo de manera que, para demostrar que dos magnitudes son iguales o que dos figuras son equivalentes, basta probar que una de ellas no puede ser ni mayor ni menor que la otra. Aun cuando es un procedimiento de prueba de un rigor lógico impecable tiene el inconveniente, nada despreciable, de que no da ninguna pista que ilumine el camino que ha seguido el investigador para intuir el resultado que posteriormente se ha probado. Además, al tener que realizar una doble reducción al absurdo, el proceso suele resultar bastante tedioso y difícil de seguir. Por este motivo los matemáticos de los siglos XVI y XVII, aunque reconocían y alababan la perfección de los trabajos de Arquímedes, tendían a eludir la penosidad de las demostraciones por exhaustión y las sustituían por razonamientos de corte infinitesimal habitualmente mucho menos rigurosos.

Veamos ya la proposición 18 del tratado de Arquímedes que permite rectificar la circunferencia y, en consecuencia, cuadrar el círculo.

Teorema 1 *Si OA es la recta primera, A el final del primer giro y si se traza la tangente*

a la espiral en A, la línea recta OB perpendicular a OA desde el principio de la espiral O cortará a dicha tangente en un punto B y la longitud de OB [es decir, la subtangente] será igual a la de la circunferencia del primer círculo.

Demostración. Sea AKC el primer círculo de la espiral. Por la proposición anterior los ángulos que forma OA con la tangente en A son desiguales, siendo agudo el ángulo $\widehat{OAB}$ puesto que es el que está hacia lo de detrás, es decir, del lado contrario hacia donde se produce el giro. Por tanto la recta tangente AC no es paralela a OB y cortará a esta en algún punto B que estará, respecto de OA , en el lado señalado en la Figura 12.

Sea c la longitud de la circunferencia del primer círculo. Hemos de probar que $OB = c$. Supongamos en primer lugar que $OB > c$ y elijamos⁴³ un punto D en OB tal que $c < OD < OB$.

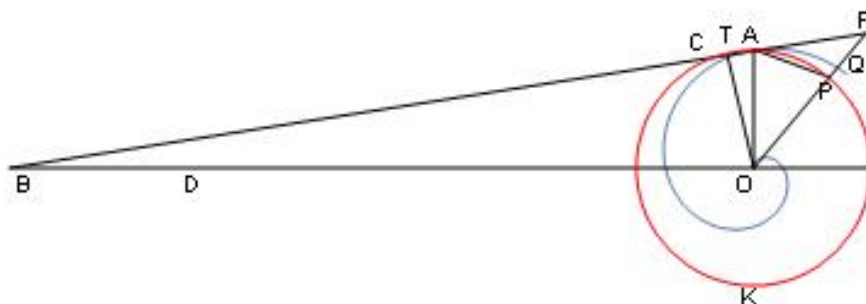


Figura 12. Primer supuesto.

Tenemos, por tanto, un círculo AKC , una cuerda AC de ese círculo menor que un diámetro y $\frac{OA}{OD} > \frac{OA}{OB}$, pues $OD < OB$. Tomamos ahora la perpendicular desde O hasta AC que cortará a la cuerda en T , punto medio del segmento⁴⁴ AC . Se verifica que los triángulos AOB y AOT son semejantes pues el ángulo en el vértice A es común y los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{ATO}$ son rectos⁴⁵. Por tanto se tiene que⁴⁶

$$\frac{OA}{OD} > \frac{OA}{OB} = \frac{AT}{OT}$$

Estamos ahora en condiciones de aplicar el lema 3 para obtener que es posible prolongar la cuerda AC hasta un punto F de manera que la recta que une O con F corte a la circunferencia del primer círculo en un punto P y a la espiral en su segundo giro en un punto Q de forma que

$$\frac{PF}{AP} = \frac{OA}{OD}$$

Ahora bien, como $OA = OP$ se tiene que

$$\frac{PF}{OP} = \frac{AP}{OD} < \frac{\text{arco}(AP)}{c}$$

ya que $AP < \text{arco}(AP)$ y $c < OD$.

