

Matemáticas

Artículo original

Descomposiciones aditivas del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier

Additive decompositions of the displacement vector of the Lamé-Navier system

 Daniel Alfonso-Santiesteban^{1,*},  Ricardo Abreu-Blaya^{1,2},
 José Luis Sánchez-Santiesteban¹,  José María Sigarreta-Almira¹

¹ Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

² Investigador Invitado, Universidad UTE Ecuador.

Resumen

En el contexto del análisis de Clifford surgen las funciones inframonogénicas como las soluciones de una versión no conmutativa de la ecuación de Laplace. La aplicabilidad de estas funciones en la búsqueda de nuevas representaciones para las soluciones de la ecuación de equilibrio en Elasticidad Lineal ha sido objeto de estudio por varios investigadores. Este trabajo se centra en descomposiciones aditivas para los desplazamientos del sistema de Lamé-Navier mediante funciones inframonogénicas.

Palabras clave: Análisis de Clifford; Funciones inframonogénicas; Conjuntos estructurales; Sistema de Lamé-Navier.

Abstract

In the context of Clifford analysis, the inframonogenic functions arise as the solutions of a non-commutative version of the Laplace equation. The applicability of these functions in the search for new representations for the solutions of the equilibrium equation in Linear Elasticity has been studied by several researchers. This work focuses on additive decompositions for the displacements of the Lamé-Navier system by means of inframonogenic functions.

Keywords: Clifford analysis; Inframonogenic functions; Structural sets; Lamé-Navier system.

Introducción

En las últimas décadas el estudio del operador de Dirac ha sido el tema central en muchas áreas de la matemática. La consideración de propiedades locales de las funciones que pertenecen al núcleo de este operador (conocidas como funciones monogénicas) ha conducido a una moderna teoría de funciones, comúnmente conocida como análisis de Clifford. Las álgebras de Clifford tienen infinitas aplicaciones dentro del Análisis, la Geometría, la Computación y la Física. Incluso, la factorización que buscaba Paul Dirac de la ecuación de Klein-Gordon allá por el año 1928 solo era posible considerando matrices γ que generan el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$, la cual es isomorfa a la del espacio-tiempo de la relatividad especial (Dirac, 1928). De particular interés es el álgebra de Clifford real y universal $\mathbb{R}_{0,m}$, que se genera

Citación: Alfonso-Santiesteban D., *et al.* Descomposiciones aditivas del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 49(190):163-182, enero-marzo de 2025. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.3101>

Editor: Francisco José Marcellán Español

***Correspondencia:**
Daniel Alfonso-Santiesteban;
danielalfonso950105@gmail.com

Recibido: 30 de octubre de 2024

Aceptado: 11 de febrero de 2025

Publicado en línea: 5 de marzo de 2025



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

con la base canónica $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ sujeta a las relaciones multiplicativas siguientes:

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{i,j}, \quad (1)$$

donde $\delta_{i,j}$ denota a la delta de Kronecker. Las álgebras $\mathbb{R}_{0,1}$ y $\mathbb{R}_{0,2}$ son isomorfas a las álgebras de los complejos y cuaternios reales, respectivamente. El análisis de Clifford constituye una generalización elegante de la teoría de las funciones holomorfas del análisis complejo y cuaterniónico. A diferencia de lo que sucede en los números complejos, en estas álgebras geométricas se pierde en general la conmutatividad del producto y solo se preserva la asociatividad.

El operador de Dirac sobre $\mathbb{R}^m$ se define como

$$\underline{\partial} := \sum_{i=1}^m e_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Este operador es débilmente elíptico y puede ser visto como un caso particular del operador de Atiyah-Singer-Dirac en Geometría Espinorial. Además, $\underline{\partial}$ factoriza al Laplaciano m -dimensional Δ_m en el sentido de que $-\underline{\partial}^2 = \Delta_m$. Por ello, el análisis de Clifford puede apreciarse también como un refinamiento del clásico análisis armónico. La conocida ecuación de Laplace, en este contexto, tomaría la forma siguiente en términos del operador de Dirac:

$$\underline{\partial}^2 f = 0. \quad (3)$$

Una versión no conmutativa de esta ecuación (3) es la siguiente ecuación:

$$\underline{\partial} f \underline{\partial} = 0, \quad (4)$$

cuyas soluciones son llamadas funciones inframonogénicas y surgen específicamente en este ámbito del análisis de Clifford (**Malonek, Peña-Peña & Sommen**, 2011). En el cálculo vectorial cuando se restringe a solo considerar campos vectoriales $f = \vec{v}$, la anterior ecuación (4) puede ser reescrita como

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = 0. \quad (5)$$

Puede notarse cómo la ecuación de Laplace toma la forma similar

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = 0. \quad (6)$$

El cambio de signo en ambas ecuaciones provoca que la segunda de ellas, a diferencia de la primera, sea fuertemente elíptica.

El gran atractivo de esta clase de funciones para matemáticos y físicos ha ido creciendo desde su descubrimiento en el 2010 por Malonek et al. (**Malonek, Peña-Peña & Sommen**, 2010) y ya han sido muchos los resultados que hasta la fecha se han obtenido. En el 2017 se publicó una fórmula integral de tipo Cauchy que permite conocer a la función inframonogénica en un dominio interior a través de los valores de esta y de sus derivadas de primer orden sobre la frontera (**García et al.**, 2017). También se ha podido constatar que el vector de desplazamiento de los puntos de un material elástico lineal, isótropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen admite la representación de un campo vectorial armónico más uno inframonogénico (**García et al.**, 2018). Moreno García et al. probaron que la bola en dimensión impar es un conjunto de unicidad para este tipo de funciones (**García, García & Blaya**, 2022); mientras que Láviccka encontró una descomposición de Fischer por medio de la H-acción para el espacio de polinomios homogéneos inframonogénicos (**Láviccka**, 2011). Recientemente, se han obtenido descomposiciones de Almansi y se han construido bases ortogonales cuadrado integrables sobre la esfera para este tipo de funciones (**García et al.**, 2020; **Peña, Morais & Porter**, 2023). Se remite al lector interesado en profundizar sobre

este tópico a los trabajos: **Álvarez et al.**, 2023; **Dinh**, 2014; **García, Santiesteban y Blaya**, 2023; **Santiesteban, Blaya y Reyes**, 2023; **Wang et al.**, 2022.

El objetivo de este trabajo es estudiar las funciones inframonogénicas y sus aplicaciones en la Elasticidad Lineal, específicamente en la búsqueda de descomposiciones aditivas para el vector de desplazamiento que describe el famoso sistema de Lamé-Navier. Las representaciones de las soluciones a la ecuación de equilibrio elástica mediante funciones definidas en álgebras de Clifford ayudan a comprender la estructura del vector de desplazamiento y sugieren generalizaciones naturales en dimensiones mayores. Los métodos empleados en la elaboración de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos específicos y las tareas de investigación. Se emplearon los métodos: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción; todos de gran importancia en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un extenso marco teórico enfocado al uso de las herramientas propias del análisis de Clifford y de la teoría de operadores en la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de la Física-Matemática.

1 Preliminares

La siguiente definición de álgebra de Clifford está dada por **Gürlebeck, Habetha y Spröbig**, 2008, pág. 52:

Definición 1.1 *Álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$*

Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{m+1}$ con la base canónica $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ sujeta a las siguientes relaciones multiplicativas:

$$\begin{aligned} e_0 e_i &= e_i e_0 = e_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m, \\ e_0^2 &= e_1^2 = \dots = e_p^2 = 1, \\ e_{p+1}^2 &= e_{p+2}^2 = \dots = e_{p+q}^2 = -1, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $p \in \{0, 1, \dots, m\}$ y $q := m - p$. La base $\mathcal{B}$ y las relaciones (7) generan una base de un álgebra 2^m -dimensional $\mathcal{A} = \mathbb{R}_{p,q}$:

$$e_0; e_1, e_2, \dots, e_m; e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_{m-1} e_m; \dots; e_1 e_2 \dots e_m,$$

con elemento unitario e_0 . El álgebra construida recibe el nombre de álgebra de Clifford universal $\mathbb{R}_{p,q}$.

