MATEMATICAS, EXPLICAR Y COMPRENDER*

por

Luis Moreno Armella**

Resumen

Moreno Armella, L. : Matemáticas, explicar y comprender. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **20**(78): 539-547, 1996. ISSN 0370-3908.

Se presenta un análisis de los períodos centrales ocurridos en la evolución histórica de la geometría, haciendo énfasis en el camino que condujo a la creación de las geometrías no euclidianas, proceso demostrable en forma óptima a través del marco conceptual suministrado por una epistemología constructivista.

Palabras claves: geometría no euclidiana - empirismo - racionalismo - objeto matemático - estructura formal.

Abstract

We intend to analyse some of the main periods of the evolution of geometry. Our interest is focused in those trends which led to non-Euclidian geometry. The conceptual framework adopted for interpreting the involved historical processes are provided by a constructivist epistemology; our goal is to show that the construction of non-Euclidian geometry can be best interpreted from that conceptual framework.

Key words: Non-Euclidian geometry - empiricism - rationalism - mathematical object - formal structures.

Introducción

La oportunidad es propicia para intentar una reflexión sobre la actividad científica y, en particular, sobre la matemática.

Hablaremos de epistemología. Entendemos el vocablo «epistemología», como el *estudio de la constitución de los conocimientos válidos*. Tendremos que explicar lo que se entiende por conocimiento, por validez del conocimiento y por su constitución. Para ello, vamos a recurrir a unos ejemplos tomados de la historia de las ideas científicas, a su sociogénesis y al origen psicológico de las nociones y operaciones conceptuales.

Como se habla de validez, no podrán quedar al margen las estructuras lógicas de las organizaciones cognoscitivas y, en particular, las transformaciones que sufren cuando se pasa de un nivel de conocimientos a otro nivel que, por su grado de organización, consideramos superior.

** Dedicado a doña Emma Armella B.

* Centro de Investigación y estudios avanzados del IPN, México.

Este es un punto de vista genético.

Con cierta frecuencia se habla del conocimiento científico como «negador de su historia». Y se ha entendido que lo pertinente de una forma de conocimiento se halla en su estado presente.

Una consecuencia negativa de tal enfoque positivista se encuentra de inmediato en la educación. Las concepciones que tienen los docentes sobre la ciencia, impactan profundamente sus prácticas educativas; ha sido difícil modificar un estilo educativo que considera al conocimiento como una organización conceptual *que puede transmitirse tal cual ella* es, al margen del decodificador, del constructor de significados. Al margen del estudiante.

De allí que la reflexión sobre la naturaleza del conocimiento científico nos parezca de primerísima actualidad en nuestras sociedades, si es que estas buscan no sólo adoptar sino también contribuir al desarrollo de una cultura científica propia y construir un sistema educativo que responda a sus esperanzas.

La epistemología realista

La presencia de aquellas epistemologías que suponen *la existencia de una realidad independiente del sujeto cognoscente,* no puede explicarse al margen de su desarrollo histórico. Sus orígenes se encuentran en la filosofía griega y hay razones para que hayan sido parte central de la ideología dominante durante un buen tramo de nuestra historia intelectual.

La reflexión sistemática sobre la naturaleza, tal como se desarrolló en Grecia, se orientó a teorizar sobre el mundo material. Los filósofos presocráticos han dejado constancia de ello. Sus estudios sobre *lo uno y lo múltiple,* sobre la permanencia y el cambio, ejercieron una marcada influencia sobre el desarrollo posterior de la filosofía. Ante la diversidad, Heráclito escribió que lo sustantivo era la estructura del mundo, su organización.

En la escuela pitagórica, se arribó a una concepción aritmética: *todas las cosas son número.* Entonces, para comprender el mundo material, había que hallar el número que portaba la esencia de cada cosa.

Todas estas ideas nos hablan de una preocupación por *modelar de maneras estructurales y matemáticas las observaciones.* No podemos dejar de mencionar a este respecto una concepción expresada muchos siglos después, por Galileo, que pone de manifiesto esta suerte de alma numérica del mundo:

La naturaleza está escrita en ese gran libro que tenemos abierto siempre ante nuestros ojos, pero no podemos entenderla si primero no aprendemos el lenguaje en que está escrita. El libro está escrito en lenguaje matemático y sus símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras sin cuya ayuda es imposible entender una sola palabra; sin la cual caminamos a ciegas por un oscuro laberinto. (Galileo, El Ensayador, 1610).

La realidad profunda es matemática. Para Galileo, el experimento era la vía para acceder a ese conocimiento. Digamos de inmediato que la experimentación es una característica de la ciencia que estuvo ausente del método de indagación de los griegos, que era esencialmente especulativo.

