

# EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS Y EL PROBLEMA PRINCIPAL DEL SATELITE ARTIFICIAL EN ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

por

José Gregorio Portilla B.\*

## Resumen

**Portilla, J.G.:** El problema de los dos cuerpos y el problema principal del satélite artificial en ecuaciones diferenciales de primer orden. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **20** (76): 25-32, 1996. ISSN 0370-3908.

Se presenta una deducción de las ecuaciones diferenciales de primer orden que rigen el problema de los dos cuerpos en tres dimensiones tomando como variables la velocidad, el azimut, el ángulo de vuelo y las coordenadas esféricas. También se incluye la deducción de las ecuaciones cuando se presenta la fuerza de perturbación generada por el achatamiento del cuerpo central. La transformación directa entre éstas y las coordenadas rectangulares (y la inversa) es expuesta.

**Palabras claves:** Mecánica celeste - problema de los dos cuerpos - problema principal del satélite artificial - ecuaciones diferenciales - integración numérica.

## Abstract

A derivation of the differential equations which govern the three-dimensional two-body problem utilizing variables such as the velocity, azimuth, flight-path angle and spherical coordinates is presented. Besides, the deduction of the equations is presented when a perturbation force appears due to oblateness of the central body. Direct transformation between these and rectangular coordinates (and inverse) is commented.

**Key words:** Celestial mechanics - two-body problem - main artificial satellite problem - differential equations - numerical integration.

\* Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Apartado Aéreo 2584, Santafé de Bogotá, Colombia. E-Mail: gportill @ciencias.campus.unal.edu.co

## Introducción

En el problema de los dos cuerpos se trata de describir matemáticamente el movimiento que presentan dos partículas materiales cuando están sometidas única y exclusivamente a la atracción recíproca debida a la fuerza de gravitación.

En la practica significa resolver las ecuaciones diferenciales que resultan de utilizar las leyes newtonianas de movimiento y aplicar las soluciones a todo tipo de situaciones y condiciones de frontera. Con ello se puede conocer el vector posición y velocidad de las partículas (con respecto a su centro de masas o con respecto a una de ellas) para todo tiempo. Es conocido que el problema de los dos cuerpos posee una solución analítica completamente general. El movimiento relativo de una de las partículas con respecto a la otra es o bien descrito por una cónica (elipse, parábola e hipérbola) o una línea recta. La posición en el tiempo es sencilla de calcular e implica resolver (a excepción del movimiento parabólico) ecuaciones trascendentes (McCuskey, 1963). Cuando se incluyen fuerzas de perturbación tales como asimetría esférica del cuerpo central, surgen complicaciones que hacen el problema difícil de resolver. Cuando sólo se considera la asimetría por achatamiento polar, i.e., se tiene en cuenta únicamente el armónico zonal  $J_2$ , el problema resultante es llamado problema principal del satélite artificial (PPSA) dado que el movimiento de estos objetos (cuando se mueven muy cerca del cuerpo central) es particularmente sensible a este tipo de perturbación. A pesar de los intentos de resolver por aproximaciones el PPSA realizados desde finales de los años cincuentas (que aún se utilizan extensivamente) y de los cuales merecen citarse los trabajos de Brouwer (1959), Kozai (1959) y Garfinkel (1959), hoy en día se sabe que el problema no es integrable (Irigoyen y Simó, 1993). La integración numérica directa de las ecuaciones de movimiento representa una manera poco elegante pero práctica de resolverlas. Hasta hace algunos años la integración numérica, aunque sencilla en sus principios, aplicada a casos reales representaba para el calculista una labor matemática monumental. Basta con señalar que en su estudio del movimiento del cometa Halley Cowell y Crommelin (1910), tardaron varios años en integrar numéricamente "a mano" las ecuaciones de perturbación. Con la llegada de la era del microprocesador el panorama ha cambiado drásticamente. Integraciones numéricas que hasta hace poco eran impensables se hacen ahora de forma rutinaria. Los modernos computadores permiten calcular la posición de los planetas hasta de centenares de millones de años en el pasado o en el futuro. La actual teoría