De particular importancia son las álgebras de Clifford con $p = 0$, las cuales generalizan directamente al álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$ y al álgebra de los cuaternios reales de Hamilton $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Cabe destacar que existe un isomorfismo entre $\mathbb{R}_{0,1}$ y $\mathbb{C}$; así como también entre $\mathbb{R}_{0,2}$ y $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. En lo que resta de este trabajo serán de nuestro interés solo las álgebras $\mathbb{R}_{0,m}$. El espacio vectorial

$$\mathbb{R}^m = \{\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m\}$$

está inmerso en $\mathbb{R}_{0,m}$. Un elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados

$$A = \{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$$

o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}$, $e_\emptyset = e_0 = 1$. En particular, $Sc[a]$ se refiere a la parte escalar de a . Nótese que cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ admite la descomposición única:

$$a = [a]_0 + [a]_1 + \dots + [a]_m, \quad (8)$$

donde $[\cdot]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota al subespacio de k -vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = \text{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k).$$

Para un vector v y un k -vector F_k , su producto vF_k resulta en un $(k-1)$ -vector y un $(k+1)$ -vector:

$$vF_k = [vF_k]_{k-1} + [vF_k]_{k+1},$$

donde

$$[vF_k]_{k-1} = \frac{1}{2}[vF_k - (-1)^k F_k v]$$

y

$$[vF_k]_{k+1} = \frac{1}{2}[vF_k + (-1)^k F_k v].$$

Los productos interior y exterior entre v y F_k son definidos por $v \cdot F_k := [vF_k]_{k-1}$ y $v \wedge F_k := [vF_k]_{k+1}$, respectivamente. El espacio $\mathbb{R}_{0,m}$ también puede ser descompuesto en dos subespacios 2^{m-1} -dimensionales $\mathbb{R}_{0,m}^+$ y $\mathbb{R}_{0,m}^-$, los cuales contienen los multivectores pares e impares:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \mathbb{R}_{0,m}^+ \oplus \mathbb{R}_{0,m}^-.$$

Cabe mencionar que $\mathbb{R}_{0,m}^+$ es una subálgebra de $\mathbb{R}_{0,m}$ llamada subálgebra par. La subálgebra par del álgebra del espacio-tiempo de Minkowski es isomorfa al álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0}$, y esta a su vez tiene una subálgebra par isomorfa al álgebra de los cuaternios reales $\mathbb{H}(\mathbb{R})$; mientras que los números complejos $\mathbb{C}$ representan la subálgebra par de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$.

Todo elemento Cliffordiano a es suma de su parte par

$$a^+ = \sum_{k-\text{par}} [a]_k$$

y su parte impar

$$a^- = \sum_{k-\text{impar}} [a]_k.$$

La conjugación es una anti-involución definida por las relaciones $\bar{e}_i = -e_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Por ende,

$$\bar{a} = \sum_A a_A \bar{e}_A, \quad \bar{e}_A = (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} e_A.$$

Para un análisis detallado de los fundamentos básicos relacionados con las álgebras de Clifford se invita al lector a consultar las referencias: **Brackx, Delanghe y Sommen**, 1982; **Delanghe**, 1970, 2001; **Delanghe y Reyes**, 2003; **Delanghe, Sommen y Souček**, 1992; **Gürlebeck, Habetha y Sprößig**, 2008; **Gürlebeck y Sprößig**, 1990, 1997; **Reséndis y Shapiro**, 2002; **Ryan**, 2000, 2004; **Sommen y Sprößig**, 2002.

En este trabajo se considerarán funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}$, las cuales puedan ser escritas como $f(\underline{x}) = \sum_A f_A(\underline{x}) e_A$, donde f_A son funciones reales. Propiedades tales como la continuidad, la diferenciabilidad y la integrabilidad tienen el usual sentido a través de sus componentes reales, o sea, una función será continua si todas sus componentes reales lo son. El espacio de funciones k -veces continuamente diferenciables sobre un dominio Ω será denotado por $C^k(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$. Se asumirán dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y simplemente conexos con una frontera Γ lo suficientemente suave.

En las últimas décadas los tan llamados *conjuntos estructurales* han ganado mucha relevancia. Un conjunto estructural φ es una base ortonormal arbitraria de $\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$:

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m),$$

la cual también cumplirá que

$$\varphi_i \varphi_j + \varphi_j \varphi_i = -2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

El término fue introducido en los trabajos de Shapiro y Vasilevski a finales del siglo pasado (**Shapiro & Vasilevski**, 1995); sin embargo, fue el japonés Nôno quien utilizó por vez primera estos tipos de conjuntos allá por el año 1986 en una linearización cuaterniónica del Laplaciano (**Nôno**, 1986). Algunas nociones preliminares acerca de este tipo de conjuntos pueden consultarse también en los trabajos de **Nôno y Inenaga**, 1987; **Shapiro**, 1997. Los conjuntos estructurales poseen un rol importante en las representaciones de polinomios contragénicos, propiedades de mapeo de transformadas de Ahlfors-Beurling (o Π -operadores), Elasticidad Lineal, $\bar{\partial}$ -problemas, descomposiciones de Fischer y en transformaciones conformes multidimensionales (ver, por ejemplo, los trabajos: **Blaya et al.**, 2016, 2017; **Bock et al.**, 2015; **Gürlebeck y Nguyen**, 2014; **Krausshar y Malonek**, 2001; **Nguyen**, 2015; **Santiesteban**, 2024; **Santiesteban, Blaya y Alejandro**, 2023; **Santiesteban et al.**, 2024).

En el espacio $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es posible definir un operador de Dirac generalizado como:

$${}^{\varphi}\partial := \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Para el caso particular del conjunto estructural estándar $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ el operador ${}^{\varphi}\partial$ se convierte en el tradicional operador de Dirac ∂ definido en la introducción. La ortonormalidad del conjunto estructural implica la factorización del Laplaciano mediante el operador ${}^{\varphi}\partial$. Una función se dice que es φ -hiperholomorfa por la izquierda (derecha) en el dominio Ω si ${}^{\varphi}\partial f = 0$ ($f {}^{\varphi}\partial = 0$) en Ω . Es conocido que el espacio de funciones φ -hiperholomorfas es isomorfo al espacio de funciones monogénicas, ya que se puede asegurar la existencia de una transformación ortogonal T entre ambos espacios tal que $T(\varphi_i) = e_i$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ (consultar el libro de **Gürlebeck, Habetha y Sprößig**, 2008). Sin embargo, la teoría de funciones φ -hiperholomorfas tiene rasgos interesantes cuando se consideran conjuntos estructurales diferentes, en cuyo caso la existencia de una transformación ortogonal al caso estándar es al menos improbable. En la siguiente sección se podrá corroborar lo antes mencionado.

2 Generalizaciones no triviales de las funciones armónicas

Los conjuntos estructurales brindan la posibilidad de considerar toda una familia de nuevas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden:

$${}^{\varphi}\partial f {}^{\psi}\partial = 0 \tag{9}$$

y

$${}^{\varphi}\partial {}^{\psi}\partial f = 0, \tag{10}$$

donde φ y ψ son dos conjuntos estructurales arbitrarios. En la literatura, las soluciones de las ecuaciones (9) y (10) reciben el nombre de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas, respectivamente (**Ricardo, Reyes & Blaya**, 2021; **Santiesteban, Blaya & Alejandro**, 2022a; **Santiesteban, Pérez & Blaya**, 2022). Note que cuando $\varphi = \psi$ la ecuación (10) se reduce a la ecuación de Laplace; mientras que en el caso particular de $\varphi = \psi = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ la ecuación (9) se transforma en la ecuación sándwich (4). Los espacios de funciones armónicas, inframonogénicas, (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas en Ω se representarán con las simbologías: $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{I}(\Omega)$, $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$, respectivamente. Existe un isomorfismo entre $\mathcal{I}(\Omega)$ y $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$; sin embargo, cruciales diferencias se han obtenido entre estos tipos de funciones cuando las bases ortonormales se

toman diferentes (Santiesteban & Blaya, 2022). No es posible construir una biyección lineal semejante a la obtenida entre los espacios anteriores para el caso de funciones armónicas y (φ, ψ) -armónicas. Es de esperar que no sucediese por el hecho de que en general las funciones (φ, ψ) -armónicas (al igual que las inframonogénicas y (φ, ψ) -inframonogénicas) violan el principio del módulo máximo. En los trabajos de Ricardo et al., 2022 y Santiesteban, Blaya y Alejandro, 2022a, se han construido ejemplos no triviales de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas sobre dominios elipsoidales con traza nula.