Los ejes del posterior desarrollo filosófico griego están encarnados por Platón y su discípulo Aristóteles. Su contribución al pensamiento filosófico es, de acuerdo con Russell, el mayor que se ha desplegado en toda la historia de la filosofía. Ellos representan las escuelas que serán conocidas como *idealismo* (Platón) y *empirismo* (Aristóteles).

Platón distinguía claramente entre el mundo material y el mundo (superior) de las ideas. Los objetos materiales y sus relaciones eran imperfectos, estaban sometidos al cambio y la decadencia; no podían representar las verdades últimas. Para ello estaba el mundo de las ideas, absoluto e inmodificable. Eran las verdades de este mundo las que interesaban al pensador: *las cosas materiales son como las sombras de las ideas que se arrojan al tablero de la experiencia.* Como Pitágoras, Platón sostenía que la inteligibilidad del mundo material sólo era posible mediante la matemática. Pero, ¿cómo era posible acceder a ese conocimiento? para responder esta pregunta utilizó un recurso magistral: *conocer es recordar.*

En efecto, al reflexionar con ayuda de una figura imperfecta, nuestro espíritu recuerda las propiedades esenciales del verdadero objeto (el ideal). La actividad cognitiva se reduce así al reconocimiento de lo que constituye una verdad sin mácula. En su diálogo Menón, se expone esta peculiar forma de cognición; en él, Sócrates conduce a un esclavo, a través de un cuestionamiento muy hábil, al descubrimiento de una versión del teorema de Pitágoras. La idea es que, el diálogo, permite al esclavo tomar conciencia del conocimiento que descansa en su espíritu. Reconocer un triángulo, una esfera o cualquier otra figura geométrica es reconocer una copia del «molde» perfecto que existe como idea.

Su discípulo Aristóteles se opuso. Para él, el molde existía, pero era resultado de una abstracción después de haber tenido experiencias con muchas figuras concretas. En su sistema de ideas, el conocimiento lo era del mundo material. Se generaba mediante la intuición y la abstracción. La matemática era un instrumento que ayudaba en la investigación del mundo; suministraba el lenguaje para tratar con propiedades formales como eran las propiedades aritméticas y geométricas de los cuerpos. De acuerdo a sus planes, tal esfuerzo debía tener como recompensa la conquista de verdades sobre la naturaleza.

Se explicaba el éxito de las aplicaciones de las matemáticas a la óptica y la astronomía, por ejemplo, puesto que aquella disciplina era resultado de la abstracción a partir de los objetos materiales. La geometría versaba sobre figuras que representaban abstracciones de cuerpos continuos; la aritmética versaba sobre el número, abstracción de lo discreto. La epistemología aristotélica es empirista, pues sostiene que el origen del conocimiento (científico) está en las percepciones sensoriales del sujeto cognoscente. Además es realista pues para él, los conceptos están en una realidad externa al sujeto e independiente de él.

Los elementos de Euclides y la geometría no-euclidiana

Antes de la presentación axiomática de la geometría de Euclides, lo que existe es una geometría empírica basada, en alto grado, sobre la estructura de las figuras dibujadas. Sobre esta base se inicia el desarrollo del método deductivo que permite ir más allá de la mera verificación visual de los resultados.

El paso de lo visual a lo deductivo representa un cambio normativo en la matemática de profundas repercusiones. Está vinculado a las aplicaciones geométricas (como calcular la distancia de un barco a la costa) que no admiten una posterior comprobación; debieron por ello, tener una función importante en la toma de conciencia de la necesidad de perfeccionar el método deductivo como instrumento de validación en el seno de la geometría.

La teoría del conocimiento propuesta por Aristóteles estableció bases claras entre los objetos naturales y los objetos matemáticos que son resultado de la abstracción de aquellos. El dictum aristotélico: *todo cuerpo de conocimiento a lo largo de su desarrollo se orienta a la búsqueda de sus principios,* se tradujo después de considerables esfuerzos, en el sistema euclidiano clásico.. Cada verdad que se hubiera conocido antes de Los Elementos, era recuperada por la vía deductiva con lo cual cambiaba substancialmente su estatus epistemológico.

La geometría euclidiana en su momento, es la respuesta al problema de la *representación matemática del espacio físico.* Para entender el sentido de este aserto, recordemos que el conocimiento en la epistemología aristotélica, debe agotar al objeto que captura, pues lo captura tal como él es «en realidad».

Del objeto material al objeto matemático.