Por tanto

$$\frac{OF}{OP} = \frac{OP}{OP} + \frac{PF}{OP} < \frac{c}{c} + \frac{\text{arco}(AP)}{c} = \frac{c + \text{arco}(AP)}{c}$$

⁴³Esta elección siempre será posible en virtud del postulado de continuidad de las magnitudes arquimedianas. Como hemos señalado Arquímedes prueba expresamente este resultado en la proposición 4 del tratado.

⁴⁴*Elementos*, Prop. III.3.

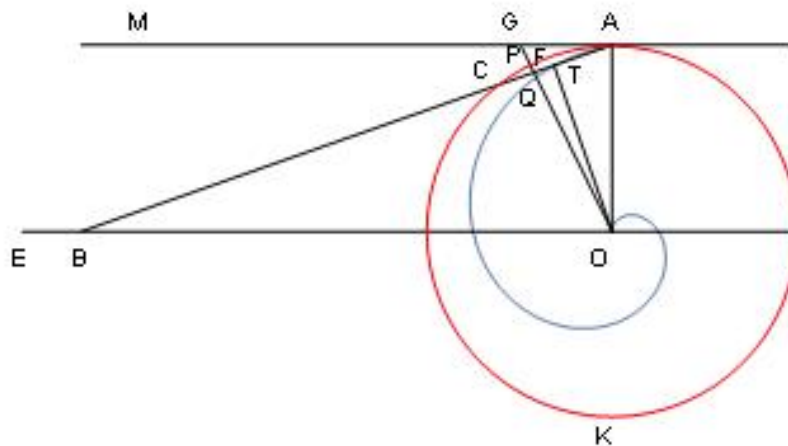
⁴⁵*Elementos*, Prop. I.32.

⁴⁶*Elementos*, Prop. VI.4.

$$\frac{OF}{OP} < \frac{c + \arccos(AP)}{c} < \frac{c + \arccos(AQ)}{c} = \frac{OQ}{OA}$$

Supongamos ahora que $OB < c$ y sea OE medido sobre OB tal que⁴⁷ $OB < OE < c$. Se verifica entonces que $\frac{OA}{OE} < \frac{OA}{OB}$. Razonando como en el caso anterior, dado que los triángulos AOB y AOT son semejantes, donde T es el punto medio de la cuerda AC determinada en el primer círculo por la tangente a la espiral en A , se tiene que

$$\frac{OA}{OE} < \frac{OA}{OB} = \frac{AT}{OT}$$

$$\frac{FP}{AG} = \frac{OA}{OE}$$


Entonces se tiene que⁴⁸

$$\frac{FP}{OA} = \frac{AG}{OE}$$

$$\frac{FP}{OP} = \frac{AG}{OE} > \frac{\arccos(AP)}{c}$$

⁴⁸*Elementos*, Prop. VI.16.

⁴⁹ Arquímedes utiliza aquí que cualquier arco de círculo menor que un cuadrante es menor que la porción de la tangente que va desde el extremo que toca el arco hasta el punto en que corta a la tangente la prolongación del radio.

Por tanto

$$\frac{OF}{OP} = \frac{OP - FP}{OP} = \frac{OP}{OP} - \frac{FP}{OP} < \frac{c}{c} - \frac{\arccos(AP)}{c} = \frac{\arccos(AKP)}{c} = \frac{OQ}{OA}$$

donde la última igualdad se ha obtenido por aplicación de la proposición 2 a las rectas OQ y OA , considerando los puntos A y Q del primer giro de la espiral. Se obtiene así que $\frac{OF}{OP} < \frac{OQ}{OA}$ y como $OP = OA$ se sigue que $OF < OQ$ lo cual es obviamente imposible pues el punto F está sobre la tangente a la espiral en A y, al ser la espiral cóncava en dicho punto hacia el origen, para ir desde O hasta F necesariamente hay que cortarla.

