

MODELO LOGISTICO: UN PARADIGMA EN LA TEORIA DEL CAOS

por

Diógenes Campos Romero¹

Resumen

Campos-Romero, D.: Modelo logístico: un paradigma en la teoría del caos. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **20(78)**: 503-518. 1996. ISSN 0370-3908.

Se describe la aplicación logística en conexión con el modelo de Verhulst para la dinámica de poblaciones. Se hace énfasis en la distinción entre comportamiento regular y comportamiento caótico. El objetivo de la contribución es introducir al lector en la teoría del caos y mostrar su relevancia para las ciencias naturales.

Palabras claves: Aplicación logística, exponente de Lyapunov, caos.

Abstract

The logistic map is described in connection with the Verhulst model for population dynamics. The distinction between regular and chaotic behavior is stressed. The goal of this paper is to introduce the reader to the chaos theory, and to show its relevance for the natural sciences.

Key words: Logistic map, Lyapunov exponent, chaos.

1. Introducción

La palabra caos aparece en diferentes contextos religiosos, filosóficos, físicos. Si se consulta el diccionario (Real Academia Española 1992), caos es “el estado amorfo e indefinido que se suponía anterior a la constitución del cosmos”. En general, desde los tiempos antiguos este término ha sugerido misterio, incertidumbre, complejidad,

confusión, desorden. En el presente trabajo nos restringimos al uso de esta palabra dentro del contexto de las ciencias naturales. En las tablas 1A y 1B se incluyen algunos datos que facilitan ubicar la presentación dentro de un contexto histórico.

Boltzmann (1844-1906), uno de los fundadores de la teoría estadística de procesos de no equilibrio, supuso que

¹ Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: dcamposr@ciencias.ciencias.unal.edu.co

Año	Autor	Contribución
1687	I. Newton (1642-1727)	Leyes fundamentales de la dinámica clásica y la ley de la gravitación.
1776	P. S. Laplace (1749-1827)	Determinismo y predicción ¹
1883	G. Cantor (1845-1918)	El conjunto de Cantor ²
1871	L. Boltzmann (1844-1906)	Hipótesis ergódica
1903	H. Poincaré (1854-1912)	Aproximación geométrica a la dinámica, el problema de los "pequeños denominadores", albores de la teoría del caos ³ .
	A. M. Lyapunov (1857-1918)	Continúa el trabajo de Poincaré, introduce el concepto de estabilidad en sistemas dinámicos.

Tabla 1A. Algunos datos históricos relevantes en la teoría del caos.

el movimiento molecular en un gas diluido debería ser aleatorio, al azar, desordenado (caos molecular), y que cada molécula exploraría la totalidad del espacio de fase energéticamente accesible a ella. Esta afirmación se identifica con el nombre de hipótesis ergódica. Dentro de este enfoque, un sistema tiene comportamiento caótico (en el sentido de estocástico) como consecuencia de una propiedad interna del sistema y no como resultado de fuerzas aleatorias que lo afecten. El movimiento atómico desordenado desempeña un papel constructivo en la teoría cinética, permitiendo introducir el concepto de función de distribución, determinar con su ayuda valores promedio de magnitudes físicas y describir la manera como el sistema macroscópico se aproxima a la situación de equilibrio termodinámico.

Henry Poincaré (1854-1912) al estudiar el problema de la estabilidad del sistema solar, en un modelo simplificado de tres cuerpos, formuló ideas precisas sobre el comportamiento de sistemas dinámicos. Encontró que bajo ciertas condiciones se presenta un fenómeno conocido con el nombre de *resonancias*, el cual da origen a un movimiento inesperado, altamente irregular (caótico, en lenguaje moderno). Kolmogorov (1954), Arnold (1963) y Moser (1962), en trabajos independientes continuaron con el desarrollo de las ideas de Poincaré y sus esfuerzos conllevaron al teorema KAM, pieza fundamental dentro de la investigación moderna de sistemas dinámicos mecánicos (Lazukin 1991; Lichtenberg and Lieberman 1992).

¹ "Debemos pues considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que debe seguirlo. Una inteligencia que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la

Al partir de las ecuaciones deterministas y reversibles de la mecánica, Poincaré llegó a la conclusión de que la mecánica y la teoría cinética eran incompatibles y recomendó, como consecuencia, omitir la lectura de los trabajos de Boltzmann (Klimontovich 1991). La rivalidad entre la

situación respectiva de los seres que la componen, y que, por otra parte, fuera suficientemente amplia como para someter estos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los de los átomos más ligeros; nada le sería incierto, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante ella". Citado en (Février 1957), pg. 18.

- ² Conjunto de Cantor: conjunto cerrado, totalmente desconectado, subconjunto perfecto del intervalo $[0, 1]$. Un conjunto es totalmente desconectado si no contiene intervalos. El conjunto es perfecto si cada punto es un punto de acumulación o un punto límite de los otros puntos del conjunto (Devaney 1989). Un ejemplo típico es el *conjunto de Cantor del tercio medio* (figura 1), el cual se genera por un proceso iterativo en el cual se remueve el tercio medio de los segmentos previos. Este conjunto tiene longitud cero y dimensión no entera. Nótese que él es más que un punto pero menos que el intervalo $[0, 1]$.
- ³ Una causa muy pequeña que nos pase desapercibida determina un efecto considerable que no podemos evitar ver ... aun si se diera el caso de que las leyes naturales no tuvieran más secretos para nosotros, sólo podríamos conocer la situación inicial aproximadamente ... Puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales generen grandes diferencias en los fenómenos finales. Citado en (Holton and May 1995a), pg. 97

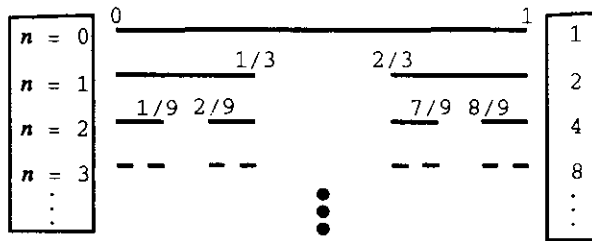


Figura 1. Conjunto de Cantor del tercio medio.

teoría estadística de Boltzmann y la teoría dinámica de Poincaré conllevó al desarrollo de dos aproximaciones diferentes para el estudio de sistemas macroscópicos.

Como consecuencia de desarrollos recientes de la teoría de sistemas dinámicos se sabe que los dos esquemas de pensamiento son compatibles y que existe una estrecha relación entre dinámica no lineal y teoría ergódica. La aplicación logística tratada en el presente artículo servirá para ilustrar este hecho.

La palabra caos se utilizó por primera en la literatura científica en 1975 (Devaney 1992; Hoppensteadt 1993) cuando Li y Yorke publicaron un artículo titulado "Period Three Implies Chaos" (Li y Yorke 1975). Desde entonces, ideas antiguas y modernas, debidamente depuradas, han convergido para dar origen a la *teoría del caos*, esto es, a la disciplina científica que estudia sistemas dinámicos no lineales.

En este artículo utilizamos la aplicación logística para ilustrar algunos hechos característicos de sistemas que presentan comportamiento caótico. La selección de este ejemplo, asociado históricamente con el estudio de dinámica de poblaciones, permite mostrar que el concepto de caos es relevante no sólo en la física, en elucidar la confrontación Boltzmann-Poincaré, sino también en diferentes campos de las ciencias naturales y de la ingeniería, al igual que en la adopción de posiciones filosóficas.