Los objetos matemáticos pueden tener una *autonomía lógica* pero, *ontológicamente,* permanecen dependientes de los objetos físicos y, en consecuencia, aquellos objetos están obligados a respetar los límites impuestos a los objetos físicos por la finitud del mundo. Desde esta perspectiva, el objeto *«magnitud matemática»* permanece subordinado al objeto *«magnitud física».* Por ejemplo, la magnitud matemática sólo puede ser infinita en potencia. Hay un control permanente, de orden ontológico, sobre los objetos de esa matemática euclidiana. Los postulados debían ser «evidentes por sí mismos» , carácter que heredaban de las condiciones materiales de las que provenían. Estas consideraciones ayudan a entender por qué Euclides hizo un esfuerzo considerable para mantener al Postulado de las Paralelas al margen de su desarrollo geométrico. En efecto, decir que:

por un punto exterior a una recta pasa una única paralela,

equivale a hacer una afirmación que elude el control del objeto físico correspondiente. En este momento de la obra estamos ante un postulado, de allí que tenemos que mantener ante nuestros ojos el problema ontológico y, en consecuencia, los límites impuestos a los objetos matemáticos. Como bien se sabe, lo primero que hizo Euclides fue sustituir la versión anterior del postulado de las paralelas por una versión que no mencionaba explícitamente al infinito. El costo fue muy alto: la nueva versión era muy larga, complicada y tenía todas las trazas de ser una proposición deducible de los restantes postulados. Dice así:

Dadas dos rectas y una transversal a ellas, si los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos rectos entonces, al prolongar estas rectas ellas deberán intersectarse del lado de estos ángulos.

De allí que haya suscitado una voluntad de simplificación en sus lectores, ya desde los más tempranos, quienes se dedicaron a tratar de demostrar esta nueva proposición, en lugar de aceptarla como «evidente por sí misma». La historia de estos trabajos es larga, muy larga, como que se despliega a lo largo de mas de veinte siglos. Garantía quizá, que no estamos ante un problema menor del conocimiento. El desenlace de este proceso ha sido la creación de las geometrías no-euclidianas.

La geometría euclidiana es la geometría del espacio físico. Esta hipótesis gravitó todo el tiempo durante los intentos de solución del problema del quinto postulado. Distinguiremos tres grandes periodos en el desarrollo de esta larga exploración. No deberá entenderse sin embargo, que éstos agotan la historia de la fundamentación de la geometría.

1. De Euclides al siglo XVII.

Podríamos llamar a éste el periodo «ingenuo». Los intentos de demostración del quinto postulado se hacen, durante un primer sub-período, tratando de utilizar una propiedad de las paralelas que no se desprende de su definición dentro del sistema euclidiano sino de una imagen construida sobre «cómo debería ser el comportamiento de las rectas». Desde nuestra perspectiva, lo que aquí se tiene es una confusión entre lo que se puede inferir lógicamente de los postulados y lo que se infiere de aquel comportamiento atribuido a los objetos matemáticos en cuestión. A este periodo pertenecen los intentos de Nassir-Eddin, matemático persa (1201-1274) quien atribuye a las paralelas la equidistancia entre ellas. La segunda parte del periodo, está marcado por la introducción de una nueva proposición que sustituye al quinto postulado y, a partir de la cual, se puede alcanzar una demostración de este último. Un ejemplo notable lo proporciona el trabajo de Wallis (1616-1703) durante el siglo XVII, quien supone que

así como existen circunferencias de tamaño arbitrario, también deben existir triángulos semejantes de tamaño arbitrario.

Basado en este aserto de mucho sentido común, Wallis logra dar una demostración del postulado.

Todos estos intentos son fallidos. La atribución de la equidistancia entre paralelas, la existencia de triángulos semejantes que no sean congruentes, son afirmaciones que «respetan la ontología» aunque lógicamente equivalen a lo que se desea demostrar. Es un pecado que los lógicos llaman «petición de principio».

2. La vía del absurdo.

Durante este periodo se cambia el acercamiento al problema. Se trata ahora de considerar como un postulado una de las formas de negación del postulado de las paralelas. A saber, que por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela. El objetivo es desarrollar las consecuencias del nuevo sistema axiomático hasta que aparezca una contradicción. Esta será atribuida a la presencia de una hipótesis absurda (i.e.: la negación del quinto postulado). Como conclusión queda establecida la validez del postulado quinto, puesto que su negación es absurda. Como solía decir Hardy, «el matemático no arriesga una pieza, como el ajedrecista, sino que arriesga la partida».

Hay varias consideraciones que vienen al caso. En primer lugar, los geómetras, después de una larga experiencia fallida, están dispuestos a aceptar como postulado uno que ¡ya no es evidente por sí mismo!