del movimiento de planetas y otros cuerpos celestes que es la base de muchos almanaques astronómicos es una integración numérica que incluye gran diversidad de perturbaciones (Standish, 1982). No es extraño entonces que en los últimos tiempos exista un enorme desarrollo de integradores numéricos pensados para cumplir con las más diversas necesidades (Kinoshita y Nakai, 1989). Pero las integraciones numéricas no están exentas de inconvenientes. Son procesos de cálculo que consumen mucho tiempo de CPU; en el proceso de integración se van perdiendo cifras significativas y pueden generar en ciertos casos resultados que no corresponden a la realidad. Esto es particularmente válido en el estudio de encuentros cercanos (o colisiones) entre cuerpos y en resonancias de movimiento medio.

En la presente comunicación presentamos la deducción de ecuaciones diferenciales de primer orden para el problema de los dos cuerpos y el PPSA en variables poco usuales. La integración numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden tiene la ventaja, con respecto a la integración de las de segundo orden, que las soluciones tienen poca sensibilidad a problemas de estabilidad y excitación (Kinoshita y Yoshida, 1991).

## El Problema de los dos Cuerpos

Sean dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  sometidas única y recíprocamente a la fuerza de gravitación. Consideremos el movimiento de las mismas respecto a un sistema de coordenadas inerciales con un origen completamente arbitrario situado en  $O$  tal y como se muestra en la figura 1.

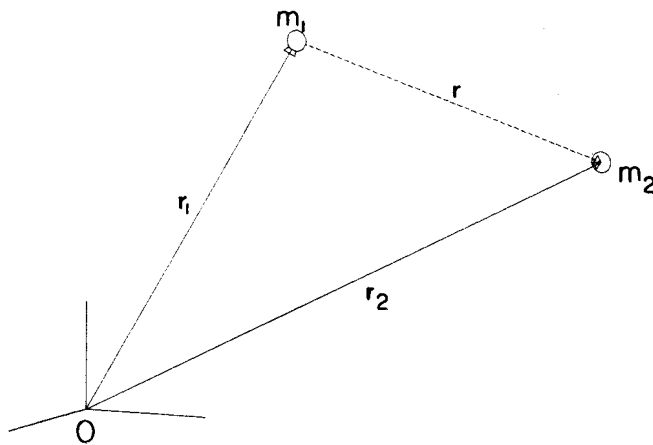


Figura 1

Los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  denotan la posición de las correspondientes partículas con respecto al origen en O. De la figura se desprende que

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} = \mathbf{r}_2, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r}$  representa el vector posición de la partícula de masa  $m_2$  con respecto a la partícula de masa  $m_1$ . Diferenciando la ecuación (1) dos veces con respecto al tiempo, multiplicando apropiadamente por las masas, y expresando, como es usual, la segunda derivada con respecto al tiempo como dos puntos sobre el caracter, obtenemos

$$\frac{m_2}{m_1} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2,$$

pero  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1$  es, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza que se ejerce sobre la partícula de masa  $m_1$  debida a la partícula de masa  $m_2$  y que denotaremos por  $\mathbf{F}_{12}$ . Con el mismo razonamiento hacemos también  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}$  y al tener en cuenta la ley de acción y reacción ( $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ) podemos escribir

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

que nos describe la fuerza que se ejerce sobre la partícula de masa  $m_2$  debida a la masa  $m_1$  en términos del vector aceleración relativo  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Por otro lado, la ley de atracción universal establece que

