

Artículo original

La cisoide de Diocles en el contexto de la matemática antigua Diocles' cissoid in the context of ancient mathematics

 J.M. Ayerbe Toledano

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, España

Resumen

Los tres problemas clásicos de la matemática griega son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Estas cuestiones tuvieron una enorme importancia en el progreso de la geometría helena y actuaron como verdaderos polos de interés, guiando la investigación de los grandes matemáticos de la Antigüedad. En este artículo se analiza en su contexto histórico la génesis de la cisoide, una curva concebida específicamente por Diocles para dar una nueva solución al problema de la duplicación del cubo, y se estudia su influencia en el desarrollo de la matemática griega.

Palabras clave: Duplicación del cubo, cisoide, Diocles, Pappo, Proclo, Eutocio.

Abstract

The three classic problems of Greek mathematics are the squaring of the circle, the trisection of the angle and the doubling of the cube. These questions had enormous importance in the progress of Hellenic geometry and acted as true poles of interest, guiding the research of the great mathematicians of Antiquity. This article analyzes in its historical context the genesis of the cissoid, a curve specifically conceived by Diocles to provide a new solution to the problem of doubling the cube, and its influence on the development of Greek mathematics is studied.

Keywords: Duplication of the cube, cissoid, Diocles, Pappus, Proclus, Eutocius.

Citación: Ayerbe Toledano J.M. La cisoide de Diocles en el contexto de la matemática antigua. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(190):198-215, enero-marzo de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3157>

Editor: Clara Helena Sánchez

Correspondencia:

José María Ayerbe Toledano;
jayerbe@us.es

Recibido: 31 de enero de 2025

Aceptado: 14 de marzo de 2025

Publicado en línea: 26 de marzo de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

Introducción

La orientación geométrica que se fue imponiendo en la matemática griega a lo largo del siglo V a. de C. favoreció que desde una época muy temprana se plantearan los tres problemas que, posteriormente, han sido conocidos como los tres problemas clásicos de la geometría griega. Estos problemas no son otros que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

El problema de la cuadratura del círculo se pregunta cómo construir, empleando únicamente rectas y circunferencias, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado (La igualdad de áreas entre dos figuras debe ser entendida en este contexto, con objeto de evitar anacronismos, como la posibilidad de descomponer una de ellas para transformarla en la otra en un número finito de pasos). Por su parte el problema de la trisección del ángulo consiste en determinar la construcción geométrica que permita dividir un ángulo dado en tres partes iguales, empleando como instrumentos de dibujo, como en el caso anterior, tan solo la regla y el compás. Finalmente, el problema de la duplicación del cubo, también conocido como del mesolabio o de Delos, estudia la forma de obtener, también mediante rectas y circunferencias, un cubo de volumen doble al de uno dado. Aunque los tres problemas resultaron ser de imposible solución, en los términos en los que fueron planteados, el extraordinario ingenio de los grandes matemáticos griegos permitió obtener numerosas soluciones de los mismos ampliando el foco de las que eran admisibles.

Una de las técnicas más habituales utilizadas por los geómetras helenos para obtener soluciones de los tres problemas clásicos fue la introducción de nuevas curvas. A diferencia de los *Elementos* de Euclides (En este artículo utilizaremos como referencia de este tratado el texto **Euclides**, 1991, 1994, 2008), obra en la que, siguiendo la tradición platónica, todas las construcciones y diagramas se realizan con la ayuda exclusiva de la regla y el compás y, por tanto, utilizando únicamente rectas y circunferencias, en otros tratados los matemáticos griegos introdujeron un número reducido pero fructífero de nuevas líneas que facilitaron el desarrollo de la actividad investigadora y permitieron resolver problemas que habían permanecido inatacables sin el concurso de estos métodos.

En el orden cronológico la primera curva que se definió, distinta de las rectas y las circunferencias, fue la cuadratriz de Hippias, a finales del siglo V a. de C., con la que se abordó el problema de la trisección del ángulo pero que posteriormente también permitió obtener una solución al problema de la cuadratura del círculo. Ya en el siglo IV a. de C. Menecmo introdujo las cónicas, unas curvas con amplias aplicaciones en la matemática pero que fueron concebidas con el propósito específico de resolver el problema de encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes dadas (Se dice que dos magnitudes A y B son dos medias proporcionales, en proporción continua, entre otras dos C y D si se verifica que $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{D}$) cuestión que, como ya había señalado Hipócrates de Quíos casi un siglo antes de que Menecmo introdujera la parábola, la elipse y la hipérbola, conduce a la solución del problema de la duplicación del cubo si la segunda magnitud se toma doble de la primera. Estas líneas también fueron útiles para encontrar nuevas soluciones al problema de la trisección del ángulo.

En el siglo III a. de C. continuaron los esfuerzos de los matemáticos griegos en torno a los tres problemas clásicos y, con el propósito de resolverlos, se concibieron nuevas líneas de gran interés. Las dos más importantes fueron la espiral de Arquímedes, que permitió solventar los problemas de la trisección del ángulo y de la cuadratura del círculo, y la conoide de Nicomedes que se ideó con el propósito específico de resolver el problema de la trisección del ángulo pero que también resultó útil, como el propio Nicomedes puso de manifiesto, para atacar el problema de la duplicación del cubo.

La Colección Matemática es un compendio formado por ocho libros, de los que se ha perdido el primero y parte del segundo y del último, elaborado hacia el siglo IV de nuestra Era por Pappo de Alejandría, en el se encuentran múltiples referencias y aportaciones a los tres problemas clásicos, estudiándose de manera pormenorizada las curvas introducidas por Hippias, Arquímedes y Nicomedes. En esta obra, superando la limitación platónica, se clasifican los problemas geométricos en planos, sólidos o lineales según que para su solución se precisen construcciones que se ejecuten únicamente con rectas y circunferencias, mediante el uso adicional de las secciones cónicas o con el concurso de otras curvas, respectivamente. De hecho Pappo ya adelanta en *La Colección* un resultado para cuya prueba hubo de esperarse hasta el siglo XIX, esto es, que los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo son sólidos, mientras que la cuadratura del círculo es un problema lineal. Además el maestro alejandrino insistió en que cada problema debe resolverse con el menor aparato matemático posible en el sentido de que, si un problema es plano no serían admisibles las soluciones que utilizaran otras curvas sólidas o lineales mientras que si es sólido, sólo deberían considerarse las respuestas que se materializaran mediante parábolas, elipses o hipérbolas.

Así por ejemplo, en el Libro IV de *La Colección* (Pappus, 2010, pág. 145) Pappo critica duramente, nada menos que a Apolonio y a Arquímedes, por infringir este principio de homogeneidad en alguno de sus resultados:

“Parece ser un grave error en el que caen los geómetras cuando uno descubre la solución de un problema plano mediante el uso de cónicas u otras

líneas o lo resuelve mediante un procedimiento extraño como es el caso con el problema de la parábola en el Libro quinto de las Cónicas de Apolonio o como hace Arquímedes cuando en su tratado Sobre las líneas espirales asume una inserción de carácter sólido con referencia a un círculo; porque es posible sin pedir ayuda a nada sólido encontrar la prueba del teorema dado por Arquímedes.”