Estas funciones son infinitamente diferenciables haciendo uso del teorema de regularidad para operadores elípticos. Además, se han encontrado fórmulas de representación integral de tipo Cauchy con núcleos infinitamente diferenciables (Reyes et al., 2016; Santiesteban, Blaya & Alejandro, 2022a). Como $\varphi \partial \varphi \partial (\cdot) \psi \partial \psi \partial (\cdot) = \psi \partial \varphi \partial \varphi \partial \psi \partial (\cdot) = \Delta^2$ entonces los espacios $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ y $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ son subespacios propios del espacio de las funciones biarmónicas. La Figura 1 muestra un ejemplo concreto de la posición relativa de estos subespacios. Si se escoge $\Omega = \mathbb{R}^3$ y los conjuntos estructurales $\varphi = (e_1, e_2, e_3)$ y $\psi = (e_3, e_2, e_1)$, entonces por un cálculo sencillo se puede verificar que los siguientes polinomios pertenecen a cada una de las intersecciones de estos subespacios:

$$\begin{aligned} p_1(\underline{x}) &= 2x_1x_3e_1 - x_2e_2 - (x_1^2 - x_3^2)e_3 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3), \\ p_2(\underline{x}) &= 2x_2x_3e_1 - (x_1^2 + x_2^2)e_2 \in \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{H}(\mathbb{R}^3), \\ p_3(\underline{x}) &= x_1x_3e_1 + x_2e_2 \in \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3), \\ p_4(\underline{x}) &= (x_1x_2 + x_2x_3)e_2 \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3), \\ p_5(\underline{x}) &= (x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_2e_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cup \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3), \\ p_6(\underline{x}) &= (x_1^2 + x_3^2)e_1 + 2x_2^2e_3 \in \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \cup \mathcal{H}(\mathbb{R}^3), \\ p_7(\underline{x}) &= (x_1^2 + x_3^2)e_1 - 2x_2e_3 \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \cup \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

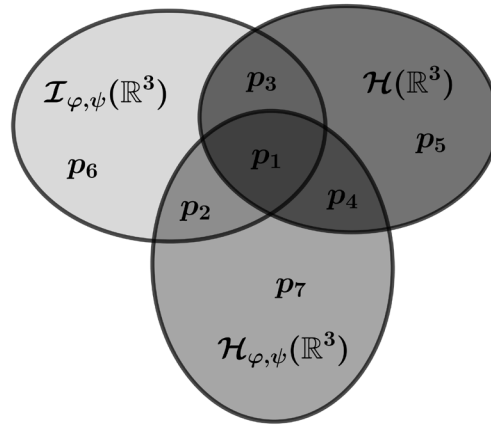


Figura 1. Los espacios $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\mathbb{R}^3)$

La acción del operador de Dirac ∂ sobre un campo k -vectorial F_k puede verse como suma de un producto interior y otro exterior, o sea,

$$\partial F_k = \partial \cdot F_k + \partial \wedge F_k, \quad (11)$$

donde

$$\partial \cdot F_k = \frac{1}{2} [\partial F_k - (-1)^k F_k \partial] = [\partial F_k]_{k-1}$$

y

$$\underline{\partial} \wedge F_k = \frac{1}{2} [\underline{\partial} F_k + (-1)^k F_k \underline{\partial}] = [\underline{\partial} F_k]_{k+1}.$$

Utilizando el hecho que $\underline{\partial} \cdot \underline{\partial} \cdot F_k = \underline{\partial} \wedge \underline{\partial} \wedge F_k = 0$, se obtienen las fórmulas siguientes:

$$\Delta F_k = \underline{\partial} \cdot \underline{\partial} \wedge F_k + \underline{\partial} \wedge \underline{\partial} \cdot F_k \quad (12)$$

y

$$\underline{\partial} F_k \underline{\partial} = (-1)^k (\underline{\partial} \cdot \underline{\partial} \wedge F_k - \underline{\partial} \wedge \underline{\partial} \cdot F_k). \quad (13)$$

El Laplaciano y el operador $\underline{\partial}(\cdot)\underline{\partial}$ mantienen invariante el espacio de k -vectores. Se tiene así la primera semejanza entre las funciones armónicas y las inframonogénicas. Una función es armónica (inframonogénica) en Ω si y solo si cada una de sus k -partes es también armónica (inframonogénica) en Ω . Sin embargo, esta propiedad no se evidencia en general para las clases de funciones (φ, ψ) -armónicas y (φ, ψ) -inframonogénicas. Veamos un simple ejemplo. Sea la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$ definida por:

$$f(\underline{x}) = x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 e_1 e_3 + 2x_2 x_1 e_2 e_3. \quad (14)$$

Sean los conjuntos estructurales:

$$\varphi = (e_1, e_2, e_3),$$

$$\psi = (e_3, e_2, e_1).$$

Mediante un cálculo directo se arriba a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi \underline{\partial} f \psi \underline{\partial} &= e_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} e_3 + e_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} e_2 + e_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} e_1 + e_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} e_2 + e_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} e_1 \\ &\quad + e_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} e_3 + e_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} e_1 + e_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} e_3 + e_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} e_2 \\ &= e_1 (2e_1 e_3) e_3 + 2e_2^2 + 2e_3 e_1 + e_1 (2e_2 e_3) e_2 + e_1^2 + e_2 (2e_2 e_3) e_3 + e_3^2 \\ &= 2 - 2 + 2e_3 e_1 + 2e_1 e_3 - 1 + 2 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, la función f es (φ, ψ) -inframonogénica en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ y nótese ahora que algunas de sus componentes k -vectoriales no lo son:

$$\begin{aligned} \varphi \underline{\partial} [f]_0 \psi \underline{\partial} &= \varphi \underline{\partial} [x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_1] \psi \underline{\partial} \\ &= 2e_2^2 + 2e_3 e_1 + e_1^2 + e_3^2 \\ &= -2 + 2e_3 e_1 - 1 - 1 \\ &= -4 + 2e_3 e_1 \neq 0, \\ \varphi \underline{\partial} [f]_1 \psi \underline{\partial} &= 0, \\ \varphi \underline{\partial} [f]_2 \psi \underline{\partial} &= \varphi \underline{\partial} [x_1^2 e_1 e_3 + 2x_2 x_1 e_2 e_3] \psi \underline{\partial} \\ &= e_1 (2e_1 e_3) e_3 + e_1 (2e_2 e_3) e_2 + e_2 (2e_2 e_3) e_3 \\ &= 2 + 2e_1 e_3 + 2 \\ &= 4 + 2e_1 e_3 \neq 0, \\ \varphi \underline{\partial} [f]_3 \psi \underline{\partial} &= 0. \end{aligned}$$

Note en este ejemplo como el operador generalizado $\varphi \underline{\partial}(\cdot) \psi \underline{\partial}$ no transforma la parte escalar de f en otro escalar, sino en un escalar sumado con un bivector. Aunque esta propiedad de invariancia no se cumple en general para conjuntos estructurales no equivalentes; sí es posible arribar a una versión débil de la misma. Una función f es (φ, ψ) -inframonogénica ((φ, ψ) -armónica) en Ω si y solo si sus partes par e impar son funciones

(φ, ψ) -inframonomogénicas ((φ, ψ) -armónicas) en Ω . Esta afirmación se demuestra directamente gracias a las relaciones de conmutación siguientes:

$$\varphi \underline{\partial} [f]_{\pm} \psi \underline{\partial} = [\varphi \underline{\partial} f \psi \underline{\partial}]_{\pm}, \quad \varphi \underline{\partial} \psi \underline{\partial} [f]_{\pm} = [\varphi \underline{\partial} \psi \underline{\partial} f]_{\pm}. \quad (15)$$

En este contexto, la acción del operador de Dirac $\varphi \underline{\partial}$ sobre el campo k -vectorial está dada por

$$\varphi \underline{\partial} F_k = \varphi \underline{\partial} \cdot F_k + \varphi \underline{\partial} \wedge F_k,$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi \underline{\partial} \cdot F_k &= \frac{1}{2} (\varphi \underline{\partial} F_k - (-1)^k F_k \varphi \underline{\partial}) = [\varphi \underline{\partial} F_k]_{k-1}, \\ \varphi \underline{\partial} \wedge F_k &= \frac{1}{2} (\varphi \underline{\partial} F_k + (-1)^k F_k \varphi \underline{\partial}) = [\varphi \underline{\partial} F_k]_{k+1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \varphi \underline{\partial} \psi \underline{\partial} F_k &= \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \wedge F_k + \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \cdot F_k + \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \cdot F_k \\ &\quad + \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \wedge F_k, \\ \varphi \underline{\partial} F_k \psi \underline{\partial} &= (-1)^k \underbrace{(\varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \wedge F_k - \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \cdot F_k)}_{k\text{-vector}} \\ &\quad - \underbrace{\varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \cdot F_k}_{(k-2)\text{-vector}} + \underbrace{\varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \wedge F_k}_{(k+2)\text{-vector}}. \end{aligned}$$