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3)$$

donde  $G$  es la constante de Cavendish y  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , un vector unitario en la dirección radial. Igualando las ecuaciones (2) y (3) encontramos la clásica ecuación diferencial de segundo orden del problema de los dos cuerpos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2(1 + \frac{m_2}{m_1})}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4)$$

donde  $k$  es una constante de tal forma que  $k^2 = Gm_1$ . Al multiplicar vectorialmente ambos lados de la anterior ecuación por  $\mathbf{r} \times$ , y al sumar cero en la forma  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$  ( $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ , el vector velocidad) tenemos

$$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

que al integrar con respecto al tiempo da

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}, \quad (5)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un vector constante llamado momentum angular e indica que el movimiento de  $m_2$  con respecto a  $m_1$  está contenido en un plano y por tanto el problema puede reducirse de tres a dos grados de libertad. Introduciendo

un sistema de coordenadas rectangulares centrado en  $m_1$  tal que se pueda escribir  $\mathbf{r}$  en la forma  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ , con lo que (4) representa tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las magnitudes de los vectores posición y velocidad denotadas por  $r$  y  $v$  respectivamente vienen dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (6)$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (7)$$

y así resulta

$$\mathbf{h} = (y\dot{z} - z\dot{y})\hat{\mathbf{i}} + (z\dot{x} - x\dot{z})\hat{\mathbf{j}} + (x\dot{y} - y\dot{x})\hat{\mathbf{k}}, \quad (8)$$

o también, de la definición del producto cruz

$$\mathbf{h} \underline{\underline{=}} r v \text{sen} \vartheta, \quad (9)$$

donde  $\vartheta$  es llamado ángulo de vuelo.

Al considerar (6) vemos que las ecuaciones (4) se hallan completamente acopladas y tal y como están escritas son imposibles de integrar analíticamente. La relajación del sistema, o sea, la transformación del problema a uno descrito por seis ecuaciones diferenciales de primer orden, en las mismas coordenadas cartesianas, es igualmente imposible. La solución clásica consiste, aprovechando la descripción en dos grados de libertad, en transformar las ecuaciones en coordenadas polares donde es posible separar las variables e integrar completamente las ecuaciones. Remitimos al lector a los textos clásicos de **Brouwer y Clemence**, 1961 o **Goldstein**, 1963.

## Las Ecuaciones Diferenciales

Nuestra intención aquí es derivar un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden cuya solución (analítica o numérica) permita encontrar, dadas unas condiciones iniciales dadas, las componentes del vector posición y velocidad para cualquier tiempo. Introducimos las coordenadas esféricas  $r$ ,  $\phi$  y  $\lambda$  donde la última se mide desde el eje  $y$  en el sentido de las agujas del reloj. La relación entre coordenadas cartesianas y esféricas es (ver figura 2):

$$\begin{aligned} x &= r \text{sen} \lambda \cos \phi, \\ y &= r \cos \lambda \cos \phi, \\ z &= r \text{sen} \phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \text{sen} \lambda \cos \phi - r \text{sen} \phi \text{sen} \lambda \dot{\phi} + r \cos \lambda \cos \phi \dot{\lambda}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \cos \lambda \cos \phi - r \text{sen} \phi \cos \lambda \dot{\phi} - r \text{sen} \lambda \cos \phi \dot{\lambda}, \end{aligned}$$

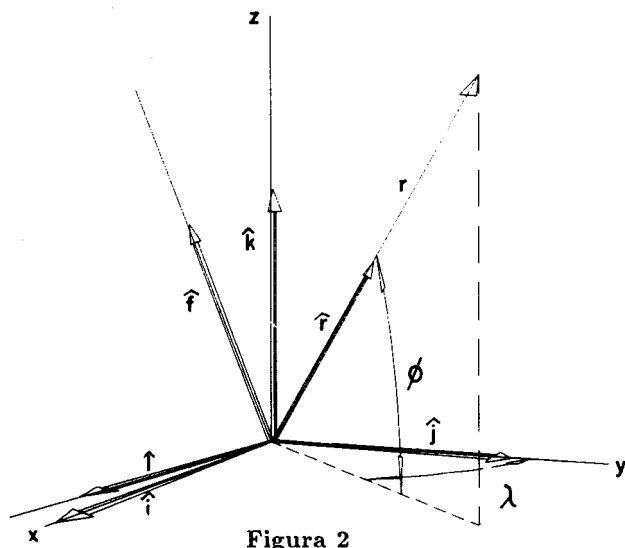


Figura 2

$$\dot{z} = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi}. \quad (11)$$

Elevando al cuadrado cada una de las anteriores ecuaciones y sumando

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + r^2 \cos^2 \phi \dot{\lambda}^2. \quad (12)$$