No obstante el comportamiento determinista, en un *sistema caótico* es imposible la predicción del futuro distante debido a que dos condiciones inicialmente vecinas originan trayectorias radicalmente diferentes, que se separan con el transcurrir del tiempo de manera exponencial. Estos sistemas son altamente sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

2. Modelos

En las ciencias naturales, al igual que en otras áreas del conocimiento, se utilizan modelos para explicar o predecir fenómenos. En esencia, en un *modelo* el sistema se representa en términos de ecuaciones matemáticas que incorporan aspectos fundamentales de la realidad y desprecian aspectos secundarios. Los modelos se perfeccionan con la incorporación de nuevos elementos que permitan lograr una mejor correspondencia entre las predicciones teóricas y los hechos observados. Por ejemplo, la caída libre de un cuerpo se puede estudiar mediante un modelo que tiene en cuenta la atracción gravitacional de la tierra pero desprecia la forma del cuerpo y los efectos de la fricción con el aire. Un modelo más perfeccionado incorpora estos elementos en la descripción del movimiento, pero seguramente no tendrá en cuenta los efectos de la atracción gravitacional de la luna. Lo que se busca con un modelo es ganar conocimiento del sistema a través de una representación simplificada del mismo. El modelo describe un sistema artificial, un mundo ficticio que en buena medida constituye una caricatura del sistema real.

Un modelo no necesita ser matemático y puede ser "verbal" (Odum 1972), de naturaleza descriptiva. Un ejemplo es la teoría de Darwin sobre el mecanismo de la evolución de las especies de los seres vivos, la cual propuso con el fin de responder dudas acerca de la estabilidad de las especies y que fundamentó en cantidad de observaciones y documentos científicos.

Independiente de la disciplina a que pertenezca, para que un modelo se pueda incorporar dentro del dominio de la teoría del caos es *condición necesaria* que el modelo se pueda representar en términos de ecuaciones matemáticas de una naturaleza especial, que describan la evolución del sistema (en tiempo discreto o en tiempo continuo) por medio de reglas deterministas, no lineales, bien definidas (*sistemas dinámicos*).

El objetivo básico de la teoría de sistemas dinámicos es comprender el comportamiento asintótico de un proceso descrito por ecuaciones diferenciales (tiempo continuo, t) o por iteraciones de una función (tiempo discreto, n). Lo que se quiere es predecir el futuro distante ($t \rightarrow \infty$) o el pasado remoto ($t \rightarrow -\infty$). La aplicación logística es un modelo en tiempo discreto que usaremos en el presente artículo para describir hechos característicos de sistemas dinámicos

Año	Autor	Contribución
década 1950		Invencción de computadores de alta velocidad ⁴ .
1954 1960	Kolmogorov, Arnold, Moser	Comportamiento complicado en sistemas hamiltonianos, teorema KAM.
1963	E. N. Lorenz	Encuentra soluciones aperiódicas en sistemas deterministas disipativos de baja dimensionalidad.
década 1970	Mandelbrot	Introducción del concepto de fractal ⁵ .
1971	D. Ruelle & F. Takens	Turbulencia y atractores extraños ⁶ .
1975	T. Y. Li & J. A. Yorke	Introducción de la palabra <i>caos</i> en la literatura científica moderna (Li y Yorke 1975).
1976	R. M. Mai	Caos en la aplicación logística (May 1976).
1975- 1979	M. Feigenbaum	Leyes universales que gobiernan la transición de comportamiento regular a caótico (Feigenbaum 1985).
décadas 1980, 1990		Variadas contribuciones en diferentes campos de las ciencias

Tabla 1B. Algunos datos históricos relevantes en la teoría del caos.

que presentan tanto un comportamiento regular como uno caótico.

⁴ J. P. Eckert y J. Mauchly de la Universidad de Pennsylvania construyeron el Eniac (Electronic Numerical Integrator and Calculator), la cual operó durante la Segunda Guerra Mundial pero sólo se conoció en 1946 (Patterson and Hennessy 1995).

⁵ De manera intuitiva, un *fractal* es un conjunto que tiene la característica de que al ampliar un subconjunto (verlo con un microscopio) éste se ve exactamente igual que el conjunto original (propiedad de autosimilitud). El conjunto de Cantor del tercio medio es un ejemplo de fractal. Mandelbrot introdujo este concepto con el fin de analizar las irregularidades observadas en el mundo físico: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos, las cortezas de los árboles no son lisas, ni la luz viaja en línea recta" (Stewart 1992).

⁶ Los sistemas disipativos se caracterizan por la presencia de *atractores* en el espacio de fase. Dado un conjunto de condiciones iniciales, al esperar un tiempo suficientemente largo que elimine el transiente, los puntos representativos del

3. Modelo logístico y dinámica de poblaciones

3.1 Modelo de Verhulst

En 1845 P. F. Verhulst introdujo un modelo para simular el crecimiento de una población en una área cerrada, utilizando las siguientes suposiciones: en el transcurso del tiempo no cambian las condiciones (clima, número de depredadores, cantidad total de alimento), hay suficiente alimento, no hay interferencia entre individuos, no hay superposición de generaciones, y el medio sólo acepta una población máxima, N_{\max} . El modelo de Verhulst-Pearl o modelo logístico establece que la población $N(t)$ cambia con el tiempo t según la relación (Olinck 1978; Peitgen et al. 1992)

estado del sistema dinámico se mueven sobre un conjunto acotado de puntos, el cual recibe el nombre de *atractor*. Los *atractores extraños* son atractores con geometría fractal, esto es, objetos de dimensión no entera (¡no son curvas lisas!).

$$\frac{d}{dt}N(t) = N(t)(a - bN(t)), \quad N(0) = N_0 \quad (1)$$

donde N_0 es la población inicial, y a y $b = a/N_{\max}$ son constantes positivas. Al resolver esta ecuación se obtiene

$$P(t) := \frac{N(t)}{N_{\max}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{P_0} - 1\right) \exp(-at)}, \quad (2)$$

con $P_0 = P(0) = N(0)/N_{\max}$. El comportamiento típico de $P(t)$ se esquematiza en la figura 2.

3.2 Modelo logístico

El biólogo Robert May es uno de los primeros científicos que reconoce la importancia del modelo de Verhulst. Inspirado en este modelo y en la relación

$$\frac{d}{dt}N(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}, \quad (3)$$

May publica en 1976 un trabajo de revisión (May 1976) en el cual analiza el modelo de Verhulst en tiempo discreto y encuentra que, no obstante la naturaleza determinista de las ecuaciones que gobiernan el sistema, el comportamiento cualitativo de la solución es extremadamente sensible a las condiciones iniciales y que para fines prácticos el comportamiento en el futuro distante es impredecible.

Un primer método para deducir la ecuación que analizó May es como sigue. Se considera el intervalo $[0, t]$ y se hace una partición en la forma $[t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_M]$, con $t_0 = 0$ y $t_M = t$. Todos los subintervalos se eligen con



Figura 2. Comportamiento típico de la población en el modelo de Verhulst.

ancho constante $\Delta t := (t - t_0)/M$ y se exige que Δt sea suficientemente pequeño. Se usa la relación (3) para aproximar la derivada y se definen las relaciones auxiliares

$$r := 1 + a \Delta t, \quad x_n = \frac{b \Delta t}{1 + a \Delta t} N(t_n). \quad (4)$$

La ecuación de Verhulst conduce entonces al sistema dinámico discreto

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad 0 < r \leq 4, \quad (5)$$

donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ y la restricción sobre el parámetro r garantiza que $0 \leq x_n \leq 1$.