Así OB no puede ser ni mayor ni menor que c , de donde se deduce que es igual. $\square$

A lo largo de la historia este resultado ha sido visto con recelo por muchos matemáticos. En (Rey Pastor y Babini, 1984, pág. 93) se señala que el tratado *Sobre las líneas espirales* es uno de los más difíciles de Arquímedes “por sus largas demostraciones, la concisión de su texto, que subentiende muchas relaciones intermedias, y la aplicación de expresiones en forma geométrica de la suma de términos en progresión aritmética o de sus cuadrados; todo hace su lectura nada fácil, circunstancia que explica que en los siglos XVII y XVIII hubo matemáticos que desistieron de entender este escrito y hasta quien, frente a sus dificultades, prefirió considerar erróneos sus resultados”. Incluso en el siglo XIX el eminente historiador de las matemáticas Guglielmo Libri escribía (Heath, 1981, Vol. II, pág. 556): “Después de veinte siglos de trabajos y descubrimientos, las inteligencias más poderosas siguen chocando con la difícil síntesis del tratado *Sobre las espirales* de Arquímedes”.

Según se señala en (Heath, 1981, Vol. II, pág. 556) el origen de esta concepción podría estar en la siguiente cita de Fontanelle en la *Historia de la Academia de Ciencias* del año 1704: “Son tan largos y tan difíciles de entender [los teoremas del compendio *Sobre las líneas espirales*] que, como pudimos ver en el prefacio del *Análisis de los infinitamente pequeños*, el señor Bouillard admitió que nunca los había entendido bien y que Vieta era injustamente sospechoso de paralogismo porque tampoco había podido entenderlos claramente. Pero todas las pruebas que se pueden dar de su dificultad y su oscuridad incrementan la gloria de Arquímedes; porque qué vigor de espíritu, qué cantidad de puntos de vista diferentes, qué constancia en el trabajo no sería necesaria para desarrollar y ordenar un razonamiento que algunos de los más grandes geómetras no pueden seguir”.

Efectivamente en el prefacio del libro del Marqués de l'Hôpital *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, editado por primera vez en 1696 y por tanto plenamente de actualidad cuando Fontanelle realiza su comentario, se recoge el siguiente párrafo (Marqués-De-L'Hôpital, 1998, pág. 16): “Lo que tenemos de los antiguos sobre estas materias [el estudio de las curvas], principalmente de Arquímedes, es indudablemente digno de admiración. Pero además de que sólo trataron unas pocas curvas y de que las trataron ligeramente, casi en todos lados se refieren a proposiciones particulares y sin orden, que no permiten percibir ningún método regular y coherente. Sin embargo, no se les puede hacer un legítimo reproche; necesitaron una gran cantidad de talento para penetrar a través de tanta oscuridad y para ser los primeros en entrar a regiones totalmente desconocidas. Si no llegaron más lejos, si marcharon por largos trayectos, por lo menos, a pesar de lo que diga Vieta, no se extraviaron”. Como vemos L'Hôpital defiende la corrección de las pruebas de Arquímedes y contradice de pasada a Vieta dando a entender que este habría considerado erróneos determinados resultados. Según se señala en (Heath, 1981, Vol. II, pág. 556-557) la cita de Vieta debe tratarse de un malentendido, pues hay constancia de que este ilustre matemático hizo un estudio específico del tratado de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* y tuvo la mayor admiración por ese trabajo en concreto. Y en general, ninguno de los matemáticos realmente importantes de los siglos XVI o XVII que estudió con detalle la obra de Arquímedes ha expresado jamás una opinión desfavorable sobre esta, ni ha apreciado nunca esa “oscuridad” del genio de Siracusa a la que se refiere Fontanelle.