En particular, para campos k -vectoriales (φ, ψ) -armónicos o (φ, ψ) -inframonomogénicos se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \underline{\partial} \psi \underline{\partial} F_k = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \wedge F_k + \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \wedge F_k &= 0, \end{cases} \\ \varphi \underline{\partial} F_k \psi \underline{\partial} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \underline{\partial} \cdot \psi \underline{\partial} \wedge F_k - \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \underline{\partial} \wedge \psi \underline{\partial} \wedge F_k &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3 Sistema de Lamé-Navier

El vector de desplazamiento tridimensional $\vec{u}$ de un material elástico lineal, isótropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen es descrito por el sistema de Lamé-Navier (o ecuación de equilibrio):

$$\mathcal{L}_{\lambda, \mu} \vec{u} := \mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \quad (16)$$

donde $\mu > 0, \lambda > -\frac{2}{3}\mu$ son los coeficientes de Lamé (**Lamé**, 1837). Numerosas son las aplicaciones de este sistema dentro de la Electrostática Lineal, los sistemas hamiltonianos caóticos y la teoría de los condensados de Bose-Einstein (**Barber & Klarbring**, 2003; **Fung**, 1965; **Grigoriev**, 2016; **Malvern**, 1969; **Marsden & Hughes**, 1983; **Niyozov & Makhmudov**, 2014; **Patrault, Bock & Gürlebeck**, 2014; **Russell & Brown**, 2009; **Sadd**, 2005). Es bien conocido que la mayoría de los problemas elásticos en el plano son resueltos eficientemente mediante las técnicas del análisis complejo y las famosas fórmulas de Kolosov-Muskhelishvili (**Muskhelishvili**, 1953). Estudios del problema de Riemann para el sistema de Lamé-Navier bidimensional sobre dominios con fronteras suaves y fractales pueden encontrarse en los artículos de **Valencia, Blaya y Alejandre**, 2021; **Valencia et al.**, 2023. El uso de las herramientas del análisis cuaterniónico y de Clifford en la teoría de la

Elasticidad Lineal ha ayudado a fabricar una mejor visión matemática cuando la dimensión del espacio es mayor que 2 (ver **Bock et al.**, 2015; **Gürlebeck y Nguyen**, 2015). Investigaciones recientes lograron establecer un estrecho vínculo entre las soluciones del sistema (16) con las funciones inframonogénicas. **García et al.**, 2018 reescribieron el sistema de Lamé-Navier (16) en términos del operador de Dirac en $\mathbb{R}^3$ a la forma siguiente:

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu}^* \vec{u} := \left(\frac{\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial} \vec{u} \underline{\partial} + \left(\frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}^2 \vec{u} = 0, \quad (17)$$

y obtuvieron que $\vec{u}$ puede ser representado como

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}, \quad (18)$$

donde $\vec{h}$ es un campo vectorial armónico e $\vec{i}$ es un campo vectorial inframonogénico. Además, los autores probaron que esta representación es única salvo un campo vectorial que fuese a la vez armónico e inframonogénico. **Santiesteban, Blaya y Alejandre**, 2022b estudiaron una generalización natural de la ecuación (17) mediante conjuntos estructurales arbitrarios φ y ψ :

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^* \vec{u} := \alpha^\varphi \underline{\partial} \vec{u} \underline{\partial}^\psi + \beta^\varphi \underline{\partial}^\psi \underline{\partial} \vec{u} = 0, \quad (19)$$

donde para abreviar se utilizó la notación $\alpha = \frac{\mu + \lambda}{2}$ y $\beta = \frac{3\mu + \lambda}{2}$. Debido a las restricciones de Lamé se tendrá que $\frac{\beta}{\gamma} < \alpha < \beta$. En el caso específico cuando $\varphi = \psi$, los sistemas (17) y (19) son equivalentes salvo una transformación ortogonal, y las soluciones de (19) pueden ser vistas como desplazamientos de (17) que han sido rotados en el sistema de coordenadas. Las descomposiciones son omnipresentes en la matemática y en todas las ciencias. **Santiesteban, Blaya y Alejandre**, 2022b obtuvieron nuevas descomposiciones aditivas de los desplazamientos en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas, dadas por los siguientes teoremas que se enuncian a continuación:

Teorema 3.1 Si $\vec{u}$ satisface que $\mathcal{L}_{\psi,\psi}^* \vec{u} = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Entonces $\vec{u}$ puede ser descompuesto en Ω en la suma

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}, \quad (20)$$

donde $\vec{h} \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\vec{i} \in \mathcal{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial de la clase $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 3.2 Sea el campo vectorial $\vec{u}$ que satisface $\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^* \vec{u} = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico y (ψ, ψ) -inframonogénico en Ω , entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + i, \quad (21)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial de la clase $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 3.3 Sea el campo vectorial $\vec{u}$ que satisface $\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^* \vec{u} = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico en Ω , entonces este admite la descomposición

$$\vec{u} = h + i^*, \quad (22)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$. Además, esta descomposición es única salvo un campo vectorial de la clase $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$.

Teorema 3.4 Si un campo vectorial (ψ, ψ) -inframonogénico $\vec{u}$ satisface $\mathcal{L}_{\varphi,\psi}^* \vec{u} = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces este admite la representación

$$\vec{u} = h + i^*, \quad (23)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\psi, \varphi}(\Omega)$. Además, esta representación es única salvo un campo vectorial de la clase $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi, \varphi}(\Omega)$.

Observación 3.1 Los sumandos que se obtienen en las descomposiciones de los Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4 no necesariamente son campos vectoriales, a diferencia de los que se tienen en el Teorema 3.1. Note también el cambio de orden en el par de conjuntos estructurales (φ, ψ) para la inframonogenicidad de i^* en los Teoremas 3.3 y 3.4.

Si u es un campo escalar armónico en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\Psi \underline{\partial} u$ será un campo vectorial armónico también, tal que es solución de cualquier sistema generalizado de Lamé-Navier y por tanto se puede aplicar cualesquiera de los teoremas anteriores. Así resulta el siguiente corolario:

Corolario 3.1 Si u es un campo escalar armónico en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces el campo vectorial $\Psi \underline{\partial} u$ admite la representación

$$\Psi \underline{\partial} u = h + i, \quad (24)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\varphi, \psi}(\Omega)$, para cualesquiera conjuntos estructurales φ y ψ que se seleccionen. También $\Psi \underline{\partial} u$ admite la descomposición

$$\Psi \underline{\partial} u = h + i^*, \quad (25)$$

con $h \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathcal{I}_{\psi, \varphi}(\Omega)$.

Si los conjuntos estructurales son convenientemente escogidos entonces soluciones particulares de sistemas de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen constante pueden ser analizadas como soluciones de sistemas generalizados del tipo

$$\mathcal{L}_{\varphi, \psi}^* \vec{u} = 0.$$

Este hecho característico abre el camino para nuevas representaciones aditivas de las soluciones de sistemas de Lamé-Navier no homogéneos. En la siguiente sección se construirán ejemplos de ello, en base a la metodología seguida por **Santesteban, Blaya y Alejandro**, 2022b.

4 Descomposiciones de los desplazamientos del sistema de Lamé-Navier

Según lo concerniente a la teoría de la elasticidad, se le denomina desplazamiento universal a toda solución del sistema de Lamé-Navier que no depende de los coeficientes de Lamé (ver: **García et al.**, 2020; **Muskhelishvili**, 1953). En correspondencia con la reescritura Cliffordiana (17), un desplazamiento universal es todo campo vectorial $\vec{u}$ que es a la vez armónico e inframonogénico en el dominio Ω . Sean los conjuntos estructurales de $\mathbb{R}^3$: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ y $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Para el sistema generalizado de Lamé-Navier (19) se definirá a los desplazamientos universales como los campos vectoriales que son a la vez (φ, ψ) -inframonogénicos y (φ, ψ) -armónicos. La clase $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}(\Omega)$ no contiene las mismas funciones que la clase $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi, \varphi}(\Omega)$, siendo ψ un conjunto estructural diferente al estándar. Los desplazamientos universales del sistema clásico de Lamé Navier no necesariamente lo son para el sistema generalizado con conjuntos estructurales idénticos, ni mucho menos para cuando los conjuntos φ y ψ sean no equivalentes. Entiéndase por equivalencia entre los conjuntos estructurales φ y ψ a la igualdad siguiente:

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (\pm \psi_1, \pm \psi_2, \pm \psi_3),$$

en cuyo caso el orden de los elementos es determinante.