Un método alternativo es el siguiente (Peitgen y Richter 1986). Con el fin de modelar la población en generaciones sucesivas se designa por N_0 la población inicial y por N_n la población en la n -ésima generación. Por definición, la tasa de crecimiento R es el incremento relativo por año,

$$R := \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} \geq 0. \quad (6)$$

Si R fuera constante, la población crecería indefinidamente y después de n generaciones su tamaño sería $N_n = (1 + R)^n N_0$. Para limitar el crecimiento de la población y tener en cuenta que un nicho dado sólo puede sostener una población de un tamaño máximo N_{\max} , se supone que la tasa de crecimiento varía con el tamaño de la población, según la relación

$$R = \varepsilon \frac{N_{\max} - N_n}{N_{\max}}, \quad (7)$$

donde la constante $\varepsilon > 0$ es un parámetro. Las cantidades auxiliares

$$x_n := \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{N_n}{N_{\max}}, \quad r := 1 + \varepsilon, \quad (8)$$

permiten describir el cambio de la población de una generación a otra por medio de la relación (5),

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad 0 < r \leq 4. \quad (9)$$

La constante r se denomina parámetro de crecimiento o *parámetro de control*, depende del área disponible y de la fertilidad, y su valor determina la tasa de crecimiento de la po-

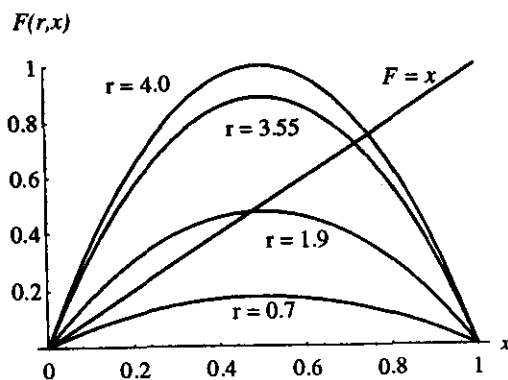


Figura 3. Gráfico de $F(r, x) := r x (1 - x)$ para diferentes valores del parámetro de control r . El valor máximo, $F(r, 1/2) := r/4$, se obtiene en $x = 1/2$.

blación. La relación (9) se conoce con el nombre de *aplicación logística* o *cuadrática*.

Dos propiedades de la ecuación logística son relevantes para la dinámica de poblaciones: (i) Si inicialmente la población es cero ($x_0 = 0$), entonces así permanece siempre ($x_n = 0$). (ii) La población crece cuando x_n es pequeña y declina cuando x_n es grande. Esta propiedad es razonable debido a que si la población es pequeña hay suficiente alimento y espacio disponible de tal manera que la población puede crecer sin obstáculo alguno. Sin embargo, cuando la población es suficientemente grande ($x_n \approx 1$), las nuevas generaciones disminuyen por insuficiencia de alimento debido a la sobrepoblación.

Parece ser que, en ciertas épocas de su desarrollo, algunas poblaciones de insectos en zonas templadas se ajustan de manera adecuada al modelo de Verhulst (Gulick 1992). Por otro lado, la validez de la ecuación (9) no está limitada a este modelo. Por ejemplo, en una cuenta de ahorros se hace un depósito inicial N_0 , con una tasa de interés R dada por la ecuación (6). Como el gerente del banco observa que el saldo a favor del cliente crece indefinidamente, según la relación $N_n = (1 + R)^n N_0$, propone modificar la tasa de interés y la fija según la relación (7). El cambio de variables (8) conduce nuevamente a la ecuación (9).

La relación logística tiene "vida matemática" independiente del contexto particular para el cual se aplique y es un

caso especial de aplicaciones unimodales⁷ de carácter más general (r es el parámetro de control),

$$x_{n+1} = F(r, x_n). \quad (10)$$

En lo que sigue revisaremos brevemente sus propiedades. En la figura 3 se representa el comportamiento de la población como función del tiempo discreto n , para diferentes valores del parámetro r . Se denomina *órbita* al conjunto de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ generados, para un r fijo, por repetición sucesiva de la aplicación logística.

4. Puntos fijos y su clasificación

El análisis de la dinámica comienza determinando, para cada valor de r , los puntos fijos y su estabilidad. Designamos por $F \circ G(r, x) := F(r, G(r, x))$ la composición de las funciones F y G , y representamos la composición de F consigo misma, k veces, por

$$F^k(r, x) := \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F(r, x)}_{k \text{ veces}}$$

Un *punto fijo* de F , de período k , es aquel valor de x (digamos, x') que es invariante bajo k repeticiones de la aplicación F , $x' = F^k(r, x')$. El conjunto de k puntos x' que satisfacen esta ecuación se organizan en *ciclos* de período k y de submúltiplos de k .

Con base en el criterio de estabilidad de Lyapunov (Jackson 1989), los puntos fijos se clasifican en estables e inestables. Un punto fijo es *estable* o *inestable*, si al ser perturbado ligeramente la perturbación muere o crece de manera indefectible. Esto es, el punto que describe la órbita regresa al punto fijo o se aleja de él. Los términos *atractivo* y *repulsivo* se usan como sinónimos de estable e inestable, respectivamente.

5. Hechos característicos del modelo logístico

Con relación al comportamiento de la población en el *futuro distante* ($n \gg 1$), la aplicación logística predice que la dinámica aumenta en complejidad a medida que se incre-

⁷ Una aplicación $F(x)$ definida en el intervalo $I = [0, 1]$, $F: I \rightarrow I$, es unimodal si (i) $F(0) = F(1) = 0$, (ii) F tiene un punto crítico c en el intervalo I . La aplicación unimodal crece en el intervalo $[0, c)$ y disminuye en el intervalo $(c, 1]$.

Parámetro de control, r	En el futuro distante ($n \gg 1$) surge un ciclo de período
$r_1 = 3.$	$2^1 = 2$
$r_2 = 1 + \sqrt{6}$ ≈ 3.4494897	$2^2 = 4$
$r_3 = 3.54409 \dots$	$2^3 = 8$
$r_4 = 3.5644 \dots$	$2^4 = 16$
$r_5 = 3.568759 \dots$	$2^5 = 32$
...	...
$r_\infty = 3.569946 \dots$	∞
$r > r_\infty$	caos (comportamiento aperiódico), ciclo-3, ventanas de comportamiento periódico, intermitencia.

Tabla 2. Algunos valores del parámetro de control r , donde se producen bifurcaciones y se cambia el número de puntos fijos de 2^{k-1} a 2^k (Strogatz 1994).

menta el valor del parámetro de control r (tabla 2). Entre los hechos relevantes que predice la ecuación logística distinguimos los regímenes descritos a continuación.

5.1. Régimen de comportamiento estable

Si r está en el intervalo $0 < r < 1$, sin importar el valor inicial x_0 ($0 < x_0 \leq 1$), la población disminuye de manera rápida hasta su *extinción* total (figura 4). Esto es, el origen es un punto fijo atractivo. Por el contrario (figura 5), si $1 < r < 3$, la población se estabiliza en el punto fijo atractivo $(1 - 1/r)$, mientras que el origen se transforma en un punto fijo repulsivo (Devaney 1989).

5.2. Régimen de comportamiento periódico

Si $3 < r \leq r_\infty$, donde $r_\infty \approx 3.5699456$, a medida que se incrementa el valor de r , el comportamiento aumenta en complejidad. En primer lugar, al sobrepasar el punto $r = r_1 = 3$ se presenta una *bifurcación*; esto es, una transición de un punto fijo atractivo a un ciclo de período dos. En el futuro distante la población no se estabiliza en un único

valor sino en dos puntos (o valores) que van alternando su ocurrencia de una generación a otra (figura 6).

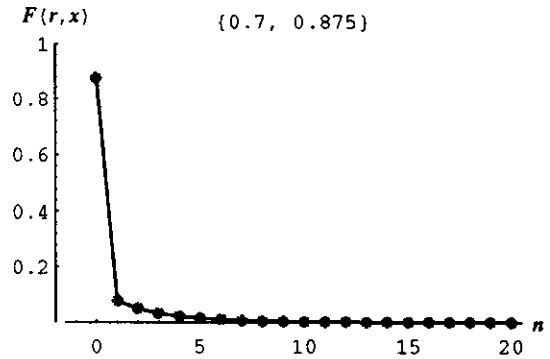


Figura 4. Extinción de la población

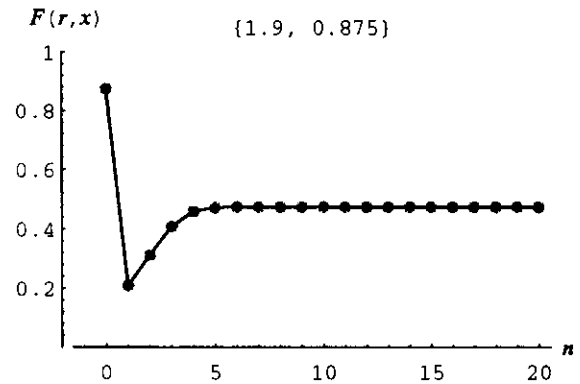


Figura 5. Estabilización de la población.