El objeto de este artículo es analizar la solución del problema de la duplicación del cubo que se obtuvo mediante la introducción de la última gran curva de la clase lineal ideada en la Antigüedad, la cisoide de Diocles. Efectivamente Papo se refiere varias veces a la cisoide en *La Colección*, dándole la misma consideración que a la cuadratriz, a la espiral y a la conoide. Así, en el Libro III (**Pappus**, 2023, pág. 16) se señala que “De esta clase [de la clase lineal] son las espirales, las cuadratrices, las conoides y las cisoides, las cuales tienen importantes y sorprendentes propiedades”. Sin embargo la cisoide fue ignorada por Papo en el Libro IV de su tratado, en el que se realiza un estudio en profundidad de las otras tres curvas lineales tratándolas de presentar de una forma coherente y ordenada, de manera que se pusiera de manifiesto su interés para la matemática y se pudieran superar las contradicciones derivadas de sus definiciones como movimientos sincronizados. En este artículo se aborda la forma en la que Diocles introdujo la cisoide en su obra *Sobre los espejos ustorios*, con el propósito reconocido de aportar una nueva solución al problema de la duplicación del cubo, se relaciona a la cisoide con el resto de curvas lineales a las que nos hemos referido y se ahonda en los aspectos históricos asociados a estos desarrollos.

La cisoide de Diocles

Diocles pertenece al reducido grupo de brillantes matemáticos griegos denominado en (**Heath**, 1981, Vol. II, pág. 197) como “Los sucesores de los grandes geómetras”, entre los que están Nicomedes, Zenodoro y Gémino que también son citados en este artículo. Probablemente vivió a caballo entre los siglos tercero y segundo antes de Cristo y fue contemporáneo de Arquímedes, Nicomedes y Apolonio, aunque algo más joven que ellos. De su producción científica nos ha llegado la obra *Sobre los espejos ustorios*, que ha sobrevivido en una versión árabe (**Diocles**, 1976). Este texto aborda tres problemas distintos, a saber, el relativo a la mejor configuración de las superficies de cristal para producir fuego mediante la reflexión de los rayos solares, que da título al compendio, una cuestión dejada abierta por Arquímedes en su obra *Sobre la esfera y el cilindro* y el relativo a la duplicación del cubo, problema para cuya solución se introduce la curva cisoide. Dado que los tres problemas son independientes, se ha sugerido en (**Diocles**, 1976, pág. 3) que probablemente se trataba en principio de tres trabajos diferentes de Diocles que fueron reunidos en una única obra en el curso de la transmisión.

La otra fuente principal sobre la creación matemática de Diocles es Eutocio de Ascalón que, en sus Comentarios al Libro II del tratado de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* cita la obra de Diocles tanto en relación con el problema de Delos (ver **Arquímedes & Eutocio**, 2005, pág.366-368) como en su conexión con la cuestión dejada inconclusa por el genio de Siracusa, que se refiere a la posibilidad de encontrar una solución mediante cónicas al enigma de dividir una esfera por un plano de tal forma que los volúmenes de los segmentos resultantes esten en una ratio dada (ver **Arquímedes & Eutocio**, 2005, pág. 408-418). Eutocio recoge en su texto lo fundamental de las pruebas de Diocles sobre estas cuestiones, pero las reformula de acuerdo con los gustos académicos de su tiempo, lo que ha conducido, según se señala en (**Diocles**, 1976, pág. 18), a serios errores de concepto en la evaluación del trabajo de este autor. En esta sección y la siguiente utilizaremos las dos fuentes señaladas en relación con la invención de la curva cisoide y su aplicación a la solución del problema del mesolabio, incidiendo en sus similitudes y diferencias y tratando de no desvirtuar la significación histórica de los conceptos introducidos por Diocles.

Como se señala en (Diocles, 1976, pág. 1-2) de la vida de Diocles sólo se sabe lo que puede inferirse de su tratado *Sobre los espejos ustorios*. En este compendio Diocles aborda, como hemos señalado, un problema dejado incompleto por Arquímedes y menciona a varios autores como Conón y Dosíteo contemporáneos del genio de Siracusa. Por otra parte en la introducción del texto Diocles hace referencia a que lo visitó Zenodoro y a que fue él el que le propuso el problema que da título a la obra. Estas referencias permiten situar a Diocles tanto en el tiempo como en el espacio. En cuanto al tiempo se han propuesto como fechas aproximadas de su nacimiento y muerte, respectivamente, los años 240 y 180 a. C. Por lo que se refiere a su lugar de residencia él mismo nos indica que Zenodoro lo visitó en Arcadia, por lo que podemos deducir que, al menos durante esa etapa, debió vivir en ese lugar.

Entrando ya en materia comenzaremos esta sección probando una propiedad entre segmentos definidos en un círculo dado cualquiera que Diocles recoge como proposición 11 de su tratado *Sobre los espejos ustorios* y que Eutocio incluye en su obra sin modificaciones significativas respecto del original.

Proposición 1 Consideremos una circunferencia de centro O y diámetros perpendiculares AB y GD. Consideremos dos semicuerdas KL y ZC simétricas respecto de GD y normales a AB. Tracemos el segmento KB y denotemos por P al punto en el que esta línea corta a ZC. Entonces se verifica que los segmentos ZC y CB son medias proporcionales, en proporción continua, entre AC y CP, esto es,

$$\frac{AC}{ZC} = \frac{ZC}{CB} = \frac{CB}{CP}$$

Demostración. La situación descrita en el enunciado de la proposición se refleja en la figura 1.

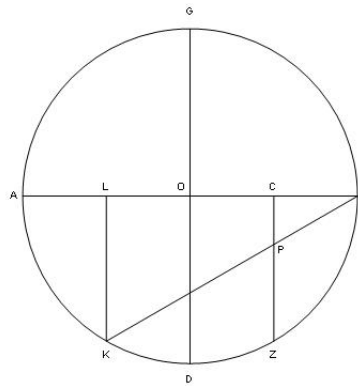


Figura 1. Medias proporcionales en proporción continua.

Dado que los triángulos *BLK* y *BCP* son semejantes (Elementos, Prop. I.32.), se tiene que (Elementos, Prop. VI.4).

$$\frac{LB}{LK} = \frac{CB}{CP}$$

lo cual es equivalente, por simetría, a escribir que

$$\frac{AC}{ZC} = \frac{CB}{CP}$$

Pero por otra parte se tiene que *ZC* es media proporcional entre *AC* y *CB* (Elementos, Prop.

VI.13.), es decir, que

$$\frac{AC}{ZC} = \frac{ZC}{CB}$$

En definitiva se obtiene que

$$\frac{AC}{ZC} = \frac{ZC}{CB} = \frac{CB}{CP}$$

como se quería probar. □

Definición 1 En las condiciones de la proposición anterior, se define la cisoide como el lugar geométrico de los puntos P cuando la semicuerda KL se desplaza desde la posición DO hasta el punto A y, de forma simétrica, la semicuerda ZC se desplaza desde la posición DO hasta el punto B .

De acuerdo con la definición anterior, la cisoide correspondiente al círculo de radio OB comienza en el punto D , finaliza en el punto B y su gráfica es la recogida en la figura 2 (en rojo).

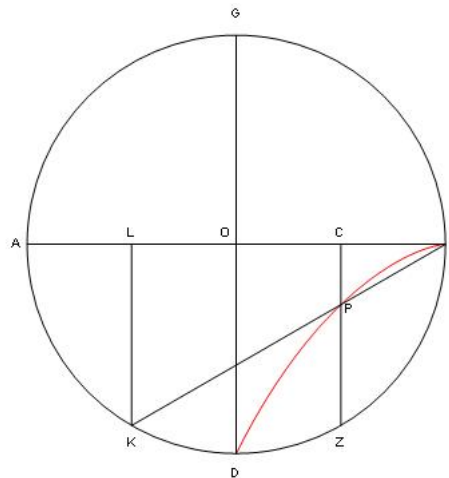


Figura 2. La cisoide.

Su ecuación cartesiana es muy fácil de obtener. Si suponemos que el radio de la circunferencia es a y el punto C tiene de coordenadas $(x_0, 0)$, $0 \leq x_0 \leq a$, entonces la recta que pasa por los puntos K y B será

$$\frac{x - a}{x_0 + a} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \iff (x - a) \sqrt{a^2 - x_0^2} = y(x_0 + a)$$

Y ahora para obtener el punto P de la cisoide basta hallar la intersección de esta recta con el segmento ZC , esto es, con la recta $x = x_0$.