Lo que presenciamos aquí es un abandono inconsciente del control ontológico del objeto matemático a favor de la estructura lógica del sistema geométrico en su conjunto. Decimos inconsciente porque el propósito mismo de la estrategia de solución está determinado por la convicción en la naturaleza euclidiana del espacio. Sin embargo, se ha dado un «giro copernicano» al problema: se trabaja bajo la hipótesis que la esperada contradicción que se quiere ver aparecer en el horizonte, establezca la veracidad de la geometría, lo cual supone (y es aquí donde se presiente la gestación de un nuevo punto de vista) que ahora la estructura matemático-lógica de la geometría puede imponer sus dictados a la ontología, aunque sea para estar de acuerdo con esta. De todas formas, se inicia lo que podríamos llamar *la tematización* de la estructura como objeto de estudio. A este periodo corresponden los trabajos de Saccheri (1667-1733), principalmente, y de otros geómetras.

Una reconcideración epistemológica

Los dos periodos que hemos analizado son solidarios de una concepción epistemológica realista. Ahora, debemos analizar la concepción epistemológica de Kant (1724-1804) que se erigió, quizá sin desearlo, en un formidable obstáculo a los desarrollos geométricos posteriores, pero que, una vez superado, hizo posible a las matemáticas acceder a un nivel de equilibrio conceptual del que no había disfrutado antes.

Hasta entonces, la cognición se subordinó a la concepción (realista) que se tenía de los objetos; para Kant, había llegado la hora de investigar si no se iba más lejos *subordinando el objeto a la cognición.* Hasta aquí, la nueva alternativa heredaba al racionalismo cartesiano, pero Kant sostuvo que la cognición, aunque subordine al objeto, comienza por él. Su epistemología pareciera ser una síntesis del racionalismo (de los pitagóricos, de Platón y de Descartes) y de las epistemologías empiristas (de Aristóteles hasta los empiristas ingleses).

En la introducción de su Crítica de la Razón Pura Kant expresa:

«No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer...como no fuera por medio de objetos que hieren los sentidos...y elaboran así, con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia?...mas si todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia no por ello se origina todo él en la experiencia. Bien podría ser que nuestro conocimiento fuera compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de lo que nuestra facultad de conocer ( ) proporciona por sí misma sin que distingamos este añadido de aquella materia fundamental..." (subrayado nuestro)

De modo que nuestro conocimiento del mundo, no es una representación (en el sentido de una copia) de esa realidad externa en nuestro intelecto, sino una *interpretación*, una reconstrucción que hacemos tomando nuestros registros perceptuales como materia prima y sometiéndolos al influjo de esa "máquina de interpretar y organizar" constituida por nuestro intelecto.

Para Kant, nuestras experiencias sensoriales son posibles como fenómenos que se desarrollan en el espacio y en el tiempo. Pero, espacio y tiempo son las formas de sensibilidad mediante las cuales el intelecto capta las experiencias. *Las formas de sensibilidad* son innatas. Sin ellas las experiencias son imposibles.

Las experiencias son moldeadas por las formas de sensibilidad, así como el agua al entrar al recipiente, adopta la forma de éste. El intelecto pues, impone sus formas a la experiencia.

Nuestro conocimiento lo es del mundo de nuestras experiencias; no tenemos acceso a las «cosas en sí mismas». La objetividad del conocimiento no reside en la «realidad externa» como querían los empiristas, sino en la interacción de aquella con el sujeto. Pero, dado que todos compartimos las mismas formas de sensibilidad, entonces recuperamos la objetividad como un fenómeno intersubjetivo.

Como la intuición del espacio se origina en las forma de sensibilidad correspondiente, consideraremos como natural todas las propiedades del espacio que nos dicta la sensibilidad. Así, los postulados euclidianos y sus consecuencias, forman parte de nuestro conocimiento apriorístico. De modo que imponemos la forma euclidiana a todas nuestras percepciones espaciales y *no podemos concebir otra forma de organización para el espacio.*

La geometría euclidiana y la mecánica de Newton son instrumentos de organización de la experiencia que nos suministra la razón.

Kant desarrolló esta forma de pensar, en parte para dar respuesta a los cuestionamientos de la ciencia natural (la física) de su época. Se propuso realizar un análisis de las condiciones de posibilidad de esa ciencia y hacer una crítica al punto de vista empirista de que el mundo «es así como lo percibimos». Comprendió que debía quedar claro, en el punto de partida, cuáles eran las premisas que podían aceptarse como propias, indubitables.

Oponiéndose tanto al empirismo, que quiere develar al mundo real, como al platonismo de Galileo que supone al mundo preformado de acuerdo a principios matemáticos, Kant elige el camino que lo lleva a afirmar que

sólo es posible dar cuenta de la certeza de la ciencia natural y de sus posibilidades de matematización, si suponemos que la estructura de nuestra experiencia proviene de nuestras facultades cognitivas, que sirven de fundamento a priori a nuestras experiencias.