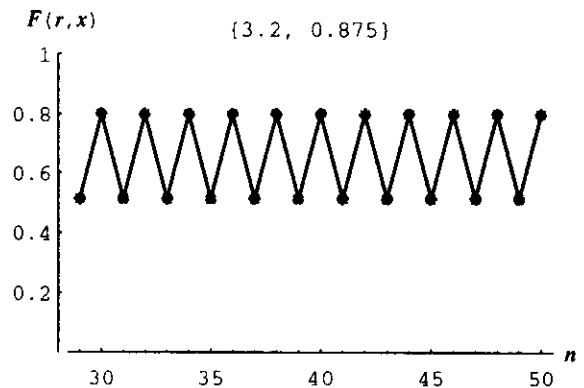


Figura 6. Estabilización en un ciclo de período dos.

Al seguir incrementando r se alcanza un nuevo punto crítico, $r_2 \approx 3.4494897$, en el cual los dos puntos del ciclo se tornan simultáneamente inestables y por medio de una

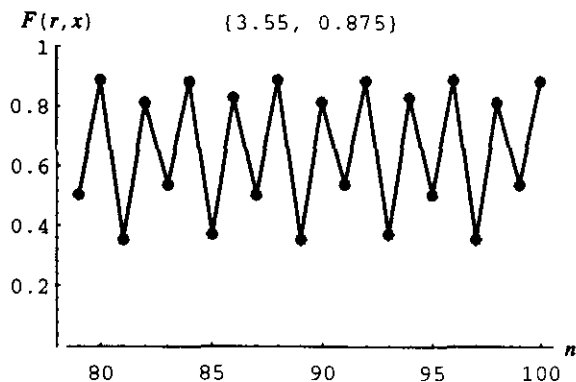


Figura 7. Estabilización en un ciclo límite de período cuatro.

bifurcación se genera un nuevo ciclo límite de período cuatro (figura 7); esto es, la población pasa en el futuro distante por cuatro valores consecutivos, que cambian de generación en generación y que se reconstruyen cada cuatro generaciones (ciclo de período 4).

Al seguir incrementando r , el proceso de bifurcación se repite de manera indefinida, de tal manera que cada vez que se sobrepasa un punto crítico r_k ($k = 1, 2, \dots$) surge un ciclo de período 2^k . Este comportamiento se repite cada vez con más frecuencia hasta llegar a un valor límite, $r_\infty \approx 3.5699446$.

Al estudiar la cascada de bifurcaciones (figura 8), Feigenbaum advierte que las sucesivas duplicaciones co-

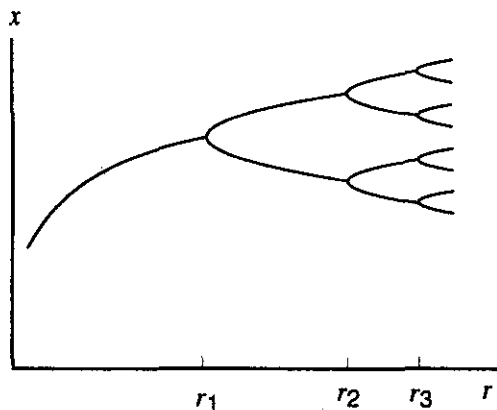


Figura 8. Con el incremento del parámetro de control r (régimen regular) surge una cascada de bifurcaciones y aparecen ciclos.

responden básicamente al mismo fenómeno, salvo cambios de escala, y encuentra dos constantes universales (α y δ) (Jackson 1989):

$$\alpha := 2.502\,907\,875\,095\,892\,848\,5 \dots$$

$$\delta := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4.669\,201\,609\,102 \dots$$

Así como la constante π es básica para determinar el área y el volumen de ciertas figuras geométricas, las constantes α y δ son fundamentales para sistemas caóticos.

5.3. Régimen de comportamiento caótico

Si $r_\infty < r \leq 4$, se entra en el *régimen caótico*, en el cual hay una mezcla inesperada de orden y caos, con regiones de r donde el movimiento es *aperiódico* (no hay ciclos de período 2^k !) y regiones con ventanas periódicas intercaladas entre zonas aperiódicas (figura 9). En particular, sobresale una gran ventana que comienza alrededor de $r \approx 3.8295$ y que contiene un ciclo límite estable de período tres (figura 10). Por ejemplo, para $r = 3.8339$ el ciclo es $0.152781 \rightarrow 0.496255 \rightarrow 0.958421$. La figura 10 inferior muestra que para $r = 3.7404$ existe un ciclo de período cinco.

Ahora bien el trabajo de Li y Yorke (1975) mostró que si hay un ciclo de período tres, entonces la aplicación tiene ciclos periódicos de todos los órdenes (Devaney 1992). Por ejemplo, para $r = 3.7404$ encontramos un ciclo de período cinco (figura 10), con los valores $0.227292 \rightarrow 0.656928 \rightarrow 0.842987 \rightarrow 0.495078 \rightarrow 0.935009$. Adicionalmente (Ott 1994), Li y Yorke demostraron que la existencia de una órbita de período tres implica la existencia de un conjunto innumerable de órbitas que nunca originan ciclos periódicos y que permanecen indefinidamente con un comportamiento aperiódico (para describir esta situación introdujeron el término *caos*).

La complejidad del comportamiento que presenta la aplicación logística al variar el valor del parámetro de control r se ilustra en un diagrama de bifurcaciones (figura 11). Para obtener este diagrama se seleccionan j puntos en el intervalo $0 < r < 4$ y para cada uno de ellos se dibujan en el eje vertical los k puntos que conforman el atractor. Por ejemplo, si $r < 3$ la población se estabiliza en el futuro distante en un único valor, de tal manera que el atractor se representa por un punto en el eje vertical.

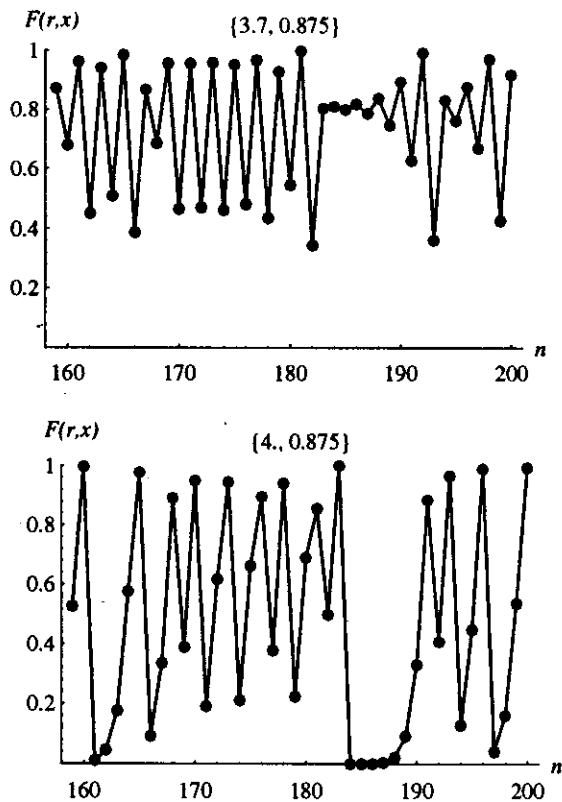


Figura 9. Comportamiento de la población en el distante futuro ($n \gg 1$) para diferentes valores del parámetro de control r en el régimen caótico. Se indican los valores $\{r, x_0\}$.