El siguiente campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$:

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 e_1 + x_1 x_3 e_2 + x_2 x_3 e_3 \quad (26)$$

es obviamente armónico. Sean ahora los conjuntos estructurales siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi &= (e_2, e_1, e_3), \\ \psi &= (e_3, e_2, e_1). \end{aligned}$$

Mediante un cálculo directo se obtiene que

$$\begin{aligned} \psi \partial \vec{f} &= e_3(x_2 e_1 + x_3 e_2) + e_2(x_1 e_1 + x_3 e_3) + e_1(x_1 e_2 + x_2 e_3) \\ &= 0, \\ \psi \partial \vec{f} \psi \partial &= 0, \\ \partial \vec{f} \partial &= e_1 e_1 e_2 + e_2 e_1 e_1 + e_1 e_2 e_3 + e_3 e_2 e_1 + e_2 e_3 e_3 + e_3 e_3 e_2 \\ &= -e_2 - e_2 - e_2 - e_2 \\ &= -4e_2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

El campo $\vec{f}$ es armónico, ψ -hiperholomorfo por la izquierda. Por ende, también es (ψ, ψ) -inframonogénico, y sin embargo no es inframonogénico en $\mathbb{R}^3$. Además, $\vec{f}$ es claramente (φ, ψ) -inframonogénico y (φ, ψ) -armónico. Luego $\vec{f}$ es solución del sistema generalizado de Lamé-Navier para los conjuntos estructurales antes descritos y cualesquiera restricciones de Lamé-Navier. Es decir, $\vec{f}$ es un desplazamiento universal para los sistemas generalizados de Lamé-Navier (19) y ni siquiera es solución de la ecuación de equilibrio.

En lo adelante se mostrarán ejemplos de cómo construir las diferentes representaciones de las soluciones de estos sistemas elásticos siguiendo el enunciado y demostración de los teoremas planteados en la sección anterior. Se sugiere al lector consultar el artículo (**Santiesteban, Blaya & Alejandro, 2022b**) para más detalles en algunos pasos de la construcción.

Véase que la función $\vec{n} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$ definida por:

$$\vec{n}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e_1 - x_2 x_3 e_2 - 2x_1 x_3 e_3 \quad (27)$$

satisface el sistema generalizado de Lamé-Navier $\mathcal{L}_{\psi, \psi}^* \vec{u} = 0$ para el conjunto estructural $\alpha; \beta$
 $\psi = (e_3, e_2, e_1)$, con $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,4$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi \partial \vec{n} &= e_3(2x_1 e_1 - 2x_3 e_3) - e_2(x_3 e_2) + e_1(-x_2 e_2 - 2x_1 e_3) \\ &= -2x_1 e_1 e_3 + 2x_3 + x_3 - x_2 e_1 e_2 - 2x_1 e_1 e_3 \\ &= 3x_3 - 4x_1 e_1 e_3 - x_2 e_1 e_2, \\ \psi \partial \vec{n} \psi \partial &= (-4e_1 e_3)e_3 + (-e_1 e_2)e_2 + 3e_1 \\ &= 8e_1, \\ \psi \partial \psi \partial \vec{n} &= -2e_1, \\ \mathcal{L}_{\psi, \psi}^* \vec{n} &= 0,1 \cdot \psi \partial \vec{n} \psi \partial + 0,4 \cdot \psi \partial \psi \partial \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

Ahora se construye la representación propuesta en Teorema 3.1 según la demostración del mismo por **Santiesteban, Blaya y Alejandro, 2022b**:

$$\vec{n} = \vec{h} + \vec{i},$$

donde

$$\vec{h} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha \right)^{-1} \left[g\vec{x} - 2 \left(\frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha \right) \vec{n} \right]_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$$

y

$$\vec{i} = - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta - \frac{2\beta^2}{\alpha} + 2\alpha \right)^{-1} \left[g\vec{x} - \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta \right) \vec{n} \right]_1 \in \mathcal{J}_{\psi, \psi}(\Omega)$$

con $g = \alpha \vec{n} \cdot \vec{\partial} + \beta \vec{\partial} \cdot \vec{n}$ y $\vec{x} = e_3 x_1 + e_2 x_2 + e_1 x_3$. Véase que entonces:

$$\begin{aligned} g &= 0,1 \cdot \vec{n} \cdot \vec{\partial} + 0,4 \cdot \vec{\partial} \cdot \vec{n} \\ &= 0,1(3x_3 + 4x_1 e_1 e_3 + x_2 e_1 e_2) + 0,4(3x_3 - 4x_1 e_1 e_3 - x_2 e_1 e_2) \\ &= 1,5x_3 - 1,2x_1 e_1 e_3 - 0,3x_2 e_1 e_2, \\ H &:= g\vec{x} - 3\vec{n} \\ &= (1,5x_3 - 1,2x_1 e_1 e_3 - 0,3x_2 e_1 e_2)(e_3 x_1 + e_2 x_2 + e_1 x_3) - 3\vec{n} \\ &= 1,5x_3^2 e_1 + 1,5x_2 x_3 e_2 + 1,5x_1 x_3 e_3 + 1,2x_1^2 e_1 + 1,2x_1 x_2 e_1 e_2 e_3 - 1,2x_1 x_3 e_3 \\ &\quad - 0,3x_1 x_2 e_1 e_2 e_3 + 0,3x_2^2 e_1 - 0,3x_2 x_3 e_2 - 3\vec{n} \\ &= (1,2x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 1,2x_2 x_3 e_2 + 0,3x_1 x_3 e_3 + 0,9x_1 x_2 e_1 e_2 e_3 - 3\vec{n} \\ &= (-1,8x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 4,2x_2 x_3 e_2 + 6,3x_1 x_3 e_3 + 0,9x_1 x_2 e_1 e_2 e_3, \\ I &:= g\vec{x} + 0,375\vec{n} \\ &= (1,2x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 1,2x_2 x_3 e_2 + 0,3x_1 x_3 e_3 + 0,9x_1 x_2 e_1 e_2 e_3 \\ &\quad + 0,375\vec{n} \\ &= (1,575x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 0,825x_2 x_3 e_2 - 0,45x_1 x_3 e_3 \\ &\quad + 0,9x_1 x_2 e_1 e_2 e_3, \\ \vec{h} &= -\frac{8}{27} [(-1,8x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 4,2x_2 x_3 e_2 + 6,3x_1 x_3 e_3], \\ \vec{i} &= \frac{8}{27} [(1,575x_1^2 + 0,3x_2^2 + 1,5x_3^2)e_1 + 0,825x_2 x_3 e_2 - 0,45x_1 x_3 e_3]. \end{aligned}$$

Obsérvese que efectivamente

$$\begin{aligned} \vec{h} + \vec{i} &= \frac{8}{27} (3,375x_1^2 e_1 - 3,375x_2 x_3 e_2 - 6,75x_1 x_3 e_3) \\ &= \vec{n}, \\ \Delta \vec{h} &= -\frac{8}{27} (-3,6 + 0,6 + 3,0)e_1 \\ &= 0, \\ \vec{\partial} \vec{i} \cdot \vec{\partial} &= \frac{8}{27} [e_3(3,15e_1)e_3 + e_2(0,6e_1)e_2 + e_1(3,0e_1)e_1 + e_3(-0,45e_3)e_1 \\ &\quad + e_1(-0,45e_3)e_3 + e_2(0,825e_2)e_1 + e_1(0,825e_2)e_2] \\ &= \frac{8}{27} (3,15e_1 + 0,6e_1 - 3,0e_1 + 0,45e_1 + 0,45e_1 - 0,825e_1 - 0,825e_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Note además que el campo vectorial $\vec{n}$ no es inframonogénico en ningún subconjunto Ω de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \vec{n} \cdot \vec{\partial} &= e_1(2e_1)e_1 + e_2(-e_2)e_3 + e_3(-e_2)e_2 + e_1(-2e_3)e_3 + e_3(-2e_3)e_1 \\ &= -2e_1 + e_3 + e_3 + 2e_1 + 2e_1 \\ &= 2e_1 + 2e_3 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, este campo vectorial no satisface el sistema de Lamé-Navier; sin embargo, sí lo hace para el sistema generalizado con conjuntos estructurales idénticos. No obstante, $\vec{n}$ es

solución del sistema de Lamé-Navier no homogéneo, con una fuerza de volumen constante igual a $-0,6e_1 + 0,2e_3$.