En definitiva, la ecuación de la cisoide correspondiente a la circunferencia de radio a , construida en la forma original ideada por Diocles, es la curva

$$y = \frac{x - a}{x + a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a]$$

No obstante, Diocles no introdujo su curva como un lugar geométrico, sino que, en la proposición 12 de su texto, acomete su construcción en la forma que vamos a ver a continuación. Esta construcción es la misma que realiza Eutocio en **arquimedes**.

Proposición 2 *Construcción de la cisoide.*

Sea $ABGD$ un círculo, con dos diámetros perpendiculares AB y GD . Consideremos en el círculo sucesivos arcos iguales DZ , ZH y HC y dibujemos las perpendiculares a AB desde cada uno de los puntos Z , H y C , obteniendo respectivamente los puntos K , L y M , tal como se indica en la figura 3.

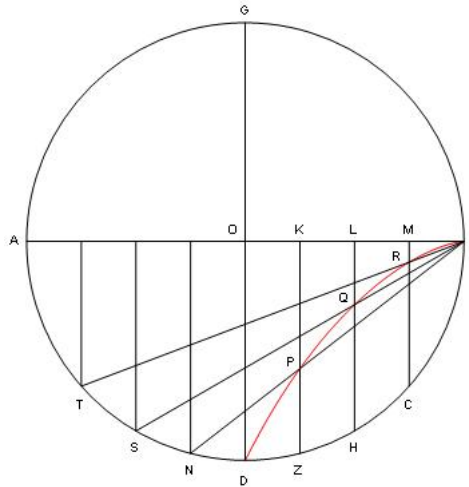


Figura 3. Construcción de la cisoide.

En el otro cuadrante del círculo consideramos los puntos simétricos de Z , H y C a los que llamaremos, respectivamente, N , S y T , obteniendo de esta forma los arcos DN , NS y ST , iguales en tamaño y número a los considerados inicialmente. Finalmente unimos los puntos N , S y T con B . Estas rectas cortarían a ZK en P , a HL en Q y a CM en R .

De acuerdo con la proposición anterior, ZK y KB son medias proporcionales, en proporción continua, entre AK y KP y, por el mismo motivo, HL y LB son medias proporcionales, en proporción continua, entre AL y LQ y CM y MB lo son entre AM y MR .

Si ahora se trazan más paralelas sucesivas entre D y B y se ponen desde D hasta A arcos iguales a los comprendidos entre ellas y desde B se trazan rectas hasta los puntos resultantes, las paralelas entre D y B quedarán cortadas en algunos puntos y trazando rectas entre ellos mediante la aplicación de una regla, tendremos descrita en el círculo una línea en la cual, si tomamos un punto al azar y por él trazamos una paralela a GD , la recta trazada y la comprendida por ella desde el diámetro hasta el punto B serán medias proporcionales, en proporción continua, entre la recta comprendida por ella desde el diámetro hasta el punto A y la parte de ella que va desde el punto en la línea hasta el diámetro. □

Como vemos Diocles define la curva punto a punto, apelando implícitamente para su dibujo a la continuidad de la misma. A este respecto dice textualmente que “trazando rectas entre ellos [entre los puntos que se van obteniendo] mediante la aplicación de una regla, tendremos descrita en el círculo una línea [la cisoide]”. Pero a continuación procede a dar el symptoma de la curva ya que señala que “tendremos descrita en el círculo una línea en la cual, si tomamos un punto al azar y por él trazamos una paralela a GD , la recta trazada y la comprendida por ella desde el diámetro hasta el punto B serán medias proporcionales entre la recta comprendida por ella desde el diámetro hasta el punto A y la parte de ella que va desde el punto en la línea hasta el diámetro”. Esta es, efectivamente, la propiedad fundamental de la cisoide entendida como la relación matemática exacta que cumplen los puntos de la curva y sólo ellos.

Aunque Diocles no incide especialmente en este aspecto, la curva cisoide puede generarse como una combinación de dos movimientos sincronizados. Así, si consideramos dos puntos que parten de D con velocidad uniforme, moviéndose respectivamente por los arcos de circunferencia DA y DB , y en cada instante se trazan las rectas que unen el primer punto con B y el segundo perpendicularmente con el diámetro AB , los puntos de la cisoide se van obteniendo como la intersección de ambos segmentos cuando el primer punto se mueve desde D hasta A y el segundo desde D hasta B . En este sentido la génesis de la cisoide es similar a la de la cuadratriz, la espiral y la concoide por lo que resulta muy llamativo que, como señalamos en la sección anterior, Papo no incluyera en el Libro IV de *La Colección* un estudio detallado de la misma que completara el realizado con las otras tres curvas lineales principales.

Al respecto de esta cuestión, sin perjuicio de otras alternativas que veremos en la última sección, una explicación plausible sería que Papo hubiera renunciado a incluir la cisoide en su estudio de las otras tres curvas lineales por considerar que la presentación de Diocles ya era suficientemente completa. Papo genera la espiral, la cuadratriz y la concoide en el Libro IV de *La Colección* mediante una combinación de dos movimientos sincronizados pero pone el énfasis en que es la propiedad del lugar geométrico la que caracteriza la curva y esta propiedad ya es independiente del movimiento descrito para la génesis. Este es el aspecto en el que fundamentalmente el maestro alejandrino avanza respecto de sus predecesores. En su planteamiento de las curvas lo verdaderamente importante es la determinación de su “propiedad específica” o “symptoma”, es decir, la relación matemática que cumplen los puntos de la curva y sólo ellos y a partir de la cual pueden obtenerse todas sus propiedades. En este contexto la forma de generación de la curva es una cuestión secundaria, casi irrelevante, y lo único importante es su formulación matemática o, como se diría en la actualidad, su ecuación, si bien esta se expresa en una forma retórica al carecerse del álgebra.

Estos elementos están ya presentes en la obra de Diocles. Como hemos visto en la proposición anterior este no pone el énfasis en la generación de la curva, de hecho no se hace ninguna mención específica de los movimientos involucrados, sino que se pone el foco en su propiedad fundamental, que es la que luego va a ser repetidamente utilizada para resolver el problema de la duplicación del cubo como veremos en la próxima sección. De esta forma podemos considerar a Diocles como un claro antecedente de Papo en una concepción de las curvas más “moderna” que la de Arquímedes o Nicomedes, modernidad que hay que entender en el sentido de que se constata una apuesta muy decidida por identificar el symptoma de cada curva, expresarlo en una relación matemática precisa independiente de la génesis de la línea y derivar sus propiedades de él. Dado que la aportación fundamental de la geometría analítica es la identificación de las curvas con las ecuaciones correspondientes, se podría afirmar que las ideas de Diocles y Papo permiten vislumbrar en el horizonte la gran creación de Descartes y Fermat, obra imposible de realizar en el marco de la matemática griega debido al escaso desarrollo del álgebra en este periodo y al reducido número de curvas que se consideraron.

Aplicación de la cisoide al problema de la duplicación del cubo

Una vez construida la cisoide Diocles se aplica en utilizarla para resolver el problema de la duplicación del cubo. Para ello, dada una línea A y una ratio $\frac{B}{C} > 1$, busca una línea X tal que $\frac{X^3}{A^3} = \frac{B}{C}$, con lo que el problema se resuelve si tomamos la ratio dada igual a 2. Obviamente Diocles de esta forma no solo resuelve el problema de la duplicación del cubo, sino que diseña un procedimiento para obtener la arista de un cubo cuyo volumen esté en cualquier ratio respecto del volumen de un cubo de arista dada. La construcción la realiza en la proposición 13 de su tratado.