6. Exponente de Lyapunov

El comportamiento caótico de un sistema se caracteriza por diferentes propiedades (Peitgen et. al. 1992): (a) sensibilidad a las condiciones iniciales, (b) mezcla, (c) existencia de órbitas periódicas. En esta sección discutiremos la primera de ellas; esto es, el hecho de que el futuro distante ($n \gg 1$) se afecta profundamente debido a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

Para ilustrar esta situación estudiamos mediante el modelo logístico la ecología de una población de leones y ga-

celas que viven en una pradera determinada (Shinbrot 1995). Designamos por x_n la fracción de leones en la n -ésima generación. Si inicialmente tenemos 10 leones y 9990 gacelas entonces $x_0 = 0.001$. Ahora bien, si en lugar de diez sólo tuviéramos nueve leones entonces $x_0 = 0.0009009$. La figura 12 compara la evolución del sistema para estas dos condiciones iniciales, asignando además al parámetro de control el valor $r = 3.9$. La pequeña diferencia del 1% en la condición inicial se amplifica sucesivamente de generación en generación y alcanza en la novena o décima generación una diferencia del orden del 100%. Lo mismo ocurre para generaciones más distantes como las comprendidas entre 20 y 30.

En conclusión, en sistemas caóticos el futuro distante es impredecible pues una pequeña imprecisión en la condición inicial afecta radicalmente el comportamiento del sistema.

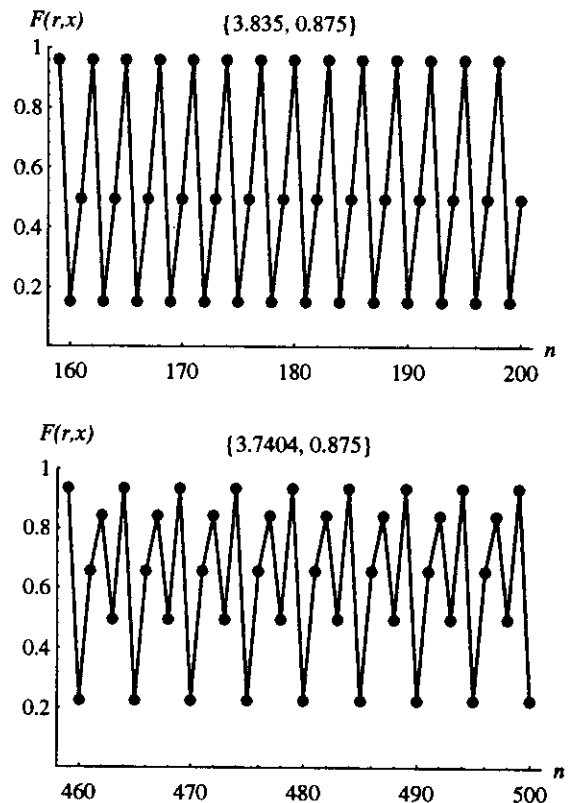


Figura 10. Ciclos de período tres y cinco correspondientes de manera respectiva a $r = 3.8339$ y $r = 3.7404$. Estos valores de r están inmersos en la región caótica.

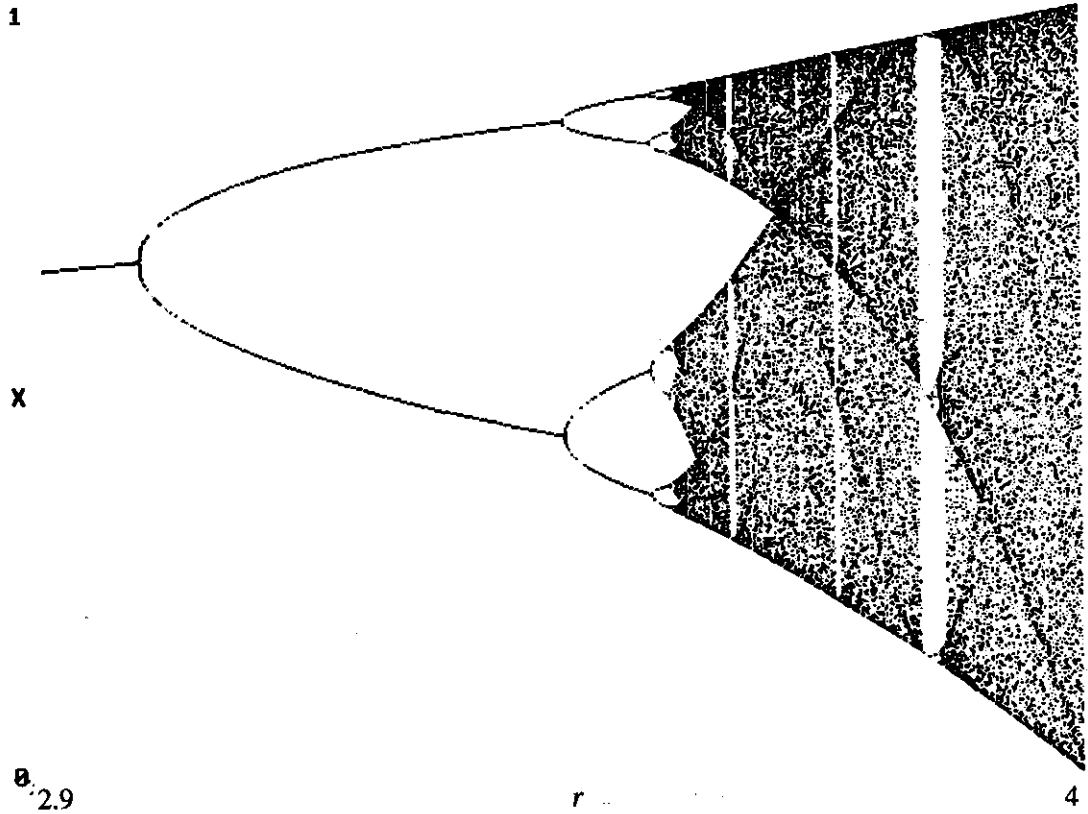


Figura 11. Diagrama de bifurcaciones para la aplicación logística.

El exponente de Lyapunov $\lambda(r, x_0)$, asociado con la aplicación $x_{n+1} = F(r, x_n)$ y con la condición inicial x_0 , es una cantidad que mide de manera cuantitativa el grado

de separación exponencial que alcanzan en el futuro distante ($n \gg 1$) dos puntos que eran inicialmente vecinos (figura 13). Sean x_0 y $x_0 + \epsilon$ dos puntos iniciales (generación $n = 0$), los cuales después de N generaciones se

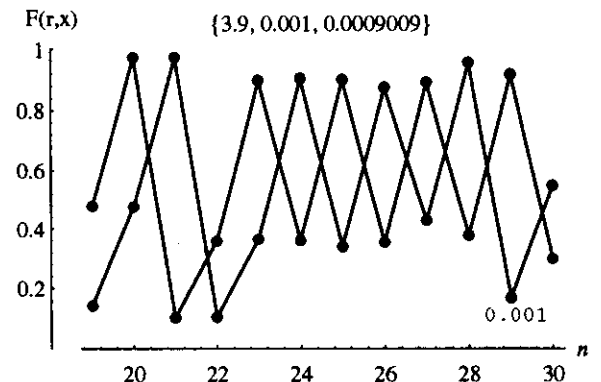
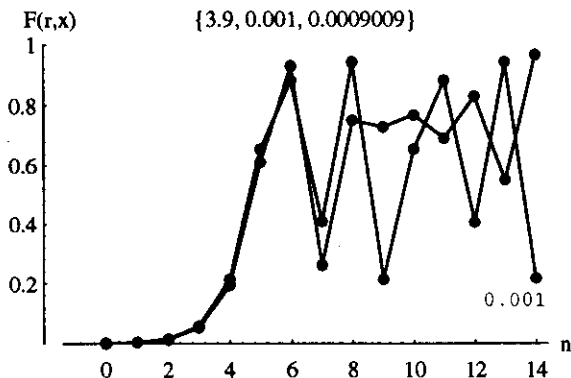


Figura 12. Una pequeña diferencia en las condiciones iniciales se amplifica de manera rápida. Cálculos con $r = 3.9$ para dos condiciones iniciales diferentes (0.001 y 0.0009009) y diferentes generaciones.