Ahora analícese el siguiente campo vectorial $\vec{q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$

$$\vec{q}(x_1, x_2, x_3) = x_3 e_1 + (x_1^2 - x_2^2) e_2 + x_1 e_3. \quad (28)$$

Este campo es armónico, pero además si se escogen los siguientes conjuntos estructurales:

$$\varphi_1 = (e_3, -e_1, e_2),$$

$$\psi_1 = (e_1, e_3, e_2),$$

entonces es (φ_1, ψ_1) -armónico, (φ_1, ψ_1) -inframonogénico, (ψ_1, φ_1) -armónico, (ψ_1, φ_1) -inframonogénico, (φ_1, φ_1) -inframonogénico y (ψ_1, ψ_1) -inframonogénico. Véase:

$$\varphi_1 \underline{\partial} \psi_1 \underline{\partial} \vec{q} = 2e_3 e_1 e_2 + 2e_1 e_3 e_2 = 0,$$

$$\varphi_1 \underline{\partial} \vec{q} \psi_1 \underline{\partial} = 2e_3 e_2 e_1 + 2e_1 e_2 e_3 = 0,$$

$$\psi_1 \underline{\partial} \varphi_1 \underline{\partial} \vec{q} = 2e_1 e_3 e_2 + 2e_3 e_1 e_2 = 0,$$

$$\psi_1 \underline{\partial} \vec{q} \varphi_1 \underline{\partial} = -\overline{\varphi_1 \underline{\partial} \vec{q} \psi_1 \underline{\partial}} = 0,$$

$$\psi_1 \underline{\partial} \vec{q} \psi_1 \underline{\partial} = 2e_1 e_2 e_1 - 2e_3 e_2 e_3 = 0,$$

$$\varphi_1 \underline{\partial} \vec{q} \varphi_1 \underline{\partial} = 2e_3 e_2 e_3 - 2e_1 e_2 e_1 = 0.$$

No obstante, no es inframonogénico:

$$\underline{\partial} \vec{q} \underline{\partial} = 2e_1 e_2 e_1 - 2e_2 e_2 e_2 = 4e_2 \neq 0.$$

Este campo vectorial satisface cada una de las condiciones de los Teoremas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4; pero este ejemplo es poco ilustrativo para mostrar cada una de las representaciones encontradas en estos teoremas por ser un desplazamiento universal en los sistemas generalizados.

Una solución menos simple a sistemas generalizados es la que se mostrará en el siguiente ejemplo. Se comprobará que la función vectorial $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3^2 + x_2) e_1 - \frac{1}{2} x_3^2 e_2 + 2x_1 x_3 e_3, \quad (29)$$

es solución específica para el sistema generalizado de Lamé-Navier que se conforma con los conjuntos estructurales siguientes:

$$\varphi_2 = (e_1, e_2, e_3),$$

$$\psi_2 = (e_3, e_1, e_2),$$

y con los coeficientes $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,3$. Se obtiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \underline{\partial} \vec{v} \psi_2 \underline{\partial} &= e_1(2e_1)e_3 + e_3(2e_1)e_2 - e_3e_2e_2 + 2e_1e_3e_2 + 2e_3e_3e_3 \\ &= -2e_3 + 2e_1e_2e_3 + e_3 - 2e_1e_2e_3 - 2e_3 \\ &= -3e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \underline{\partial} \psi_2 \underline{\partial} \vec{v} &= 2e_1e_3e_1 + 2e_3e_2e_1 - e_3e_2e_2 + 2e_1e_2e_3 + 2e_3e_3e_3 \\ &= 2e_3 - 2e_1e_2e_3 + e_3 + 2e_1e_2e_3 - 2e_3 \\ &= e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,1;0,3}^{\varphi_2, \psi_2} \vec{v} &= 0,1 \cdot \varphi_2 \underline{\partial} \vec{v} \psi_2 \underline{\partial} + 0,3 \cdot \varphi_2 \underline{\partial} \psi_2 \underline{\partial} \vec{v} \\ &= 0,1 \cdot (-3e_3) + 0,3 \cdot (e_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo que resta de esta sección se dedicará a estudiar la siguiente función vectorial $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = 3x_2x_3e_1 + (2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_1e_3. \quad (30)$$

Sean los conjuntos estructurales siguientes:

$$\varphi_3 = (e_3, -e_1, e_2),$$

$$\psi_3 = (e_3, e_1, e_2).$$

Note que:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} &= -2 + 4 - 2 = 0, \\ \varphi_3 \underline{\partial} \psi_3 \underline{\partial} \vec{u} &= -2e_3e_3e_2 - 4e_1e_1e_2 - 2e_2e_2e_2 - 3e_1e_2e_1 + 3e_2e_1e_1 \\ &= 2e_2 + 4e_2 + 2e_2 - 3e_2 - 3e_2 \\ &= 2e_2, \\ \varphi_3 \underline{\partial} \vec{u} \psi_3 \underline{\partial} &= -2e_3e_2e_3 - 4e_1e_2e_1 - 2e_2e_2e_2 - 3e_1e_1e_2 + 3e_2e_1e_1 \\ &= -2e_2 - 4e_2 + 2e_2 + 3e_2 - 3e_2 \\ &= -4e_2. \end{aligned}$$

Si se toman como coeficientes de Lamé a $\alpha = 0,1$ y $\beta = 0,2$ se obtendrá que $\vec{u}$ es solución armónica del sistema generalizado de Lamé-Navier conformado con los conjuntos estructurales φ_3 y ψ_3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi_3, \psi_3}^* \vec{u} &= 0,1 \cdot \varphi_3 \underline{\partial} \vec{u} \psi_3 \underline{\partial} + 0,3 \cdot \varphi_3 \underline{\partial} \psi_3 \underline{\partial} \vec{u} \\ &= 0,1 \cdot (-4e_2) + 0,2 \cdot (2e_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 4.3 de **Santiesteban, Blaya y Alejandro**, 2022b, se obtiene que el anterior campo vectorial $\vec{u}$ admite en $\mathbb{R}^3$ la descomposición

$$\vec{u} = h + i^*,$$

donde h e i^* son funciones que toman valores en $\mathbb{R}_{0,3}$ tales que $\varphi_3 \underline{\partial} \psi_3 \underline{\partial} h = 0$ y $\psi_3 \underline{\partial} i^* \varphi_3 \underline{\partial} = 0$. Las fórmulas explícitas para las componentes de esta descomposición son:

$$\begin{aligned} h &= \left(4\alpha - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} - \frac{2\beta^2}{\alpha}\right)^{-1} \left[\left(g - \frac{\alpha}{\beta} \bar{g}\right) \underline{x} + \left(2\alpha + \beta - \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{2\beta^2}{\alpha}\right) \vec{u} \right] \\ e \\ i^* &= - \left(4\alpha - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} - \frac{2\beta^2}{\alpha}\right)^{-1} \left[\left(g - \frac{\alpha}{\beta} \bar{g}\right) \underline{x} - \left(2\alpha - \beta - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta}\right) \vec{u} \right], \end{aligned}$$

donde $g = \alpha \vec{u} \psi_3 \underline{\partial} + \beta \psi_3 \underline{\partial} \vec{u}$ y en este caso se toma a $\underline{x}$ como $\underline{x} = e_3x_1 + e_1x_2 + e_2x_3$. Hállese a continuación la representación presentada en Teorema 3.3:

$$\begin{aligned} \vec{u} \psi_3 \underline{\partial} &= -2x_1e_2e_3 + 3x_3e_1e_1 + 4x_2e_2e_1 + 3x_2e_1e_2 - 2x_3e_2e_2 - 1 \\ &= -3x_3 + 2x_3 - x_2e_1e_2 - 2x_1e_2e_3 - 1 \\ &= -x_3 - x_2e_1e_2 - 2x_1e_2e_3 - 1, \\ \psi_3 \underline{\partial} \vec{u} &= -x_3 + x_2e_1e_2 + 2x_1e_2e_3 - 1, \\ g &= -0,3x_3 - 0,3 + 0,1x_2e_1e_2 + 0,2e_2e_3, \\ \bar{g} &= -0,3x_3 - 0,3 - 0,1x_2e_1e_2 - 0,2x_1e_2e_3, \\ g - \frac{0,1}{0,2} \bar{g} &= g - \frac{1}{2} \bar{g} = -0,15x_3 - 0,15 + 0,15x_2e_1e_2 + 0,3x_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Se procede a calcular primeramente las siguientes funciones:

$$I^* = (g - \frac{\alpha}{\beta}\bar{g})\underline{x} - (2\alpha - \beta - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta})\bar{u}$$

$$H = (g - \frac{\alpha}{\beta}\bar{g})\underline{x} - (2\alpha - \beta - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta})\bar{u} + (4\alpha - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} - \frac{2\beta^2}{\alpha})\bar{u}.$$