Sólo así es posible el conocimiento objetivo: estructurando las experiencias de acuerdo a nuestras formas de sensibilidad. De allí surge la posibilidad de matematizar la experiencia -- es la forma de estructurarla. La matematización es central porque es lo que permite extender el conocimiento, mediante la deducción, más allá de los principios.

Durante su tiempo, la revolución científica del siglo XVII que incluía el trabajo de Galileo, de Kepler, de Newton, estaba en un proceso de consolidación. Sus implicaciones no habían sido plenamente digeridas. Por ejemplo, el grado extraordinario de adaptación de la matemática a las ciencias físicas.

¿Por qué debía ser así; de dónde provenía esa correspondencia entre el mundo empírico y la matemática?

Estas preguntas acosaron largo tiempo a Kant. Su respuesta, como hemos visto, incluyó una modificación sustancial de la noción de «mundo empírico» y la atribución de un papel central, mucho más que el otorgado en el racionalismo cartesiano, a las capacidades cognoscitivas del sujeto.

Otro problema, en particular, que interesó a Kant es el referido a los fundamentos de la geometría, tal como venía siendo discutido vía el problema del quinto postulado. Mediante la tematización de la organización axiomática, la geometría empezó a emerger de la esfera pura-mente empirista hacia una fase de mayor organización lógica. Dado el nivel de coordinación existente entre las condiciones materiales y la organización lógica de la geometría, fue posible una suerte de giro copernicano y la estructura formal pasó a ser vista como necesaria, a aparecer como inevitable. No se podía, en consecuencia, contradecir este sistema geométrico sin esperar consecuencias negativas. Este error (error relativo) cometido por Kant, es natural y proviene de atribuir al espacio en su totalidad (allí estaba la clave de su supuesta euclidianidad) un comportamiento que es derivado de nuestra experiencia local de ese espacio.

Tercer período: Gauss y Lobachevski

Ha sido necesaria esta incursión en la epistemología kantiana por dos razones. La primera, para acercarnos al trabajo de este tercer periodo de las geometrías donde se dará una ruptura definitiva con la concepción empírica y racionalista de la geometría y que, además, abrirá la puerta a una reconceptualización del método axiomático en el campo de la matemática. La segunda razón es que la epistemología kantiana se constituyó en la antesala de la epistemología constructivista que corresponde a la ciencia contemporánea. En la última parte del trabajo trataremos este segundo punto.

Gauss (1777-1855) llegó a la universidad de Gotinga en 1795. Entonces, el trabajo de Klügel de 1763, en donde se examinaban alrededor de treinta intentos de demostración del quinto postulado, gozaba de la mayor estima entre los geómetras. La atmósfera era propicia para *dudar de la posibilidad de alcanzar una demostración dentro de los límites impuestos por el sistema axiomático de Euclides*.

En un trabajo publicado en la Gottingischen gelehrte Anzeigen en 1801, el astrónomo Seyffer escribió:

Es altamente improbable que se pueda demostrar esta proposición (el postulado de las paralelas) sin el auxilio de un nuevo postulado, basta tomar en consideración los esfuerzos realizados desde Ptolomeo

Kant falleció en 1804. Había ya señales de que el problema estaba siendo conceptualizado de manera distinta. Se ha conservado mucha de la correspondencia de Gauss en donde se ve cómo fue evolucionando su pensamiento y cómo éste permaneció siempre articulado con sus concepciones epistemológicas.

Hacia finales del siglo XVIII los puntos de vista dominantes sobre el espacio eran los de Kant y los de Newton. En su obra Principia, Newton nos dice que no va a definir ni espacio, ni tiempo puesto que son de todos conocidos. Para él, el espacio «verdadero» coincide con el euclidiano. Dada su autoridad, la naturaleza euclidiana del espacio quedaba fuera de toda duda. Esto debió representar para Kant un fuerte apoyo a sus concepciones sobre el carácter necesario de la geometría euclidiana, y para Gauss y Lobachevski, un formidable obstáculo. Fue en esta atmósfera en la que debieron desarrollar su trabajo.