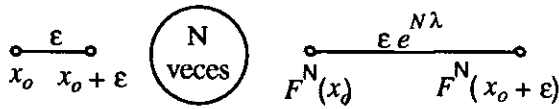


Figura 13. Definición del exponente de Lyapunov.

transforman en los puntos $F^N(x_0)$ y $F^N(x_0 + \varepsilon)$, respectivamente. Los puntos que originalmente estaban separados por una distancia ε alcanzan después de N generaciones una separación

$$\varepsilon \exp(N \lambda(r, x_0)) = \left| F^N(r, x_0 + \varepsilon) - F^N(r, x_0) \right|.$$

Para puntos inicialmente cercanos de manera infinitesimal ($\varepsilon \rightarrow 0$) y para un futuro infinitamente distante ($N \rightarrow \infty$), el exponente de Lyapunov $\lambda(r, x_0)$ se obtiene por la relación (Gulick 1992)

$$\begin{aligned} \lambda(r, x_0) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{F^N(r, x_0 + \varepsilon) - F^N(r, x_0)}{\varepsilon} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right|_{x_n} \end{aligned} \quad (11)$$

Si al ser promediada sobre toda la órbita $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, la pendiente $\partial F(r, x)/\partial x$ tiene una magnitud mayor que la unidad entonces $\lambda(r, x_0)$ será positivo y la órbita será caótica, por definición. Si $\lambda(r, x_0) < 0$, existirá un ciclo límite estable (atractivo) y una vez eliminado el transiente la órbita será periódica. Los valores de r para los cuales $\lambda(r, x_0) = 0$ corresponden a puntos de bifurcación, donde el comportamiento cambia radicalmente. Para la aplicación logística se sabe que $\lambda(r, x_0)$ es independiente de la condición inicial x_0 , excepto para un conjunto de medida cero (Lichtenberg y Lieberman 1992), de tal manera que podemos escribir $\lambda(r) = \lambda(r, x_0)$.

Para determinar en este trabajo el exponente de Lyapunov seguimos el procedimiento de Eckmann y Ruelle (Eckmann y Ruelle 1985) y empleamos el algoritmo de Sandri (Sandri 1996). La figura 14 muestra la convergencia del cálculo del exponente de Lyapunov para varios valores del parámetros de control, $r = 3.55$, $r = 3.7$, $r = 4.0$. Dependiendo del valor de este parámetro, la aplicación lo-

gística presenta diferentes tipos de comportamiento: regular o caótico.

El comportamiento del sistema es *regular* cuando un cambio pequeño en la condición inicial genera un cambio pequeño en el futuro distante, la órbita converge a una órbita periódica estable y el exponente de Lyapunov es menor o igual a cero ($\lambda \leq 0$). El *comportamiento caótico* se presenta cuando el sistema muestra alta sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales, de tal manera que en el futuro distante la órbita tiene un comportamiento aperiódico y el exponente de Lyapunov es positivo ($\lambda > 0$), indicando así una divergencia exponencial de trayectorias originalmente vecinas.

En la figura 15 se esquematiza el comportamiento del exponente de Lyapunov como función del parámetro de control r . Se observa que el exponente de Lyapunov puede ser negativo, positivo o cero, según el valor de r . Si elegimos un valor de r en la región caótica $r_\infty < r < 4$, existe una probabilidad finita de que a este valor le corresponda un exponente de Lyapunov positivo. Pero este valor de r está rodeado a su vez por otros valores de r para los cuales el exponente de Lyapunov es negativo, de tal manera que la órbita después de 100 millones o más iteraciones alcanza un único atractor (por ejemplo, un ciclo de período 1137). Estos atractores cambian con cambios infinitesimales en el parámetro de control r , generando un rápido proceso de bifurcación. El conjunto de valores de r para los cuales el comportamiento es caótico forma un conjunto de Cantor de medida positiva (Holton y May 1995b; Jakobson 1981).

7. Ergodicidad y mecánica estadística

Un exponente positivo de Lyapunov ($\lambda > 0$) es condición necesaria pero no es requisito suficiente para que se presente caos. Dos trayectorias inicialmente vecinas podrían separarse y nunca volverse a aproximar. Se requiere además la propiedad de mezclamiento, esto es, mientras que las trayectorias se separan localmente ($\lambda > 0$), al estar confinadas a una región finita ($0 \leq x \leq 1$), se ven obligadas a doblarse y aproximarse una a otra de manera arbitrariamente cercana, un número indefinido de veces.

Dado un valor de r , dividimos el intervalo $I := [0, 1]$ en un número grande de M celdas iguales y seleccionamos un punto al azar, el cual cae en la celda inicial i . El punto inicial lo designamos por x_0 y por uso continuado de la aplicación logística se genera una órbita, $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Si al valor de r le corresponde un exponente positivo de

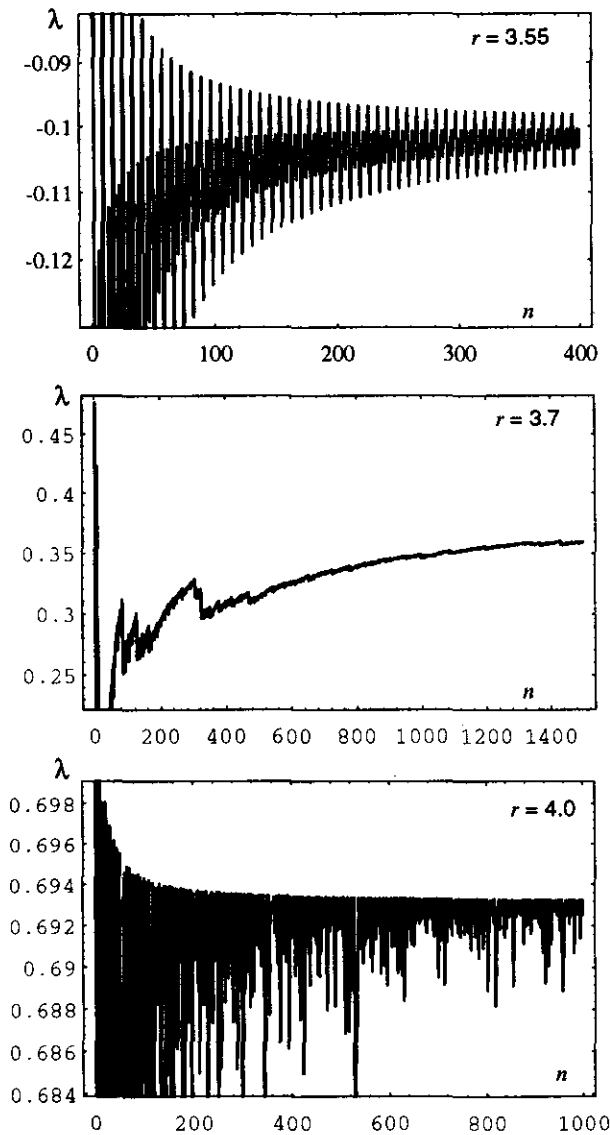


Figura 14. Convergencia del exponente de Lyapunov λ para varios valores del parámetro de control r , fijando la condición inicial como $x_0 = 0.1$.