Proposición 3 Dada una línea A y una ratio $\frac{B}{G} > 1$, existe una línea X tal que

$$\frac{X^3}{A^3} = \frac{B}{G}$$

Demostración. Sean dadas un segmento A y la ratio de una línea B a otra G , siendo $\frac{B}{G} > 1$. Vamos a encontrar en primer lugar una línea S tal que

$$\frac{A^3}{S^3} = \frac{B}{G}$$

Para ello se dibuja un círculo DHZ haciendo su radio igual a A . Sean DZ y HC los diámetros perpendiculares de esta circunferencia tal como se indica en la figura 4. Consideremos en el círculo la línea cisoide CKZ construida como se ha indicado en la sección anterior.

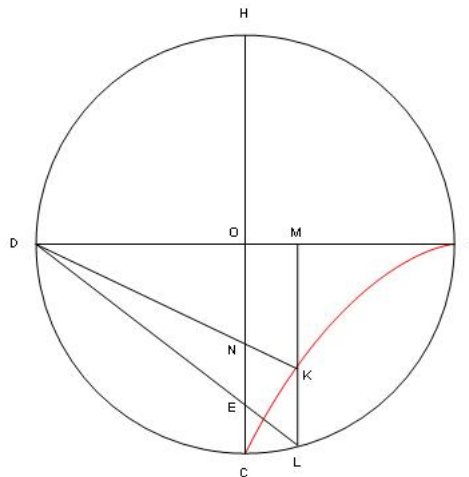


Figura 4. Duplicación del cubo según Diocles.

Dadas las rectas B, G y DO obtengamos una cuarta proporcional (Elementos, Prop. VI.12.) ON de modo que

$$\frac{B}{G} = \frac{DO}{ON}$$

y situemos la línea ON sobre el segmento OC . Dado que $B > G$ sigue que $DO > ON$ (Elementos, Def. V.5.) y, por tanto, el punto N está entre O y C .

Unamos ahora D con N , prolonguemos este segmento hasta cortar a la cisoide en un punto K y tracemos la perpendicular desde K a DZ que cortará a este diámetro en M y a la parte inferior de la circunferencia en L . Tracemos la recta DL y sea E el punto de intersección de esta recta con el diámetro HC . Se verifica que el segmento OE es la línea S buscada.

En efecto, por la construcción de la cisoide se tiene que LM y MZ son medias proporcionales, en proporción continua, entre DM y MK y, por tanto,

$$\frac{DM}{LM} = \frac{LM}{MZ} = \frac{MZ}{MK}$$

Pero cuando cuatro líneas están en proporción continua, la ratio de la primera a la cuarta es igual a la ratio del cubo de la primera al cubo de la segunda (Elementos Def. V.10.), esto es,

$$\frac{DM}{MK} = \frac{DM^3}{LM^3}$$

Por tanto

$$\frac{B}{G} = \frac{DO}{ON} = \frac{DM}{MK} = \frac{DM^3}{LM^3} = \frac{DO^3}{OE^3} = \frac{A^3}{S^3}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la semejanza de los triángulos DON y DMK (Elementos, Prop. I.32 y VI.4.) y la cuarta sigue de la semejanza de los triángulos DOE y DML (Elementos, Prop. I.32 y VI.4.).

Ahora, dadas las líneas S y A , obtenemos una tercera proporcional (Elementos, Prop. VI.11) X , de forma que $\frac{S}{A} = \frac{A}{X}$. Así (Elementos, Prop. VI.17.) $S \cdot X = A^2$ y, en consecuencia, $\frac{X}{A} = \frac{A}{S}$. Por tanto

$$\frac{X^3}{A^3} = \frac{A^3}{S^3} = \frac{B}{G}$$

Tomando ahora $\frac{B}{G} = 2$ obtenemos que $\frac{X^3}{A^3} = 2$ y así el volumen del cubo de arista la línea X duplica al del cubo de arista la línea dada A . \square

A continuación de este resultado Diocles escribe: “Ya que esto es así, vamos a construir un triángulo expresamente preparado para nuestras necesidades, de forma que no tengamos que realizar la construcción correspondiente en cada caso”. Lo que Diocles pretende es construir un triángulo rectángulo isósceles fijo que le permita obtener la línea S sin tener que partir de una circunferencia de radio A que sería, por tanto, diferente para cada valor de A . Esto simplifica de forma notable el problema ya que de esta manera sólo es necesario dibujar una vez la línea cisoide, que será la correspondiente a un círculo de radio la mitad de cualquiera de los catetos del triángulo construido.

Para entender cabalmente la intención de Diocles con este artificio debe llamarse la atención sobre el hecho incuestionable de la dificultad que presentaba en aquella época el trazado de cualquier curva que no fuera una recta o una circunferencia, escollo que está en la base del frontal rechazo de Platón a la utilización de estas líneas. Merece la pena traer a colación aquí la célebre cita de **Plutarco**, 2006, pág. 415) en la que el genio ateniense deplora el uso de instrumentos mecánicos en la geometría, artilugios que fueron utilizados con frecuencia para la realización de diagramas que no podían ser trazados solo con la regla y el compás:

“Platón se indignó y les reprochó [a Eudoxo de Cnido y Arquitas de Tarento] haber destruido y echado a perder la bondad de la geometría al sacarla de lo incorpóreo e inteligible hacia lo sensible y hacerla utilizar elementos corporales que requerían muchos trabajos manuales penosos”.

El hecho de que Diocles considerara necesario detallar en su obra la posibilidad de resolver el problema de Delos utilizando siempre la misma cisoide, independientemente de la magnitud de la arista del cubo cuyo volumen se pretendiera duplicar, muestra hasta qué punto existía en la época una preocupación notable por las dificultades prácticas que planteaba el trazado de las curvas.

La presente construcción la realiza Diocles en la proposición 14 de su tratado.

Proposición 4 *Duplicación del cubo utilizando una cisoide construida sobre un triángulo rectángulo isósceles dado.*

Consideremos un triángulo rectángulo ABG , con ángulo recto en B , en el que los catetos AB y BG son iguales. Tracemos la semicircunferencia ASB y dibujemos las líneas BLS y BNS , donde BLS es la cisoide correspondiente a la circunferencia anterior y BNS es el correspondiente arco de circunferencia.

Sea dada una línea D y la ratio $\frac{E}{Z}$. Aunque Diocles no lo menciona expresamente ha de suponerse que $\frac{AB}{2} < D < AB$ y $\frac{E}{Z} > 1$.

Hacemos ahora $AH = D$ y dibujamos la línea HKN paralela a BG de forma que HK sea una cuarta proporcional (Elementos, Prop. VI.12.) entre E , Z y AH , esto es, verificándose que $\frac{E}{Z} = \frac{AH}{HK}$. Por tanto $AH > HK$ y, en consecuencia, el segmento HK está dentro del triángulo ABG .

Unimos ahora A con K , prolongamos este segmento hasta que corte a la cisoide en un punto L y trazamos la línea MLR paralela a BG , todo ello tal como se indica en la figura 5.

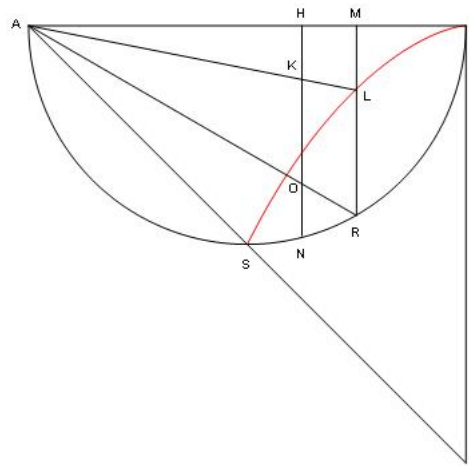


Figura 5. Duplicación del cubo sobre el triángulo rectángulo.