De lo que sí se quejaron los grandes matemáticos que estudiaron en profundidad la obra de Arquímedes fue de la ocultación por parte de este, que ellos entendían deliberada, de los métodos heurísticos que le habían permitido vislumbrar los extraordinarios descubrimientos que luego demostraba de manera impecable por el método de exhaución. Como se ha señalado anteriormente, el método de exhaución es un procedimiento de demostración que no da ninguna pista sobre la técnica de indagación seguida por el investigador para llegar a la convicción de que el resultado posteriormente demostrado era efectivamente cierto.

Aunque Arquímedes tenía un método de investigación, y lejos de ocultarlo se lo había trasladado a Eratóstenes en su trabajo *El Método*, los matemáticos de los siglos XVI y XVII lo desconocían pues el tratado se había perdido y no fue recuperado sino hasta principios del siglo XX. Esto explica las siguientes palabras de Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las Obras de Arquímedes publicada en Oxford en 1676 (**González-Urbaneja**, 1992, pág. 53): “Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación”. Hoy sabemos que esto no es cierto. Arquímedes no solo no ocultó su procedimiento de investigación, sino que lo dio a conocer con la convicción de su utilidad práctica para todos los que quisieran emplearlo. Así, en el prefacio de su obra *El Método*, escribe a Eratóstenes lo siguiente (**Arquímedes**, 2009, pág. 274-275):

“Probé a escribirte y a definir en este mismo libro la peculiaridad de cierto método mediante el cual, cuando te lo haya proporcionado, te será posible disponer de recursos para poder investigar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica. Estoy persuadido de que esto es no menos útil también para la demostración de estos mismos teoremas, pues algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, porque la investigación por este método carece de demostración; y es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada”. Y un poco más adelante, apostillando estas ideas, añade: “Al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente había hablado en favor de él⁵⁰ –no fuera que les pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas– y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática. Pues sostengo que algunos [matemáticos], bien de los presentes, bien de los venideros, mediante el método que doy a conocer descubrirán incluso otros teoremas que aún no se me han ocurrido”.

Desafortunadamente el teorema que acabamos de probar no está incluido en *El Método*, de manera que no podemos conocer a ciencia cierta cual fue el procedimiento heurístico seguido por Arquímedes para llegar a la conclusión que luego demuestra impecablemente por exhaución, esto es, que la subtangente a la espiral en el punto final de la primera vuelta es igual a la longitud de la circunferencia del primer círculo. En (**Heath**, 1981, pág. 557-558) se especula acerca de esto y se conjetura que Arquímedes debió considerar la dirección instantánea del movimiento del punto P que va describiendo la espiral, usando para este propósito el paralelogramo de velocidades. En todo caso este teorema es, sin duda, uno de los ejemplos más representativos del extraordinario ingenio de Arquímedes para la investigación matemática y de su pericia para la demostración rigurosa de los resultados.

⁵⁰En el prefacio de su obra *Sobre la cuadratura del círculo* había indicado a Dosíteo (**Arquímedes**, 2009, pág. 161) que los teoremas primero los había descubierto por el “método mecánico” y después los había demostrado por el “método geométrico”.

Conclusiones

La espiral de Arquímedes es una de las curvas más interesantes definidas por los matemáticos griegos y tuvo muchas y muy interesantes aplicaciones. En relación con los tres problemas clásicos vino a dar nuevas respuestas a los problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del ángulo, alternativas a las obtenidas con anterioridad utilizando la cuadratriz de Hipias, curva con la que guarda un gran paralelismo. En efecto, ambas se definieron de forma cinemática, mediante una combinación de movimientos uniformes sincronizados, uno de rotación y otro de traslación, las dos fueron ideadas específicamente para resolver el problema de la trisección del ángulo y, posteriormente, también resultaron útiles para abordar el enigma de la cuadratura del círculo.