Si bien en sus inicios Gauss intentó demostrar el quinto postulado, pronto su pensamiento dio un giro y empezó a considerar, cuidadosamente, l*a imposibilidad de una demostración dentro del marco del sistema axiomático.* Razonó así: la demostración del quinto postulado implicaba para los geómetras de generaciones anteriores, que un sistema lógicamente coherente garantizaba la naturaleza euclidiana del espacio. Pero esto no era posible en el marco estrictamente euclidiano pues, de acuerdo a la naturaleza de los objetos geométricos, tal como estos se construían en la epistemología aristotélica, había un control del objeto físico sobre el objeto matemático, no al revés. Si los geómetras, Saccheri incluido, habían supuesto que la prueba de consistencia implicaba la euclidianidad del espacio, era porque inconscientemente *¡habían cambiado las reglas del juego!*

Gauss hizo explícito este cambio de reglas. Separó el problema de la consistencia del sistema axiomático del problema de la naturaleza del espacio físico. Sabiendo que el postulado de las paralelas era equivalente al aserto: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados y, siendo consciente de la diferencia entre las propiedades locales y globales del espacio, calculó la suma de los ángulos del triángulo formado por las cimas de las montañas Brocken, Hohenhagen e Inselberg. Desafortunadamente, el error cometido en la medición estuvo dentro del rango del error experimental permitido por el problema; su «experimento» geométrico no fue concluyente. Gauss, a diferencia de Kant, pensaba que la decisión sobre la naturaleza del espacio físico no podía ser un a priori. Taurinus en 1824:

La hipótesis: «la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados» da lugar a una geometría curiosa, muy diferente a la nuestra (la euclidiana) que he desarrollado a mi entera satisfacción, tanto que puedo, en ella, resolver cualquier problema excepto la determinación de una constante que no puede ser determinada a priori...los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y hasta absurdos...pero calma, una reflexión sostenida revela que no contienen nada imposible. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo se hacen arbitrariamente pequeños si tomamos los lados suficientemente grandes, a pesar de lo cual el área permanece siempre acotada... No encuentro contradicciones en esta geometría no-euclidiana a pesar de todos mis esfuerzos...varias veces he expresado mi deseo de que la geometría euclidiana no fuera verdadera porque entonces tendríamos una unidad absoluta de longitud...

Uno de los resultados aparentemente absurdos se refiere a la fórmula mediante la cual calculamos el área de un triángulo. Suponer que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela implica que, dado un triángulo cuyos ángulos miden (en grados) a, b, y c, su área es:

$$\text{área} = k\,(180 - (a+b+c))$$

donde k es una constante positiva que no se puede determinar a priori. Es claro de esta fórmula, que a diferencia de lo que ocurre con la geometría euclidiana, el área de los triángulos depende de la longitud de los lados así: a medida que aumenta la longitud de los lados, disminuyen los ángulos, y por lo tanto aumenta el arrea, pero *permanece siempre acotada.* Gauss tenía razón en pedirnos calma. El resultado es asombroso. Desde luego, esta situación no puede presentarse en la geometría euclidiana. Recordando a Wallis, él intentó demostrar el quinto postulado tomando como hipótesis adicional que en la geometría podían existir triángulos de área arbitrariamente grande. Su error consistió en usar una hipótesis que es propia de la geometría euclidiana (suponer válido lo que se quería demostrar) *como se explica a partir de la fórmula de Gauss.*

Sin duda que la ausencia de contradicciones en su desarrollo deductivo de la geometría no-euclidiana debió ser un aliciente para que Gauss continuara sus reflexiones sobre el tema que se prolongaron por más de cuarenta años.

La pregunta que siempre guió su pensamiento fue: *¿cuál es la geometría «verdadera»?* en donde «verdadera» se entendía como aquella que tenía capacidad de describir matemáticamente el espacio físico. Es importante leer esta pregunta de cara al resultado área = k(180 — (a+b+c)), que se origina en el dominio matemático y, a los esfuerzos de Gauss por darle un sustento experimental. Nos parece que esta es una aportación central de sus meditaciones sobre la fundamentación de la geometría. Su búsqueda, estuvo orientada a la consecución de un modelo geométrico que sirviera de organizador de *nuestra experiencia* geométrica, que Gauss no veía desvinculada de las capacidades cognoscitivas del ser humano. Veamos un texto de S. von Waltershausen (agradezco al Prof. Bottazzini, de la Universidad de Palermo, haberme facilitado este texto), leído en su obituario:

«Gauss, de acuerdo a sus convicciones más profundas, que expresaba frecuentemente, consideraba la tridimensionalidad del espacio como una propiedad específica de la mente humana. Solía invitarnos a imaginar una especie que sólo estuviera consciente de dos dimensiones; quizá, añadía, 'los que se hallan sobre nosotros pueden vernos de la misma manera'...»

Es decir, no construimos nuestra noción de espacio como una mera abstracción de lo empírico, como hubiera querido Aristóteles, sino que en tal construcción está involucrado cómo conoce el ser humano.