Unimos ahora A con R . Este segmento cortará a HKN en un punto O . Razonando como en la proposición anterior se tiene que:

$$\frac{E}{Z} = \frac{AH}{HK} = \frac{AM}{ML} = \frac{AM^3}{MR^3} = \frac{AH^3}{HO^3} = \frac{D^3}{HO^3}$$

Así HO es la línea S de la proposición anterior. Finalmente, dadas las líneas HO y D y razonando como en dicha proposición, tendremos que el segmento que da la arista del cubo buscado es la tercera proporcional (Elementos, Prop. VI.11.) X de las dos magnitudes anteriores. \square

Observemos que la construcción no es posible si $D > AB$. En este caso Diocles señala que debemos dividir D por la mitad tantas veces como sea necesario hasta que sea menor que AB . Una vez hecho esto y obtenido por el procedimiento anterior el segmento HO , bastará duplicarlo el mismo número de veces que antes se dividió D por la mitad para obtener la línea requerida. Aunque Diocles no lo menciona expresamente, también es necesario que $\frac{AB}{2} < D$. En el caso de que no lo fuera sería necesario duplicar D el número de veces necesario hasta que exceda dicho número y razonar de forma análoga a lo indicado anteriormente.

Finalmente Diocles sí apunta que la prueba funciona y es la misma en el caso de que los puntos K y O estén al otro lado de la semicircunferencia ASB , como se señala en la figura 6.

En este caso también se tiene que

$$\frac{E}{Z} = \frac{AH}{HK} = \frac{AM}{ML} = \frac{AM^3}{MR^3} = \frac{AH^3}{HO^3} = \frac{D^3}{HO^3}$$

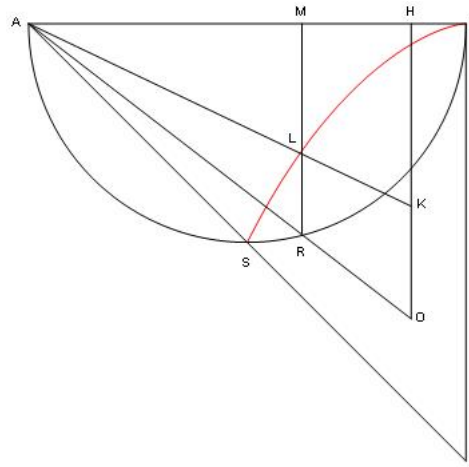


Figura 6. Otra posibilidad en la duplicación del cubo.

Vamos ahora a aplicar la cisoide para resolver el problema de la duplicación del cubo tal como lo hizo Eutocio en (Arquímedes & Eutocio, 2005, pág. 366-368). El maestro de Ascalón, aunque atribuye el resultado a Diocles sin mayores comentarios, no reproduce la prueba que acabamos de ver sino que lo que hace es, utilizando dicha curva, obtener dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes A y B dadas. De acuerdo con el relato que Eutocio atribuye a Eratóstenes sobre la historia del problema de Delos, fue Hipócrates de Quíos, como hemos señalado, el primero que advirtió que para resolverlo la clave era encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos cantidades, de las cuales la mayor debía ser doble de la más pequeña.

De la recopilación que realiza Eutocio en (Arquímedes & Eutocio, 2005, pág. 359-388) de todas las soluciones que se habían ideado para dar respuesta a esta cuestión, se pone de manifiesto el gusto de la época en cuanto a la forma de presentarlas. Siempre que es necesario Eutocio modifica la prueba original y reduce el problema a encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre dos magnitudes dadas. Así lo hace en particular en el caso de Diocles, atribuyendo directamente a este la demostración que vamos a ver a continuación, prueba que efectivamente utiliza la cisoide pero que, en sentido estricto, no coincide con la original recogida en *Los espejos ustorios*.

Proposición 5 *Encontrar dos medidas proporcionales R y S , en proporción continua, entre dos magnitudes dadas A y B , $A > B$.*

Demostración. Consideremos un círculo de centro en un punto O y de radio $A = OD$ y situemos la magnitud $B = OQ$ tal como se indica en la figura 7.

Dibujemos la cisoide CPE definida sobre este círculo y prolonguemos el segmento DQ hasta que corte a la cisoide en el punto P . Tracemos entonces la semicuerda MN que pasa por P y es paralela a OE y perpendicular a DC .

Se verifica, en virtud de la semejanza de los triángulos DOQ y DMP (Elementos, Prop. I.32 y VI.4.), que

$$\frac{A}{B} = \frac{OD}{OQ} = \frac{DM}{MP}$$

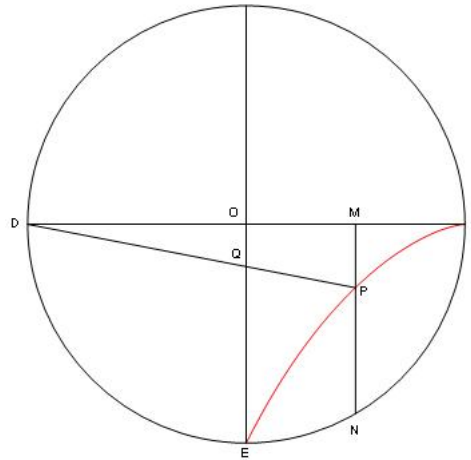


Figura 7. Duplicación del cubo según Eutocio.

y por la proposición 1 se tiene que MN y MC son medias proporcionales, en proporción continua, entre DM y MP , esto es,

$$\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{MC} = \frac{MC}{MP}$$

De las dos relaciones de igualdad anteriores sigue que

$$\frac{A}{R} = \frac{R}{S} = \frac{S}{B}$$

siendo R y S las cuartas proporcionales (Elementos, Prop. VI.12.) de las magnitudes DM , A y MN y MP , B y MC , respectivamente. En definitiva R y S son las dos medias proporcionales, en proporción continua, entre las magnitudes A y B que estábamos buscando.

La influencia de la línea ideada por Diocles en la matemática antigua

La influencia en la matemática antigua de la curva creada por Diocles y de su aplicación para resolver el problema de la duplicación del cubo incluida en su trabajo *Sobre los espejos ustorios* es una cuestión que aún hoy permanece muy abierta a la especulación, dada la escasez de datos que tenemos al respecto. Como se señala en (Diocles, 1976, pág. 18) “no hay ninguna referencia a Diocles ni ninguna señal de influencia de su trabajo en la literatura griega que ha sobrevivido hasta muy tarde en la antigüedad”. En efecto, la única referencia directa que tenemos de Diocles se la debemos a Eutocio y data del siglo VI de nuestra Era una época muy tardía si tenemos en cuenta que Diocles fue posiblemente contemporáneo de Arquímedes, Nicomedes y Apolonio y desarrolló su trabajo entre los siglos III y II a. de C. En particular, no hay ninguna referencia a Diocles ni en *Los Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo de Licia ni en *La Colección Matemática* de Papo, que son dos de las fuentes principales de nuestro conocimiento de la historia de la matemática griega.

La falta de referencias directas a Diocles en Proclo y Papo es sumamente sorprendente ya que el maestro arcadiano debió ser un matemático importante en su época. Esto está acreditado no sólo porque su obra resultó lo suficientemente atractiva como para que fuera traducida al árabe y conservada para la posteridad en este idioma, lo que ya de por sí es

muy relevante, sino también porque los temas que trata demuestran su plena integración en las corrientes científicas de su tiempo. Además, las referencias a Dosíteio, Arquímedes o Conón, y el hecho de que lo visitara Zenodoro en Arcadia para proponerle el problema que da título al compendio *Sobre los espejos astorios* demuestran que no era una persona que trabajara de forma individual y aislada, sino que era estimado por sus colegas y estos lo consideraban un matemático solvente hasta el punto de que merecía la pena el esfuerzo, considerable e incluso peligroso en aquella época, de desplazarse hasta su residencia para discutir con él problemas abiertos de interés común. Así que cabe preguntarse, si Diocles fue un matemático relevante y conocido, ¿porqué no lo mencionan Proclo y Papo?