En el artículo se atribuye a Conón de Samos la invención de esta curva, con objeto de dar una respuesta al problema de la trisección del ángulo diferente a la proporcionada por la cuadratriz, dadas las críticas que la génesis de esta curva podría estar recibiendo en los ambientes alejandrinos. En este sentido se hace notar que, a principios del siglo III a.C., la influencia de Platón en la matemática que se desarrollaba en el Museo de Alejandría debía ser muy fuerte, lo que probablemente contribuyó a desprestigiar el trabajo de un sofista como Hipias y a animar al círculo de Euclides a buscar alternativas a la curva ideada por este. La autoría de Conón sobre la espiral es mencionada de pasada por Papo en la *Colección*, lo que viene a apoyar esta hipótesis, pero otro hecho significativo es que Arquímedes ni siquiera menciona este resultado en su tratado *Sobre las líneas espirales*, lo que refuerza la idea de que esa cuestión debía ser conocida con anterioridad. En esta misma línea se pronuncia Knorr en su clásico trabajo (Knorr, 1978).

El compendio de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* es una de las referencias fundamentales de la matemática antigua, un texto de una gran complejidad técnica magistralmente expuesto por el sabio siracusano. Aun cuando el resultado principal hacia el que se orienta todo el libro es el cálculo del área encerrada por la espiral, nosotros en este artículo ponemos el foco en la proposición 18 del tratado, que permite rectificar la circunferencia y, por tanto, resolver el problema de la cuadratura del círculo. El resultado es una obra maestra de ingeniería matemática cuyo análisis nos permite hacer un recorrido por las técnicas utilizadas en la época para la realización de los diagramas. En este sentido se apunta el rol central que jugó la *neusis* en las construcciones geométricas que realiza Arquímedes en esta obra, poniendo el énfasis en el carácter práctico que para él tenía, como mero dispositivo en los dibujos, y en su despreocupación por las implicaciones teóricas del procedimiento. La utilización de la inserción jugó un papel fundamental en la matemática griega, pero es una técnica ajena a la geometría euclídea siempre remisa al empleo de procedimientos extraños en los diagramas. Este compendio de Arquímedes, probablemente más que ningún otro, supuso una ruptura con la tradición y la norma académica imperante en su época. A pesar de esta singularidad, el genio de Arquímedes fue inmediatamente reconocido por sus contemporáneos lo que favoreció que, tanto estos como sus sucesores, aceptaran en el seno de la matemática procedimientos de dudosa corrección platónica.

En el artículo también se revisa la forma en la que Arquímedes utiliza el principio de continuidad de las magnitudes arquimedianas y la técnica de demostración por exhaustión, dos nociones introducidas por Eudoxo de Cnido, pero que en manos del genio de Siracusa alcanzaron sus más altas cotas de virtuosismo. En este aspecto Arquímedes sí es netamente platónico y siempre tuvo clara la necesidad de probar los resultados de forma rigurosa y precisa o, usando sus propias palabras, por el “método geométrico”. Y ello a pesar de que poseía un depurado método de investigación, que él llamaba “mecánico” y que aparece recogido en su tratado *El Método*, que le permitía anticipar de manera informal los resultados. Pero Arquímedes era plenamente consciente de que esos razonamientos no podían en modo alguno sustituir a la demostración propiamente dicha. Esta actitud, absolutamente conforme

con el quehacer matemático actual, contrasta vivamente con la de los grandes geómetras del siglo XVII que, aunque recuperaron su legado y eran profundos admiradores de su obra, tendían a evitar la penosidad de los rigurosos razonamientos arquimedianos.