Lyapunov (condición para comportamiento caótico), la órbita visitará una gran cantidad de las M celdas en que se ha subdividido el intervalo I (figuras 16). Se dice que, en el régimen caótico, el modelo logístico tiene la propiedad de *mezclamiento* (Peitgen et al. 1992).

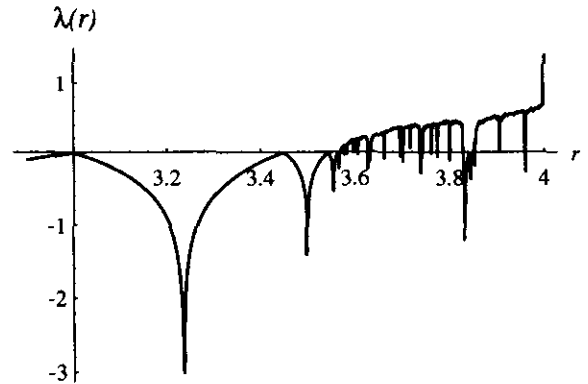


Figura 15. Exponente de Lyapunov $\lambda(r)$ como función del parámetro de control r . El intervalo $2.9 \leq r \leq 4$ se dividió en 1000 subintervalos y para cada valor de r se realizaron 1000 iteraciones. $\lambda(r)$ se anula en los puntos de bifurcación.

Dependiendo del valor del parámetro r , la órbita visitará el subintervalo caracterizado por la posición x con una frecuencia que describimos por medio de una función densidad de probabilidad ⁸

$$\rho(r, x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \delta(x - F^k(r, x_0)), \quad (12)$$

donde el símbolo $\delta(x)$ es la delta de Dirac. Si $\rho(r, x)$ no depende de la condición inicial x_0 , decimos que el sistema es *ergódico*. La ergodicidad conduce a la *relación entre mecánica estadística y caos* (Csordás et al. 1993) ya que implica que el promedio temporal de una función arbitraria $A(x)$ se puede representar por un valor promedio sobre el intervalo I ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N A(x_n) = \int_I \rho(r, x) A(x) dx. \quad (13)$$

Esta igualdad se cumple para trayectorias típicas, esto es, puede existir un conjunto de medida cero de trayectorias para las cuales la condición no es válida (Zaslavsky 1987). Nótese que $\rho(r, x)$ tiene que ser estacionaria, pues la

⁸ Para cualquier función diferenciable $p(y)$ con un conjunto de ceros simples, designados como $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, se cumple (Wolf 1979)

$$\delta(p(y)) = \sum_{v=1}^N |p'(y_v)|^{-1} \delta(y - y_v).$$

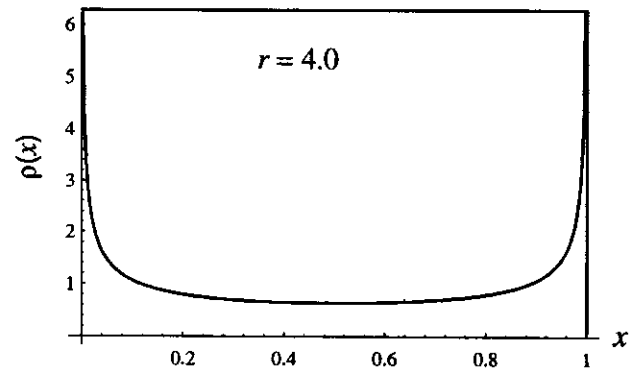
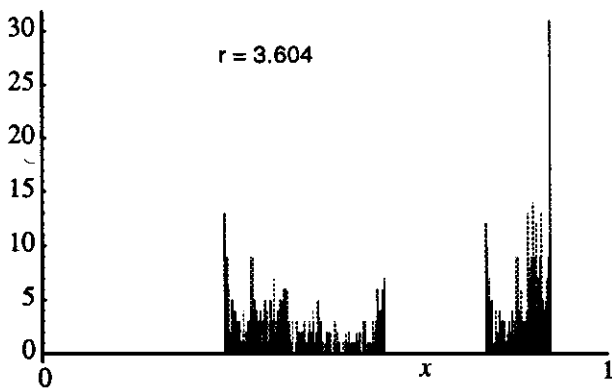


Figura 17. Densidad de probabilidad $\rho(4, x)$.

$$\rho(4, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad (16)$$

Figura 16. El intervalo $0 < x \leq 1$ se divide en 1000 subintervalos y para $r = 3.604$ se genera una órbita con 1000 iteraciones. En el eje vertical se muestra la frecuencia con la cual se visitan los subintervalos. Igualdad anterior sólo tiene sentido si $\rho(r, x)$ es independiente del tiempo.

cuyo comportamiento se muestra en la figura 17. Se observa una marcada tendencia de la trayectoria a visitar de manera preponderante los extremos del intervalo I. Al cambiar el valor de r se modifica la densidad de probabilidad. Por ejemplo (figura 18), el comportamiento de la función $\rho(3.6, x)$ muestra unos valores de x que son visitados de manera intensa por la trayectoria mientras que otros valores de x nunca son visitados o lo son con muy baja frecuencia.

Cuando el sistema es ergódico, el punto representativo que genera la trayectoria pasa arbitrariamente cercano a cualquier otro punto del intervalo I, de tal manera que la órbita cubre densamente el intervalo unidad. Obsérvese que valores de r para los cuales el exponente de Lyapunov es negativo (comportamiento regular, movimiento periódico) no conduce a órbitas ergódicas, pues el atractor es un ciclo y la órbita sólo visita un número finito de puntos. En estos casos la densidad de probabilidad $\rho(r, x)$ está conformada por la contribución de una o más deltas de Dirac.

La expresión (11) para el exponente de Lyapunov se puede expresar, con ayuda de la densidad de probabilidad $\rho(r, x)$, en la forma

La relación anterior se cumple también para una función compuesta $A(F(r, x))$, así que

$$\int_I A(y) \rho(r, y) dy = \int_I A(F(r, y)) \rho(r, y) dy. \quad (14)$$

Por lo tanto, con la elección particular $A(y) = \delta(x - y)$ se obtiene que $\rho(r, x)$ satisface una ecuación integral, conocida como *ecuación de Frobenius-Perron*,

$$\rho(r, x) = \int_I \delta(x - F(r, y)) \rho(r, y) dy. \quad (15)$$

Por ejemplo, si $r = 4$, la solución de esta ecuación es la función

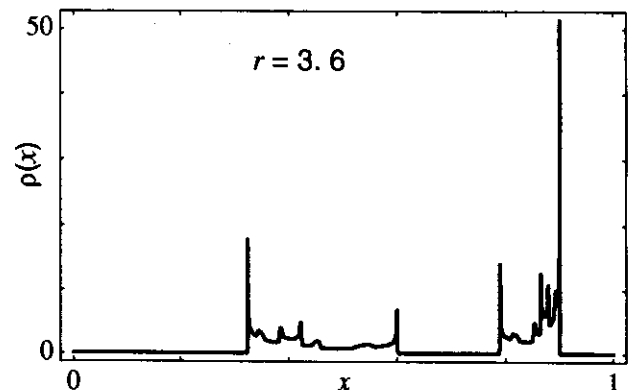


Figura 18. Densidad de probabilidad $\rho(3.6, x)$ calculada por Binder y Campos (1996). Cortesía de los autores.

$$\lambda(r, x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right|_{x_n},$$

de tal manera que por aplicación de (13) se obtiene

$$\lambda(r, x_0) = \int_I \rho(r, x) \ln \left| \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right| dx. \quad (17)$$

Este resultado muestra que existe una íntima conexión entre la estructura de la densidad de probabilidad $\rho(r, x)$ y el exponente de Lyapunov, $\lambda(r, x_0)$. Si este último es positivo, el sistema presenta un comportamiento caótico. Si es negativo, el comportamiento es regular. Si es cero, se tiene un punto de bifurcación en donde la naturaleza del movimiento cambia de manera significativa, de un tipo de comportamiento a otro.