Esta falta de referencias directas a Diocles llama la atención especialmente si tenemos en cuenta que las citas históricas en los dos textos mencionados son muy frecuentes. Tanto Proclo como Papo suelen enmarcar sus aportaciones y comentarios sobre los temas que tratan en su contexto histórico, dando cuenta de los personajes que tuvieron relación con los mismos y atribuyendo a matemáticos concretos los diferentes resultados que prueban o analizan. Así, por ejemplo, ciñéndonos tan sólo a las referencias que se hacen sobre las otras curvas lineales mencionadas en este artículo, Proclo señala en (**Proclus**, 1970, Comentario 272, pág. 212) que “Nicomedes hizo uso de sus concoides -una forma de líneas cuya construcción, clases y propiedades el nos ha enseñado, siendo él mismo el descubridor de sus peculiaridades- y así tuvo éxito en trisecar un ángulo rectilíneo cualquiera. Otros han hecho lo mismo con la cuadratriz de Hipias y de Nicomedes [...]. Y todavía otros han comenzado desde las espirales de Arquímedes y han dividido un ángulo rectilíneo dado en una ratio dada.” Por su parte Papo vincula, en el Libro IV de *La Colección*, la espiral con Arquímedes y Conón, la concoide con Nicomedes y la cuadratriz con Dinostrato y Nicomedes, haciendo continuas referencias explícitas a las personas a las que se atribuye la creación de estas curvas.

Sin embargo, a pesar de que ambos textos aluden a la cisoide, ninguno de los dos eruditos hace referencia alguna a Diocles asignándole el mérito de la creación de la curva, como le correspondería y resultaría coherente tanto con el modo de proceder respecto de otros geómetras como con la forma habitual de presentar los temas. Una posible explicación de esta aparente paradoja, quizás la más natural, podría ser que la obra de Diocles se hubiera perdido y, en consecuencia, fuera desconocida para Proclo y Papo y estos solo tuvieran referencias de la cisoide por otros autores, ignorando el nombre de la persona a la que correspondía su creación. Esta posibilidad viene también avalada por el hecho de que en ninguno de los dos tratados se vincula la cisoide con ningún matemático, al contrario de lo que se hace con las otras tres curvas lineales mencionadas, lo que refuerza la idea de que ambos autores desconocían a quien debía atribuirse el origen de la línea.

Si este fuera el caso habría que convenir que el libro de Diocles debió traspapelarse, posiblemente en la inmensa biblioteca de Alejandría, y que posteriormente habría caído en manos de Eutocio de forma más o menos casual, porque las fuentes que este último tuvo a su disposición no debieron diferir mucho de las que pudieron consultar Papo o Proclo como se apunta en (**Cuomo**, 2000, pág. 136-137). Esta posibilidad no debe desdeñarse pues en la antigüedad era habitual reutilizar el material empleado en obras anteriores, lavándolas previamente y escribiendo encima el nuevo texto. De esta forma pudo quedar oculto durante siglos el compendio de Diocles hasta su recuperación por Eutocio o por algún investigador o bibliotecario de esa época. Precisamente esto es lo que le sucedió al tratado de Arquímedes *El Método*. Una copia de esta obra, junto con otros trabajos del genio siracusano, estuvo enterrada durante casi mil años en un palimpsesto conservado en la colección de manuscritos de la biblioteca del monasterio de Saint-Savas en Palestina hasta que fue recuperada milagrosamente por el historiador de la ciencia danés J.L. Heiberg, a principios del siglo XX, después de un heroico esfuerzo de reconstrucción.

Al respecto de la falta de referencias a Diocles podría haber, no obstante, otra explicación plausible e independiente de la anterior, concretamente que la curva que Proclo y Papo

denominan “cisoide” no fuera en realidad la ideada por el maestro arcadiano. Si este fuera el caso quedaría entonces abierto el problema de identificar la curva que tuvo esa denominación en la Antigüedad. Si bien se deja claro que son muy pocos los autores que dan crédito a esta opción, en (Diocles, 1976, pág. 24) se apunta, citando a Tannery, a la posibilidad de que la antigua cisoide fuera una epicycloide o hipocicloide. En cualquier caso esta hipótesis entendemos que no explicaría porqué Papo no incluyó la cisoide en el estudio de las otras tres curvas lineales que realiza en el Libro IV de *La Colección*, aspecto al que nos hemos referido en la sección segunda. En efecto, aunque la antigua cisoide no fuera la línea ideada por Diocles, lo que sí queda claro de la lectura de los textos de Proclo y Papo es que esta curva, fuera cual fuese, reunía las características de similitud con la espiral, la conoide y la cuadratriz que parecían aconsejar su inclusión en un estudio conjunto de las mismas.

El problema sobre el origen del nombre “cisoide” aplicado a la curva ideada por Diocles ha sido planteado explícitamente en (Diocles, 1976, pág. 24) e indudablemente resulta muy interesante desde el punto de vista histórico. Lo primero que debe señalarse es que ni Diocles en su obra *Sobre los espejos ustorios* ni Eutocio en sus Comentarios al Libro II del texto de Arquímedes *Sobre la esfera y el cilindro* le ponen nombre a la línea. Es decir, en esos dos textos se identifica claramente la curva definida por Diocles pero no se le da ningún nombre específico.

En sentido contrario, como ya hemos señalado, ni Proclo en (Proclus, 1970) ni Papo en *La Colección* citan a Diocles, a pesar de que ambos se refieren repetidamente a la cisoide. O sea, en estos dos compendios se menciona expresamente una curva denominada “cisoide” pero no se describe exactamente ni se la relaciona con ningún matemático concreto.

Tanto una cosa como la otra resulta desde luego muy llamativa. Si el nombre “cisoide” estaba asociado a la curva de Diocles desde la Antigüedad, ¿cómo es que no lo utilizó Eutocio en ningún pasaje de su Comentario escrito en el siglo VI de nuestra Era? ¿Porqué cuando se refiere a la cisoide emplea el circunloquio “la línea de Diocles”, como hace en (Arquímedes & Eutocio, 2005, pág. 370), y no utiliza directamente una denominación que, en este supuesto, estaría plenamente aceptada desde muchos siglos atrás? Y por otra parte, tanto Proclo como Papo se esfuerzan en sus obras, como hemos indicado, por atribuir a sus predecesores los descubrimientos que realizaron y por dar una visión panorámica de la historia de la geometría griega. Son múltiples los ejemplos que se pueden poner en los que cada uno de ellos asigna a un personaje concreto la autoría de algún avance en la investigación matemática. Sin embargo, los dos se olvidaron de asignar a Diocles la reacción de la cisoide. Desde luego resulta muy extraño y por ello no debe sorprender que se señale en (Diocles, 1976, pág. 24) que “Yo [Toomer] por tanto considero altamente improbable que el nombre cisoide fuera alguna vez aplicado en la antigüedad a la curva de Diocles”.

Aunque las dudas que acabamos de expresar son consistentes no pueden considerarse en modo alguno definitivas y, de hecho, nosotros pensamos, como argumentaremos a continuación, que también hay motivos para mantener la postura contraria. El término “cisoide” quiere decir en griego “en forma de hiedra” y es posible que fuera acuñado por Gémino de Rodas un matemático y astrónomo que vivió en el siglo I a. C y al que nos hemos referido al principio de la sección segunda como uno de los sucesores de los grandes geómetras. En (Heath, 1981, Vol. II, pág. 222-234) se estudia con cierto detalle la obra de este importante científico y se le atribuye un tratado ahora perdido que, bajo el título de *La Doctrina o Teoría de las Matemáticas*, podría haber contenido un amplio rango de materias distribuidas en un número considerable de Libros que habrían sido diseñados con el propósito específico de dar una visión completa de las matemáticas de su época.