Vale la pena aquí recordar al pensamiento de Poincaré sobre la estructura de la geometría. En 1902, en su obra, La Ciencia y la Hipótesis escribió:

Los axiomas de la geometría no son juicios a priori, ni hechos experimentales. Los axiomas son convenciones; nuestra elección, entre todas las posibles está guiada por los hechos experimentales; pero sigue siendo libre y sólo limitada por la necesidad de coherencia. Es así que los postulados pueden ser rigurosamente verdaderos (aquí Poincaré se refiere a la coherencia del sistema axiomático) aún cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción sólo sean aproximadas.

Debe decirse, empero, que en 1902, Poincaré y muchos otros matemáticos seguían considerando la aritmética como fundada en una noción apriorística del número. Es decir, la refutación kantiana a manos de las geometrías no-euclidianas fue más bien, la explicitación de la necesidad de fijar límites precisos a su esfera de aplicabilidad. Para refutar plenamente a la epistemología kantiana fueron necesarios aún otros esfuerzos tanto en el campo del pensamiento científico como epistemológico.

El trabajo de Gauss no fue conocido sino hasta después que otros pioneros como Lobachevski, hicieron público el suyo. Sólo entonces, Gauss brindó su apoyo a la nueva geometría.

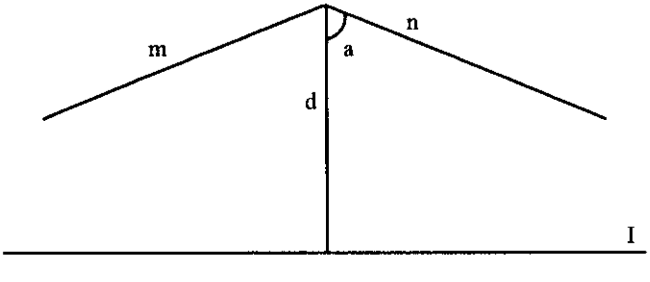
En 1835 Lobachevski escribió (Nuovi Principi della Geometria, Boringhieri, 1974):

Es bien conocido que hasta la fecha, la teoría de las paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos realizados desde los tiempos de Euclides hasta la fecha, a lo largo de más de dos mil años, me han llevado a la convicción de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se deseaba demostrar...convencido de mi conjetura escribí mis argumentos en 1826.

Un punto de vista semejante al de Gauss. Lobachevski no es sólo un lógico, también es un físico, un experimentador. El hecho que la «medición real» nos lleve a concluir la veracidad del teorema de Pitágoras y que la suma de los ángulos del triángulo es 180 grados, tan solo es una prueba de la concordancia de la geometría ordinaria con la experiencia ordinaria, dentro de los límites de la observación ordinaria, y no más allá de éstas. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo puede diferir de 180 grados por una cantidad muy pequeña, insensible a las mediciones prácticas por precisas que estas sean. Pero las diferencias pueden hacerse ostensibles a medida que abandonamos la esfera de nuestra experiencia ordinaria. Esta reflexión llevó a Lobachevski a intentar la exploración empírica de la naturaleza del espacio físico mediante el cálculo de la suma de los ángulos del triángulo formado por la tierra, el sol y la estrella sirio. Desafortunadamente para sus propósitos, todavía a esta escala, las diferencias con respecto a los clásicos 180 grados resultaba despreciable.

Para Lobachevski, los principios geométricos no se derivan exclusivamente de la razón, con independencia de los objetos materiales. Los principios de una ciencia son el resultado último de la investigación, son resultado de un delicado proceso de abstracción. Todo su trabajo puede verse como inmerso dentro de un programa de sistematización de la investigación matemática. El elemento dialéctico de su obra se manifiesta en la toma de conciencia de la existencia de diferentes *esferas de validez* de las «leyes geométricas». La geometría euclidiana era, en este enfoque, la geometría práctica.

Lobachevski utilizó las fórmulas de la trigonometría hiperbólica como soporte de la coherencia lógica de su sistema geométrico. Bajo la hipótesis del ángulo agudo (es decir, que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180 grados), pudo demostrar que en la figura siguiente:



Si las rectas m y n son las paralelas a derecha e izquierda (en la geometría euclidiana el ángulo de paralelismo es recto y por lo tanto las rectas coinciden) entonces se cumple la siguiente relación fundamental:

$$\tan(a/2) = \exp(-d)$$

que muestra, analíticamente, la relación entre la unidad de medida angular y la unidad de medida de longitud. Ahora, a medida que d tiende a cero, el ángulo de paralelismo tiende a 90 grados, con lo cual queda establecido que la geometría euclidiana es un caso límite de la geometría no-euclidiana, y no algo desvinculado radicalmente de ella. Esta fórmula nos sirve para explicar y comprender, como queríamos en el título, por qué se tiene la impresión (que resulta muy práctica) que el espacio es euclidiano. Así es, porque nuestra experiencia es local, porque depende de nuestra estructura cognoscitiva y de su interacción con el espacio de nuestra experiencia. La explicación y la comprensión del fenómeno, sólo pueden provenir del modelo.