8. Conclusiones y consideraciones finales

La aplicación logística es un modelo unidimensional que describe mediante una ecuación cuadrática la evolución de un sistema idealizado en tiempo discreto. Su origen se hizo plausible con base en un modelo de dinámica de poblaciones.

La aplicación logística constituye un paradigma de lo que es el comportamiento caótico de un sistema. Muestra la imposibilidad de predecir el futuro remoto, ya que, como consecuencia de la alta sensibilidad del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales, las trayectorias divergen de manera exponencial. En consecuencia, la afirmación de Laplace¹ no tiene validez dentro del contexto de las ciencias naturales pues en todo proceso de medición de una variable (física, biológica, etc.) intervienen de manera forzosa imprecisiones en los datos de medida.

La aplicación logística es un modelo determinista, esto es, en principio, a partir del conocimiento del estado presente se puede determinar el futuro. Sin embargo, el conocimiento impreciso de las condiciones iniciales conlleva la imposibilidad de predecir el futuro distante. Esto comportamiento es consecuencia de la naturaleza no lineal de la ecuación que describe la evolución temporal.

La no linealidad de los sistemas es lo general en el mundo real, en el campo de las ciencias naturales. Por lo tanto, bajo condiciones adecuadas de los parámetros de control y de las condiciones iniciales, en toda área del conocimiento donde intervengan modelos no lineales, tanto en

tiempo discreto como en tiempo continuo, existirán circunstancias bajo las cuales el sistema presenta tanto movimiento regular como caótico.

El modelo logístico sirve para ilustrar que la controversia Poincaré-Boltzmann perdió vigencia ya que la hipótesis ergódica encuentra su justificación debido a la propiedad de mezclamiento del sistema bajo régimen caótico. En sistemas más generales, el comportamiento caótico es fundamental para clarificar los fundamentos de la mecánica estadística. Originalmente se creía que existía una contradicción aparente entre determinismo (leyes de la mecánica) y la introducción del azar en las leyes de la física (mecánica estadística). Lo que la teoría del caos muestra es que los sistemas naturales descritos por leyes de evolución deterministas, no lineales, presentan sensibilidad a las condiciones iniciales y mezclamiento (caos). La imprecisión en las condiciones iniciales genera en el régimen caótico una compleja dinámica que requiere un tratamiento estadístico. La sensibilidad del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales genera un comportamiento irregular con apariencia de aleatorio pero que está producido por un mecanismo determinista. De esta manera, el azar y el determinismo son compatibles debido a la impredecibilidad del futuro distante.

Es sorprendente el largo lapso transcurrido entre las ideas originales de Poincaré³ y el desarrollo moderno de la teoría del caos. En parte la explicación se encuentra en el hecho de que los computadores sólo aparecieron hacia fines de la década de 1950. Esta herramienta es fundamental para el estudio de sistemas caóticos debido a la complejidad de los cálculos y a la imposibilidad de un tratamiento analítico.

El caos interviene en diversidad de fenómenos: microestructuras de semiconductores (Lin y Delos 1993; Marcus et al. 1993), átomos en campos magnéticos muy intensos (Delande 1991; Gay 1992), reacciones químicas con un comportamiento temporal oscilatorio, como la reacción de Belousov-Zhabotinsky (Strogatz 1994). El estudio y comprensión del comportamiento de sistemas caóticos contribuirá al desarrollo tecnológico y a la modificación de nuestro sistema de pensamiento. Dentro de este contexto, es pertinente la afirmación de May (1976) quien quedó impresionado con los complejos resultados de la aplicación logística y expresó: "No sólo en investigación, sino también en el mundo cotidiano de la política y de la economía, todo estaría mejor si mucha gente se diera cuenta que sistemas simples no necesariamente poseen propiedades dinámicas simples".

9. Bibliografía

- Binder, P. M. & D. H. Campos.** 1996. Direct calculation of invariant measures for chaotic maps. *Phys. Rev. E* **53** (5): R4259.
- Csordás, A., G. Györgyi, & P. Szépfauusy.** 1993. Statistical properties of chaos demonstrated in a class of one-dimensional maps. *Chaos* **3** (1): 31-49.
- Delande, D.** 1991. Chaos in Atomic and Molecular Physics en **Giannoni M.J., A. Voros, & J. Zinn-Justin** (ed.) *Chaos and Quantum Physics*. North-Holland. Amsterdam.
- Devaney, R. L.** 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Devaney, R. L.** 1992. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Reading: Addison-Wesley.
- Eckmann, J. P. & D. Ruelle.** 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.* **57** (3): 617-656.
- Feigenbaum, M. J.** 1985. Universal Behavior in Nonlinear Systems en **Campbell D. & H. Rose** (ed.) *Order in Chaos*. North-Holland. Amsterdam. 16-39.
- Février, P.** 1957. *Determinismo e Indeterminismo*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Gay, J. C., ed.** 1992. *Irregular Atomic Systems and Quantum Chaos*. Philadelphia, Reading: Gordon and Breach.
- Gulick, D.** 1992. *Encounters with chaos*. New York: McGraw Hill.
- Holton, D. & R. M. May.** 1995a. Chaos and one-dimensional maps en **Mullin T.** (ed.) *The Nature of Chaos*. Clarendon Press. Oxford. 95-119.
- Holton, D. & R. M. May.** 1995b. Models of chaos from natural selection en **Mullin T.** (ed.) *The Nature of Chaos*. Clarendon Press. Oxford. 120-148.
- Hoppensteadt, F. C.** 1993. *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*. New York: Springer Verlag.
- Jackson, E. A.** 1989. *Perspectives of nonlinear dynamics*. 1. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jakobson, M.** 1981. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.* **81**: 39.
- Klimontovich, Y. L.** 1991. *Turbulent Motion and the Structure of Chaos: A New Approach to the Statistical Theory of Open Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Lazukin, V. F.** 1991. *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*. Berlin: Springer.
- Li, T. Y. & J. Yorke.** 1975. Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly* **82**: 985-992.
- Lichtenberg, A. J. & M. A. Lieberman.** 1992. *Regular and Chaotic Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Lin, W. A. & J. B. Delos.** 1993. Order and chaos in semiconductor microstructures. *Chaos* **3** (4): 1993.
- Marcus, C. M., R. M. Westervelt, P. F. Hopkins, & A. C. Gossard.** 1993. Conductance fluctuations and quantum chaotic scattering in semiconductor microstructures. *Chaos* **3** (4): 643.
- May, R. M.** 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature London* **261**: 459.
- Odum, E. P.** 1972. *Ecología*. México: Nueva Editorial Interamericana.
- Olinck, M.** 1978. *An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- Ott, E.** 1994. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press.
- Patterson, D. A. & J. L. Hennessy.** 1995. *Organización y diseño de computadores*. Madrid: McGraw-Hill.
- Peitgen, H.-O., H. Jürgens, & D. Saupe.** 1992. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Berlin: Springer Verlag.

Peitgen, H. O. & P. H. Richter. 1986. *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems.* Berlin: Springer.

Real Academia Española. 1992. *Diccionario de la Lengua Española.*

Sandri, M. 1996. Numerical Calculation of Lyapunov Exponents. *The Mathematical Journal* 6 (3): 78-84.

Shinbrot, T. 1995. Progress in the control of chaos. *Adv. in Phys.* 44 (2): 73-111.

Stewart, I. 1992. *Does God Play Dice?* Cambridge MA: Blackwell.

Strogatz, S. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Reading: Addison-Wesley.

Wolf, K. B. 1979. *Integral Transforms in Science and Engineering.* New York: Plenum.

Zaslavsky, G. M. 1987. *Chaos in Dynamical Systems.* London: Harwood Academic Publishers.