La atribución del nombre “cisoide” a Gémino no está avalada por ningún documento de la época pero resulta plenamente plausible dado que el genio de Rodas estudió en profundidad las curvas disponibles en su tiempo e hizo una completa clasificación de las mismas. De hecho, la principal fuente para conocer la clasificación de las curvas realizada por Gémino son los

Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides de Proclo y precisamente en ese texto (**Proclus**, 1970, Comentario 127, pág. 102) y en el marco de una detallada descripción de esta clasificación se recoge la siguiente cita en la que se explica el origen del nombre “cisoide” aplicado a esta curva: “Siempre que las líneas cisoideas convergen a un único punto, como hacen las hojas de hiedra (en efecto las cisoideas reciben su nombre de esta semejanza), forman un ángulo, uno obviamente contenido entre líneas mixtas”. Así Proclo apunta que la denominación “cisoide” estaría vinculada a las características derivadas de la propia clasificación de la curva y está acreditado que esta fue realizada por Gémino por lo que resulta natural deducir, dado que Diocles no puso nombre a la curva, que lo hiciera el maestro de Rodas.

Proclo invoca reiteradamente la autoridad de Gémino para la clasificación de las curvas en (**Proclus**, 1970). Así, en (**Proclus**, 1970, Comentario 113, pág. 92) señala que el genio de Rodas mostró cómo se generan las espirales, las concoideas y las cisoideas y, refiriéndose expresamente a la cisoide, en (**Proclus**, 1970, Comentario 111, pág. 90-91) indica que la clasificó como una curva no compuesta que determina una figura y como una línea mixta plana. Aunque en (**Heath**, 1981, Vol. I, pág. 264) se deduce de aquí sin mayores comentarios que esta curva es la inventada por Diocles, causa extrañeza que Proclo se refiera a ella como una curva que “determina una figura”, esto es, como una curva cerrada.

A este respecto merece la pena señalar que las curvas no compuestas, como la cisoide, se clasifican, según señala Proclo remitiéndose a Gémino, de dos formas diferentes. Por un lado pueden dividirse entre las que forman figuras y las que se extienden indefinidamente. Y atendiendo a un segundo criterio, en simples y mixtas según que sea una línea recta o un círculo o una mezcla de los dos. Por lo que se refiere a la primera clasificación Proclo cita, entre las que forman figuras, al círculo, a la elipse y a la cisoide, mientras que entre las que se extienden indefinidamente menciona a la parábola, la hipérbola, la concoide, la línea recta “y todas las de ese tipo”. Dado que la cisoide es una curva no compuesta en el sentido señalado por Gémino, pero de acuerdo con la definición de Diocles no se extiende indefinidamente, pues sólo se considera el arco que está contenido en el círculo correspondiente, parece plausible que para poder clasificarla en el grupo de las que determinan una figura se contemplara la curva conjuntamente con la circunferencia que la contiene en alguna forma que permitiera considerarla como una curva cerrada.

La opción más sencilla sería considerar el óvalo que se obtiene uniendo a la cisoide el arco de la circunferencia determinado por sus extremos. Esta conjetura podría venir avalada por el hecho de que el propio Diocles en su obra *Sobre los espejos ustorios* (**Diocles**, 1976, pág. 106), cuando está describiendo la forma de resolver el problema de Delos utilizando un triángulo rectángulo isósceles previamente preparado al efecto (ver figura 5), escribe lo siguiente: “Nosotros también dibujamos dos líneas BLS , BNS , de las cuales BNS es un segmento de la circunferencia de un círculo y BLS es la línea previamente mencionada [la cisoide]”. De ahí a identificar la cisoide con la curva producida por la unión de ambos arcos sólo hay un paso, avance que es plausible que diera Gémino para poder clasificar adecuadamente esta línea en la categoría de las no compuestas que forman una figura. También se refiere Diocles en otro pasaje de su compendio (**Diocles**, 1976, pág. 104-105) al dibujo de las dos líneas que forma la propia cisoide y el arco de la circunferencia complementario del citado en el caso anterior, esto es, el arco BGD de la figura 3. En este supuesto habría que concluir que Gémino y su cisoide serían un claro antecedente del logotipo de la marca “Apple”. Sin embargo estos dos casos creemos que deben ser descartados porque como hemos comentado Proclo señala que el ángulo formado por la cisoide en sus puntos singulares está limitado por líneas mixtas y, en las opciones consideradas, una de ellas no lo sería al tratarse de un arco de circunferencia. Y además es que el erudito de Licia se refiere un poco antes precisamente a esa posibilidad, al indicar en (**Proclus**, 1970, Comentario 127, pág. 102) lo siguiente: “De esos [ángulos] sobre planos algunos están contenidos [limitados] por líneas simples, otros por mixtas y otros por las dos combinadas. En la elipse, por ejemplo, se forma un ángulo entre el eje y la frontera de la elipse. Una de estas líneas es mixta y la otra simple. Y si un círculo corta una elipse, se obtendrá un ángulo contenido por su

circunferencia y la frontera de la elipse”. Sin embargo en el caso de la cisoide deja claro que el ángulo se forma, “obviamente”, entre líneas mixtas.

Descartadas las dos posibilidades anteriores, quedan sin embargo otras opciones. La primera y más probable sería añadir el semicírculo superior a las dos cisoides que se forman en el inferior, lo que refuerza la forma de hiedra y es una alternativa ya sugerida por algunos autores, pero también pueden contemplarse otras disyuntivas como las cuatro cisoides que determinan los diámetros principales del círculo o las dos cisoides anteriores unidas por el diámetro horizontal del círculo. Si bien en (**Diocles**, 1976, pág. 24) se considera la primera de las posibilidades citada “increíble” y “matemáticamente absurda”, nosotros entendemos que podría tener sentido para clasificar adecuadamente la curva cisoide dentro de las no compuestas que forman una figura. Estas opciones son plenamente compatibles con las características de la curva cisoide que va desgranado Proclo en su compendio, esto es, que se trata de una curva no compuesta y mixta plana, que forma una figura, literalmente “de las que vuelven sobre sí mismas”, y que en su punto singular, entendido este como el punto en el que convergen las dos cisoides, forma un ángulo contenido entre líneas mixtas. También tendría sentido la afirmación recogida en (**Proclus**, 1970, Comentario 128, pág. 103): “Incluso la cisoide, una única línea, puede hacer un ángulo [...]. Llamamos cisoide a la línea como un todo, no a sus partes (pues entonces podemos decir que son las partes convergiendo entre sí las que forman el ángulo)”.

Esta interpretación permite sostener que en la Antigüedad las referencias a la cisoide lo son a la curva ideada por Diocles, al contrario de lo que se especula en (**Diocles**, 1976), aunque pudiera considerarse como una curva cerrada en base a la observación realizada, y explicaría que en los siglos XVI y XVII los matemáticos que la estudiaron profusamente identificaran de manera natural la línea cisoide a la que se refieren Papo y Proclo con la curva descrita por Diocles sin mayores comentarios.

De acuerdo con esta hipótesis la consideración de la cisoide como una curva cerrada habría venido motivada por la necesidad de clasificarla coherentemente en el grupo de las líneas no compuestas pero en los siglos XVI y XVII, una vez que la categorización de Gémino fue superada, no había necesidad de seguir recurriendo al artificio de ensamblar de alguna manera la curva de Diocles con la circunferencia que la contiene.