Una epistemología constructiva

Einstein, en su trabajo Física y Realidad (1936, Journal of Franklin Institute, vol. 221) después de un análisis manifiestamente epistemológico sobre la construcción del concepto de objeto y de espacio escribe:

Ahora nos damos cuenta, con especial claridad, qué tan erróneo es el punto de vista de aquellos teóricos que piensan que la teoría se extrae inductivamente de la experiencia.

Es decir, la ciencia no es búsqueda de esencias sino organización de la experiencia en modelos que permita la explicación y comprensión de fenómenos.

W. Heisenberg, por su parte, en su obra La partie et le tout (Flammarion, 1972) dice:

Pero en la física atómica, hemos aprendido que nuestras percepciones no pueden apoyarse en un modelo de la «cosa en sí»; [por ejemplo] no hay «átomo en sí». En la mecánica cuántica los resultados de nuestras percepciones no pueden ser objetivados de la misma manera que lo son en la física clásica.

Una de las enseñanzas epistemológicas que se extraen de la lectura de este extraordinario libro, consiste en el hecho que los conceptos que nos sirven para describir nuestra experiencia cotidiana tienen un dominio de aplicación limitado. Frente a términos como «objeto de la percepción», «simultáneo», «temperatura» etc. siempre es posible imaginar situaciones, nos dice Heisenberg, en las cuales estos términos pierdan su significado habitual. Por ejemplo, *¿qué sería la temperatura de un átomo?*

A partir de la toma de conciencia sobre la diferencia entre el tipo de conocimiento que se produce en el interior de una organización matemática y el que se produce cuando tal organización funciona como modelo en las ciencias naturales, el desarrollo de la disciplina fue profundizando la ruptura con las posiciones «sustancialistas». La situación queda descrita en un espléndido texto de Courant, de su libro *¿Qué es la matemática?* (escrito con H. Robbins):

A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos--números, puntos etc.--como cosas substanciales en sí. Pero en vista de que aquellos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas substanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones...la percepción de la necesidad de la desubstanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno.

A lo largo de la historia de las ciencias, las posiciones epistemológicas siempre han consistido en dilucidar los papeles del sujeto cognoscente y dél objeto de conocimiento en la relación

Sujeto <——————————> Objeto

Las epistemologías empiristas privilegiaron siempre el papel desempeñado por el objeto (el conocimiento como copia) y las racionalistas el papel del sujeto. Nuestro análisis contiene elementos suficientes para establecer que el conocimiento se genera como resultado de la interacción. Pero, aún más, que cuando el sujeto se acerca al objeto no lo toma directamente (lo cual sería imposible) sino que lo interpreta. Para ello, pone en juego sus instrumentos asimiladores (sus estructuras cognoscitivas). En los términos felices de N. Hanson (Patterns of Discovery, Cambridge Univ. Press, 1965)

Toda observación está cargada de teoría

Si somos profanos, no vemos a través del microscopio lo que ve el biólogo; no captamos qué tan desafinado está un instrumento, cuando eso es obvio para el músico profesional. De modo que en la construcción del conocimiento, la observación estará guiada por lo que en ese momento son nuestras concepciones, nuestras estructuras cognoscitivas. La asimilación, la observación dependerán entonces del sujeto cognoscente.

Esta forma de ver el proceso de producción del conocimiento compromete de inmediato la manera tradicional de concebir la objetividad. Ahora, *la objetividad del conocimiento* se ve como resultado de la creciente actividad del sujeto cognoscente. Mediante la actividad de coordinación de puntos de vista, avanza en la construcción de dominios consensuales que le permiten la comunicación con los demás.

Hay una observación final que queremos hacer sobre la relación dialéctica entre el sujeto y su objeto de conocimiento. Cuando el sujeto asimila al objeto, esto quiere decir que lo incorpora a sus estructuras de conocimiento. Esta incorporación requiere, en mayor o menor grado, que el sujeto adapte, acomode estas estructuras de conocimiento a los contenidos del objeto asimilado. Y este proceso se realiza una y otra vez. Es decir, se realiza la dialéctica entre forma y contenido.

Jean Piaget, quien tematizó el análisis de los procesos de asimilación y acomodación, para la construcción del conocimiento lo ha dicho de modo inimitable: *el sujeto estructura al mundo al tiempo que estructura sus propias estructuras cognoscitivas.*

Estas son, a grandes rasgos, algunas de las ideas de la epistemología constructivista que fueron delineando Piaget y toda su escuela a lo largo de sesenta años. Epistemología que, ella misma, está en construcción permanente y que responde científicamente, a las exigencias correspondientes de la ciencia de hoy.