Calcúlese luego que

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta} &= 0,2 - 0,2 - \frac{2(0,1)^3}{(0,2)^2} + \frac{(0,1)^2}{0,2} \\ &= -\frac{0,002}{0,04} + \frac{0,01}{0,2} \\ &= -0,05 + 0,05 \\ &= 0, \\ 4\alpha - \frac{2\alpha^3}{\beta^2} - \frac{2\beta^2}{\alpha} &= 0,4 - \frac{2(0,1)^3}{(0,2)^2} - \frac{2(0,2)^2}{0,1} \\ &= 0,4 - 0,05 - 0,8 \\ &= -0,45. \end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular $(g - \frac{1}{2}\bar{g})\underline{x}$:

$$\begin{aligned} (g - \frac{1}{2}\bar{g})\underline{x} &= (-0,15x_3 - 0,15 + 0,15x_2e_1e_2 + 0,3x_1e_2e_3)(x_1e_3 + x_2e_1 + x_3e_2) \\ &= -0,15x_1x_3e_3 - 0,15x_2x_3e_1 - 0,15x_3^2e_2 + 0,15x_1x_2e_1e_2e_3 \\ &\quad + 0,15x_2^2e_2 - 0,15x_2x_3e_1 - 0,3x_1^2e_2 + 0,3x_1x_2e_1e_2e_3 + 0,3x_1x_3e_3 \\ &\quad - 0,15x_1e_3 - 0,15x_2e_1 - 0,15x_3e_2 \\ &= (-0,15x_2 - 0,3x_2x_3)e_1 + (0,15x_2^2 - 0,15x_3^2 - 0,3x_1^2 - 0,15x_3)e_2 \\ &\quad + (0,15x_1x_3 - 0,15x_1)e_3 + (0,45x_1x_2)e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} I^* &= (-0,15x_2 - 0,3x_2x_3)e_1 + (0,15x_2^2 - 0,15x_3^2 - 0,3x_1^2 - 0,15x_3)e_2 \\ &\quad + (0,15x_1x_3 - 0,15x_1)e_3 + (0,45x_1x_2)e_1e_2e_3, \\ H &= (-0,15x_2 - 0,3x_2x_3)e_1 + (0,15x_2^2 - 0,15x_3^2 - 0,3x_1^2 - 0,15x_3)e_2 \\ &\quad + (0,15x_1x_3 - 0,15x_1)e_3 + (0,45x_1x_2)e_1e_2e_3 - 0,45\bar{u} \\ &= (-0,15x_2 - 1,65x_2x_3)e_1 + (-0,75x_2^2 + 0,3x_3^2 + 0,15x_1^2 - 0,15x_3)e_2 \\ &\quad + (0,15x_1x_3 - 0,6x_1)e_3 + (0,45x_1x_2)e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

El siguiente paso es expresar que $h = -\frac{20}{9}H$ e $i^* = \frac{20}{9}I^*$. De esta forma, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} h + i^* &= \frac{20}{9}(I^* - H) \\ &= \frac{20}{9}[1,35x_2x_3e_1 + (0,9x_2^2 - 0,45x_3^2 - 0,45x_1^2)e_2 + 0,45x_1e_3] \\ &= 3x_2x_3e_1 + (2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_1e_3 \\ &= \bar{u}. \end{aligned}$$

Compruébese que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_3 \underline{\partial} \psi_3 \underline{\partial} H &= e_3 e_3 (0, 3e_2) - e_1 e_1 (-1, 5e_2) + e_2 e_2 (0, 6e_2) + e_3 e_1 (0, 45e_1 e_2 e_3) \\
 &\quad - e_1 e_3 (0, 45e_1 e_2 e_3) - e_1 e_2 (-1, 65e_1) - e_1 e_2 (-1, 65e_1) \\
 &\quad + e_3 e_2 (0, 15e_3) + e_2 e_3 (0, 15e_3) \\
 &= -0, 3e_2 - 1, 5e_2 - 0, 6e_2 - 0, 45e_2 - 0, 45e_2 + 1, 65e_2 + 1, 65e_2 \\
 &\quad + 0, 15e_2 - 0, 15e_2 \\
 &= 0, \\
 \psi_3 \underline{\partial} I^* \varphi_3 \underline{\partial} &= e_3 (-0, 6e_2) e_3 - e_1 (0, 3e_2) e_1 + e_2 (-0, 3e_2) e_2 + e_3 (0, 15e_3) e_2 \\
 &\quad + e_2 (0, 15e_3) e_3 - e_3 (0, 45e_1 e_2 e_3) e_1 + e_1 (0, 45e_1 e_2 e_3) e_3 \\
 &\quad + e_1 (-0, 3e_1) e_2 - e_2 (-0, 3e_1) e_1 \\
 &= -0, 6e_2 - 0, 3e_2 + 0, 3e_2 - 0, 15e_2 - 0, 15e_2 + 0, 45e_2 + 0, 45e_2 \\
 &\quad + 0, 3e_2 - 0, 3e_2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

O sea, h es (φ_3, ψ_3) -armónica e i^* es (ψ_3, φ_3) -inframonogénica. Aprecie además que i^* no es (φ_3, ψ_3) -inframonogénica en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 \varphi_3 \underline{\partial} I^* \psi_3 \underline{\partial} &= e_3 (-0, 6e_2) e_3 - e_1 (0, 3e_2) e_1 + e_2 (-0, 3e_2) e_2 + e_2 (0, 15e_3) e_3 \\
 &\quad + e_3 (0, 15e_3) e_2 - e_1 (0, 45e_1 e_2 e_3) e_3 + e_3 (0, 45e_1 e_2 e_3) e_1 \\
 &\quad + e_2 (-0, 3e_1) e_1 - e_1 (-0, 3e_1) e_2 \\
 &= -0, 6e_2 - 0, 3e_2 + 0, 3e_2 - 0, 15e_2 - 0, 15e_2 - 0, 45e_2 - 0, 45e_2 \\
 &\quad + 0, 3e_2 - 0, 3e_2 \\
 &= -1, 8e_2 \\
 &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Se concluye que no necesariamente en el Teorema 3.3 la función i^* será a la vez (ψ, φ) -inframonogénica y (φ, ψ) -inframonogénica. Este hecho puede suceder, por ejemplo, si al construir i^* se obtiene un campo vectorial y entonces $i^* \in \mathcal{J}_{\psi, \varphi}(\Omega) \cap \mathcal{J}_{\varphi, \psi}(\Omega)$.

Discusión

El uso de las modernas técnicas del análisis de Clifford en la teoría de la Elasticidad Lineal permite arribar a apreciaciones diferentes y a generalizaciones naturales en altas dimensiones. Las descomposiciones aditivas presentadas en este trabajo brindan una mayor comprensión de la estructura del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier. La particular relación entre determinadas soluciones del sistema elástico no homogéneo con las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas abre nuevas líneas de investigación dentro de la teoría de la elasticidad multidimensional. Es importante mencionar que el sistema de Lamé-Navier (17) puede ser extendido directamente a $\mathbb{R}^m$, $m > 3$, y sobre campos k -vectoriales:

$$\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^* F_k := \left(\frac{\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial} F_k \underline{\partial} + \left(\frac{3\mu + \lambda}{2} \right) \underline{\partial}^2 F_k = 0, \quad (31)$$

donde $F_k \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$. De la misma forma también puede ser extendido el sistema generalizado (19). En este contexto Cliffordiano el operador $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}^*$ tiene el mismo rol del operador de Lamé-Navier en $\mathbb{R}^3$: $\mu \Delta + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot$.

Conclusiones

Las funciones inframonogénicas permiten comprender los desplazamientos del sistema de Lamé-Navier desde el punto de vista matemático. La descomposición de este como suma de un campo vectorial armónico y uno inframonogénico es esencial en la búsqueda de nuevas representaciones para las soluciones de la ecuación de equilibrio; así como para el estudio de problemas de frontera en el contexto multidimensional. La consideración de conjuntos estructurales brinda la flexibilidad para asociar toda una gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con el sistema de Lamé-Navier. Las nuevas representaciones aditivas que surgen de estos sistemas más generales posibilitan que sean objeto de estudio para investigaciones futuras en el área. La pregunta hipotética de que si alguno de estos sistemas generalizados de Lamé-Navier modela de forma directa a otros fenómenos físicos, dentro y fuera de la mecánica de medios continuos, continúa abierta y con optimismo se piensa en una respuesta positiva.

Agradecimientos

Daniel Alfonso Santiesteban agradece la Beca Nacional para Estudios de Posgrado de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) (CVU: 1043969).

Contribución de los autores

Todos los autores contribuyeron por igual al estudio, leyeron y aprobaron la versión final del manuscrito enviado.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no tienen intereses en competencia con respecto a la publicación de este artículo.

Disponibilidad de datos y material suplementario

No aplicable.

Disponibilidad de códigos

No aplicable.