Volviendo a la posible influencia de la obra de Diocles sobre otros autores de la etapa griega y, en particular, sobre Papo, merece la pena señalar que este escribió en el Libro III de *La Colección* (**Pappus**, 2023, pág. 17-24) un amplio comentario sobre el problema de la duplicación del cubo, incluyendo una detallada exposición de las soluciones ideadas por Eratóstenes, Nicomedes y Herón. Además añade una última solución que el mismo señala que es “encontrada por nosotros mismos”, con lo que se atribuye la autoría. Aunque no hay en el texto ninguna referencia a la solución de Diocles que vimos en la sección anterior, Eutocio apunta en su Comentario (**Arquímedes & Eutocio**, 2005, pág. 370) que “esta construcción [la de Papo] es la misma que la indicada por Diocles”, lo que plantea de nuevo la cuestión de si Papo era conocedor o no de las aportaciones de Diocles.

Dar una respuesta convincente a esta cuestión no resulta fácil. En (**Cuomo**, 2000, pág. 147-148) se resta importancia a las similitudes señaladas por Eutocio y se afirma que basta un análisis superficial de ambas pruebas para comprobar que no son la misma, más allá de que las dos se materializan en el círculo, y que sólo pueden encontrarse entre ellas vagas semejanzas. Sin embargo nosotros pensamos que, si bien las construcciones de Papo y Diocles son lo suficientemente diferentes como para que resulte plenamente plausible que hayan sido obtenidas de forma independiente, ambos diagramas presentan interesantes conexiones derivadas del hecho de que en la construcción del maestro alejandrino se determina un punto que juega un papel fundamental y que está en la correspondiente cisoide ya que, como se pone de manifiesto en la propia demostración, verifica el *symptoma* de la línea de Diocles. Por tanto creemos que no puede descartarse que Papo se inspirara en el trabajo del maestro arcadiano, aunque no

lo mencionara explícitamente. Respecto de esta omisión cabe señalar que las cuestiones de autoría parece que no tenían para los griegos el mismo significado que para nosotros. Así en (Cuomo, 2000, pág. 146) se apunta que:

“Deberíamos ser cuidadosos, no obstante, al aplicar nuestra noción de originalidad al contexto del trabajo de Papo. Incluso anunciando una solución encontrada por nosotros mismos no puede descartarse la posibilidad de que pudiera estar basada en resultados de otras personas. El toque personal podría haber sido una ligera modificación: un énfasis sobre características particulares, o decir explícitamente qué instrumento estaba siendo empleado, cuando esto no estuviera especificado en la demostración”.

Y precisamente por estas dificultades se concluye en (Cuomo, 2000, pág. 148) diciendo que: “En suma, el caso de la dependencia de Papo sobre Diocles permanece, en mi opinión, abierto - se puede probar tanto que hay dependencia como que no”, sentencia con la que nosotros estaríamos de acuerdo pues, aunque vemos claras relaciones entre las construcciones de Papo y Diocles, estas no serían suficientes como para poder asegurar, con un grado de convicción razonable, que el primero se apoyó en el trabajo del segundo.

Conclusiones

Los tres problemas clásicos de la geometría griega, aunque eran de imposible solución en los términos en que fueron planteados, resultaron ser una fuente inagotable de inspiración para casi todos los geómetras relevantes de la Antigüedad y, una vez acabada esta etapa, para muchos matemáticos posteriores, hasta que en el siglo XIX pudo probarse la inutilidad de tal empeño. En la búsqueda de soluciones jugó un papel fundamental la introducción de nuevas curvas, distintas a las rectas y a las circunferencias, y la aparición de éstas abrió las puertas a nuevos campos de conocimiento e investigación.

La cisoide de Diocles es una de las curvas más interesantes definidas por los matemáticos griegos y tiene muchas y muy interesantes aplicaciones. En relación con los tres problemas clásicos vino a dar una nueva respuesta al problema de la duplicación del cubo, alternativa a las obtenidas con anterioridad utilizando las cónicas o la conoide. La cisoide, como señala Papo en La Colección, es una curva de la clase lineal, como la cuadratriz de Hipias, la espiral de Arquímedes y la conoide de Nicomedes. Sin embargo el erudito alejandrino no la incluyó en el Libro IV de su tratado en el que hace un estudio sistemático de las otras tres.

En el artículo se analiza con detalle el procedimiento seguido por Diocles para construir la curva, poniendo el énfasis en las similitudes que presentan su concepción y la de Papo. En este sentido se apunta que Diocles habría dado ya pasos significativos en la identificación de la curva con su *symptoma* o propiedad fundamental, adelantándose varios cientos de años a aquel.

Asimismo se estudia el procedimiento seguido por Diocles para obtener una solución al problema de la duplicación del cubo, comparando las dos fuentes de las que disponemos, el compendio Sobre los espejos ustorios del propio Diocles y el Comentario de Eutocio al Libro II de la obra de Arquímedes Sobre la esfera y el cilindro, lo que permite observar la evolución operada por este en la presentación del resultado para adecuarla a los gustos académicos del siglo VI d. C.

Finalmente se estudia la influencia de la línea de Diocles en la matemática griega. Sobre este particular se sostiene que la pátina de silencio que se cierne sobre la obra de Diocles desde que fue concebida hasta su recuperación por Eutocio de Ascalón en el siglo VI sugiere, como opción más plausible, que el compendio Sobre los espejos ustorios debió estar perdido durante un amplio lapso de tiempo en los primeros siglos de nuestra Era. Esto explicaría la ausencia de menciones específicas a Diocles tanto en Papo como en Proclo, omisiones que creemos que no se habrían producido de haber estado disponible el tratado del maestro arcadiano para estos autores.

Sin embargo, parece menos probable, con los datos que poseemos, que el nombre “cisoide” fuera utilizado en la Antigüedad para designar una curva diferente a la de Diocles, sin perjuicio de que se hubieran perdido las referencias precisas a su creador, dado que la curva que Proclo y Papo denominan de esta forma parece reunir las características de la línea de Diocles si tenemos en cuenta la interpretación que hemos realizado. Además, si no se acepta este punto de vista y se considera que no hay razones de peso para relacionar la curva cisoide mencionada por estos dos eruditos con la ideada por Diocles, entonces habría que concluir que la identificación de ambas líneas en los siglos XVI y XVII se hizo en base a otras consideraciones. Teniendo en cuenta la cantidad de importantes matemáticos que contribuyeron en esa etapa a la recuperación del legado clásico, una actuación de esa naturaleza hubiera provocado probablemente alguna discusión al respecto que se habría recogido en documentos de la época disponibles en la actualidad. Y la realidad es que no se ha encontrado hasta la fecha ninguna referencia en este sentido.

Conflicto de intereses

El autor declara no tener conflicto de intereses respecto del contenido de este artículo.

References

- Arquímedes & Eutocio.** (2005). *Tratados, Vol. I. Introducción, traducción y notas de Paloma Ortiz García.* Gredos.
- Cuomo, S.** (2000). *Pappus of Alexandria and the Mathematics of late Antiquity.* Cambridge University Press.
- Diocles.** (1976). *On burning mirrors, The arabic translation of the lost Greek original. Edited, with English Translation and Commentary, by G. J. Toomer.* Springer-Verlag.
- Euclides.** (1991, 1994, 2008). *Elementos, Vol. I, II y III. Introducción de Luis Vega, Traducción y Notas de María Luisa Puertas Castaños.* Gredos.
- Heath, T.** (1981). *A history of Greek mathematics, Vol. II.* Dover Publications.
- Pappus.** (2010). *Book 4 of the Collection, Edited with Translation and Commentary by Heike Seifried-Weis.* Springer Verlag.
- Pappus.** (2023). *Book III of the Mathematical Collection, Translated into English by John B. Little.* Holy Cross Bookshelf.63.
- Plutarco.** (2006). *Vidas Paralelas III, Marcelo, Introducción, Traducción y Notas de Aurelio Pérez Jiménez y Paloma Ortiz García.* Gredos.
- Proclus.** (1970). *A commentary on the first book of Euclid's Elements, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow.* Princeton University Press.