Finalmente, en este trabajo se incide en la evolución que se va produciendo en los métodos empleados para definir las curvas, procedimientos en los que la génesis de las mismas va perdiendo importancia frente a la identificación de su *symptoma* o propiedad fundamental, lo que muchos siglos después, expresado en un lenguaje algebraico adecuado, se llamará su ecuación. Aunque los matemáticos helenos estaban muy lejos de la geometría analítica, Papo ya tenía clara la relevancia que en la identificación de cada curva juega lo que él llamaba su “*symptoma* principal”, y así lo pone de manifiesto en la *Colección* donde realiza un estudio sistemático de las tres principales curvas *lineales*, la cuadratriz, la espiral y la conoide, con el propósito específico de darles un estatus respetable en la geometría. En este sentido es importante señalar que la definición de las curvas mediante movimientos no tiene acomodo en la tradición euclídea, fundamentalmente estática, y presentaba además determinados problemas conceptuales que fueron puestos de manifiesto por matemáticos como Esporo de Nicea y de los que se hizo eco Papo en el Libro IV de la *Colección*. Precisamente para superar estas contradicciones el erudito alejandrino resalta el papel esencial del *symptoma* y da un salto de gigante del que probablemente ni él mismo fue consciente pues las limitaciones de su sistema numérico, la inexistencia de un lenguaje algebraico adecuado y el relativamente escaso número de curvas que los griegos consideraron impidieron un avance más significativo en el camino hacia la ecuación. Para alumbrar ese paso decisivo hubo que esperar casi mil quinientos años, los que median entre Papo y Descartes, y un cambio de mentalidad en la investigación que permitió superar por primera vez el inmenso legado griego.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses respecto del contenido de este artículo.

Referencias

- Arquímedes.** (2009). *Tratados II. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García*. Gredos.
- Arquímedes, y Eutocio.** (2005). *Tratados I y Comentarios. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García*. Gredos.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2024). Los dos grandes tesoros de la geometría y el descubrimiento de las magnitudes incommensurables. *Lecturas Matemáticas*, **45**(1), 35–72.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2025a). El descubrimiento de las cónicas por Menecmo <https://doi.org/10.63427/mzyd9698>. *Gaceta de la RSME*, **28**(2), 325–339.
- Ayerbe-Toledano, J. M.** (2025b). Eratóstenes de Cirene, geómetra y geodesta <https://doi.org/10.47101/lull.2025.48.96.ayerbe>. *Lull*, **48**(96), 35–60.
- Diocles.** (1976). *On burning mirrors, The arabic translation of the lost Greek original. Edited, with English Translation and Commentary, by G. J. Toomer*. Springer-Verlag.
- Euclides.** (1991-1994-2008). *Elementos, Vol. I, II y III. Introducción de Luis Vega, Traducción y Notas de María Luisa Puertas Castaños*. Gredos.
- González-Urbaneja, P. M.** (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial.
- González-Urbaneja, P. M.** (2006). *Arquímedes, un sabio de leyenda, en Arquímedes: Obras escogidas. Editor: Antonio J. Durán Guardado. Editado por RSME, ICM, Patrimonio Nacional*.

- González-Urbaneja, P. M.** (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Nivola.
- Heath, T.** (1981). *A history of Greek mathematics, Vol. I y II*. Dover Publications.
- Heath, T.** (2002). *The Works of Archimedes*. Dover Publications, Inc.
- Klein, F.** (1993). *Famous Problems of Elementary Geometry*. In: *Famous Problems and Other Monographs*,. New York, Chelsea Publishing Company.
- Knorr, W. R.** (1978). Archimedes and the spirals: The heuristic background. *Historia Mathematica*, 5(1), 43–75.
- Marqués-De-L'Hôspital.** (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, Introducción y traducción de Rodrigo Cambray Núñez*. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Pappus.** (2010). *Book 4 of the Collection, edited with translation and commentary by Heike Sefrin-Weis*. Springer Verlag.
- Plutarco.** (2006). *Vidas paralelas III, Marcelo, Introducción, Traducción y Notas de Paloma Ortíz*. Gredos.
- Proclus.** (1970). *A commentary on the first book of Euclid's Elements, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow*. Princeton University Press.
- Rey Pastor, J., y Babini, J.** (1984). *Historia de la Matemática, Vol. I*. Gedisa.
- Vera, F.** (1970). *Científicos griegos, Vol. I*. Aguilar.
- Zeuthen, H. G.** (1886). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. reprint Hildesheim 1966.