Referencias

- Álvarez, L. M., García, A. M., Alejandre, M. Á., Blaya, R. A. (2023) Two Spheres Uniquely Determine Infrabimonogenic Functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(318), 1-18.
- Barber, J., Klarbring, A. (2003) *Solid mechanics and its applications*. Springer, Berlin.
- Blaya, R. A., Reyes, J. B., Guzmán, A., Kähler, U. (2016) On the Π -operator in Clifford Analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 434, 1138-1159.
- Blaya, R. A., Reyes, J. B., Guzmán, A., Kähler, U. (2017) On the ϕ -Hiperderivative of the ψ -Cauchy-Type Integral in Clifford Analysis. *Computational Methods and Function Theory*, 17, 101-119.
- Bock, S., Gürlebeck, K., Legatiuk, D., Nguyen, H. M. (2015) ψ -Hyperholomorphic functions and a Kolosov-Muskhelishvili formula. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38, 5114-5123.
- Brackx, F., Delanghe, R., Sommen, F. (1982) *Clifford analysis*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, Wiley.
- Delanghe, R. (1970) On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. *Mathematische Annalen*, 185, 91-111.
- Delanghe, R. (2001) Clifford Analysis: History and Perspective. *Computational Methods and Function Theory*, 1(1), 107-153.
- Delanghe, R., Reyes, J. B. (2003) An invitation to Clifford Analysis. *Ciencias Matemáticas*, 21(2), 109-137.
- Delanghe, R., Sommen, F., Souček, V. (1992) *Clifford algebra and spinor-valued functions. A function theory for the Dirac operator* (Vol. 53). Nature Publishing Group.
- Dinh, D. C. (2014) On structure of inframonogenic functions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 31, 1-12.
- Dirac, P. (1928) The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117(778), 610-624.
- Fung, Y. (1965) *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- García, A. M., García, T. M., Blaya, R. A. (2022) Comparing harmonic and inframonogenic functions in Clifford Analysis. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19, 1-19.
- García, A. M., García, T. M., Blaya, R. A., Reyes, J. B. (2017) A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1147-1159.
- García, A. M., García, T. M., Blaya, R. A., Reyes, J. B. (2018) Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41, 3622-3631.
- García, A. M., García, T. M., Blaya, R. A., Reyes, J. B. (2020) Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43, 1915-1924.
- García, A. M., Santiesteban, D. A., Blaya, R. A. (2023) On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball. *Journal of Differential Equations*, 364, 498-520.
- Grigoriev, Y. (2016) Regular quaternionic functions and their applications in three-dimensional elasticity. *XXIV ICTAM Regular Quaternionic*, 1, 21-26.
- Gürlebeck, K., Habetha, K., Sprößig, W. (2008) *Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Gürlebeck, K., Nguyen, H. M. (2015) ψ -Hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings*, 1648, 440005.
- Gürlebeck, K., Nguyen, H. (2014) On ψ -hyperholomorphic Functions and a Decomposition of Harmonics. *Hyper complex Analysis: New Perspectives and Applications. Trends in Mathematics*, 181-189.

- Gürlebeck, K., Sprössig, W.** (1990) *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Springer-Verlag New York Inc., New York.
- Gürlebeck, K., Sprössig, W.** (1997) *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. Springer-Verlag New York Inc., New York.
- Krausshar, R., Malonek, H.** (2001) A characterization of conformal mappings in $\mathbb{R}^4$ by a formal differentiability condition. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 70(1), 35-49.
- Lamé, G.** (1837) Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, 147-188.
- Lávicka, R.** (2011) The Fischer decomposition for the H-action and its applications. *Hypercomplex analysis and applications trends in mathematics*. Edited by Sabadini and F. Sommen, 1.
- Malonek, H., Peña-Peña, D., Sommen, F.** (2010) Fischer decomposition by inframonogenic functions. *CUBO A Mathematical Journal*, 12, 189-197.
- Malonek, H., Peña-Peña, D., Sommen, F.** (2011) A Cauchy-Kowalevski Theorem for Inframonogenic Functions. *Math. J. Okayama Univ.*, 53, 167-172.
- Malvern, L.** (1969) *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Marsden, J., Hughes, T.** (1983) *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications.
- Muskhelishvili, N.** (1953) *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Vol. 15). Noordhoff Groningen, Springer.
- Nguyen, H. M.** (2015) *ψ -Hyperholomorphic Function Theory in $\mathbb{R}^3$: Geometric Mapping Properties and Applications* [Tesis doctoral, Fakultät Bauingenieurwesen der Bauhaus-Universität].
- Niyozov, I., Makhmudov, O.** (2014) The Cauchy problem of the moment elasticity theory in $\mathbb{R}^m$. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 58(204).
- Nôno, K.** (1986) On the quaternion linearization of Laplacian Δ . *Bulletin of Fukuoka University of Education. Part III. Mathematics, Natural Sciences and Technology*, 35, 5-10.
- Nôno, K., Inenaga, Y.** (1987) On the Clifford linearization of Laplacian. *Journal of the Indian Institute of Science*, 67(5-6), 203-208.
- Patrault, D. W., Bock, S., Gürlebeck, K.** (2014) Three-dimensional elasticity based on quaternion-valued potentials. *International Journal of Solids and Structures*, 51, 3422-3430.
- Peña, C. Á., Morais, J., Porter, R. M.** (2023) Reduced-quaternion inframonogenic functions on the ball. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(18), 18935-18951.
- Reséndis, F., Shapiro, M.** (2002) Recent advances in hypercomplex analysis. *Carta Informativa, Sociedad Matemática Mexicana*, Marzo, 11-14.
- Reyes, J. B., Schepper, H. D., Adán, A. G., Sommen, F.** (2016) Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 4787-4796.
- Ricardo, J. L. S., Blaya, R. A., Reyes, J. B., Ortiz, J. S.** (2022) On a Riemann-Hilbert boundary value problem for (φ, ψ) -harmonic functions in $\mathbb{R}^m$. *Georgian Mathematical Journal*, 29, 445-454.
- Ricardo, J. S., Reyes, J. B., Blaya, R. A.** (2021) Singular integral operators and a $\bar{\partial}$ -problem for (φ, ψ) -harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics*, 11(155), 1-25.
- Russell, M., Brown, I.** (2009) The mixed problem for the Lamé system in a class of Lipschitz domains. *Journal of Differential Equations*, 246, 2577-2589.
- Ryan, J.** (2000) Basic Clifford analysis. *Cubo Matemática Educacional*, 2, 226-256.

- Ryan, J.** (2004) Introductory Clifford Analysis. In *Ablamowicz, Rafal and Sobczyk, Garret (Eds.) Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications*. Boston, MA: Birkhäuser.
- Sadd, M.** (2005) *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier, Oxford.
- Santiesteban, D. A.** (2024) $\bar{\partial}$ -problem for a second order elliptic system in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47, 9718-9728.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A.** (2022) Isomorphisms of partial differential equations in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 32(10), 1-18.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á.** (2022a) On (ϕ, ψ) -inframongenic functions in Clifford analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 53, 605-621.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á.** (2022b) On a generalized Lamé-Navier system in $\mathbb{R}^3$. *Mathematica Slovaca*, 72(6), 1527-1540.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á.** (2023) Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de Lamé-Navier. *Publicaciones e Investigación*, 17(1), 1-9.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Pérez, Y. P., Almira, J. S.** (2024) Fractional Fischer decompositions by inframongenic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 539, 128468.
- Santiesteban, D. A., Blaya, R. A., Reyes, J. B.** (2023) Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46, 15784-15798.
- Santiesteban, D. A., Pérez, Y. P., Blaya, R. A.** (2022) Generalizations of harmonic functions in $\mathbb{R}^m$. *Analysis and Mathematical Physics*, 12(10), 1-12.
- Shapiro, M. V., Vasilevski, N.** (1995) Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. ψ -hyperholomorphic function theory. *Complex Variables*, 27, 17-46.
- Shapiro, M.** (1997) On the conjugate harmonic functions of M. Riesz-E. Stein-G. Weiss. In: *Dimiev, S. et al. (eds.), Topics in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, Third International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, St. Konstantin, Bulgaria, August*, 23-29.
- Sommen, F., Sprössig, W.** (2002) Introduction to Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 25(6), 1337-1342.
- Valencia, D. G., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á.** (2021) On the Plane Lamé-Navier System in Fractal Domains. *Complex Analysis and Operator Theory*, 15, 1-15.
- Valencia, D. G., Blaya, R. A., Alejandre, M. Á., Pérez, Y. P.** (2023) On the Riemann problem in fractal elastic media. *Analysis and Mathematical Physics*, 13(1), 1-15.
- Wang, L., Jia, S., Luo, L., Qiu, F.** (2022) Plemelj formula of inframongenic functions and their boundary value problems. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 68(7), 1158-1181.