Considérese ahora los vectores ortogonales unitarios  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{f}}$  y  $\hat{\mathbf{l}}$ , donde los dos últimos están en la dirección positiva de la variación de la latitud (hacia el norte) y la longitud (hacia el este) respectivamente tal y como se muestra en la figura 3. De la figura es claro que

$$\mathbf{v} = v \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + v \sin \vartheta \cos A \hat{\mathbf{f}} + v \sin \vartheta \sin A \hat{\mathbf{l}}, \quad (13)$$

al comparar las ecuaciones (12) y (13) encontramos

$$\dot{r} = v \cos \vartheta, \quad (14)$$

$$r \dot{\phi} = v \sin \vartheta \cos A, \quad (15)$$

$$r \cos \phi \dot{\lambda} = v \sin \vartheta \sin A, \quad (16)$$

que constituyen tres de nuestras ecuaciones fundamentales. El ángulo  $A$  es llamado *azimut* e indica la dirección del vector velocidad con respecto a la dirección norte.

Otra forma de expresar el vector velocidad es en términos del vector unitario  $\hat{\mathbf{v}}$ , de tal forma que podamos escribir  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{v}}$ , i.e.,  $\hat{\mathbf{v}}$  va en la dirección de la velocidad y hace parte de un conjunto de vectores unitarios ortogonales junto con  $\hat{\mathbf{h}}$  y  $\hat{\mathbf{a}}$  que llamaremos *esférico-azimutales* (Fig. 3). Nótese que  $\hat{\mathbf{h}}$  está en la misma dirección del vector momentum angular perpendicular al plano orbital y que  $\hat{\mathbf{a}}$  está en la dirección del *azimut*. La relación entre los vectores unitarios cartesianos  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  y los unitarios esféricos  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{f}}$  y  $\hat{\mathbf{l}}$  es, como es fácil de ver en la figura 2,

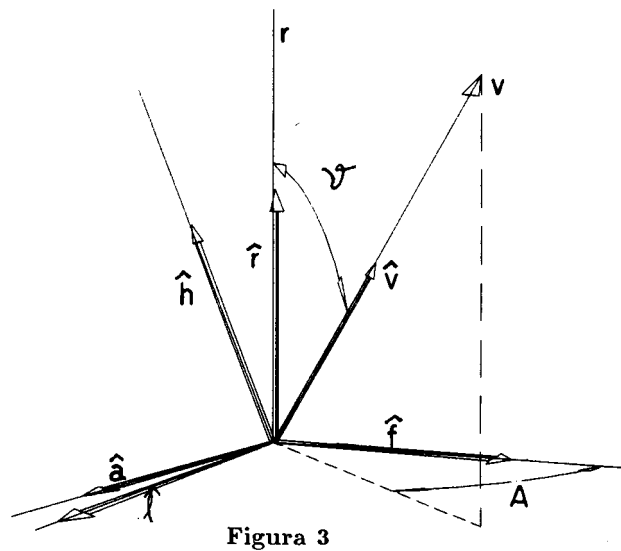


Figura 3

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{j}} + \sin \phi \hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{f}} &= -\sin \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{l}} &= \cos \lambda \hat{\mathbf{i}} - \sin \lambda \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (17)$$

De forma equivalente podemos encontrar la relación entre los vectores esféricos  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\mathbf{f}}$  y  $\hat{\mathbf{l}}$  con los unitarios esférico-azimutales  $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $\hat{\mathbf{h}}$  y  $\hat{\mathbf{a}}$ . De la figura 3 se deduce

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \cos A \sin \vartheta \hat{\mathbf{f}} + \sin A \sin \vartheta \hat{\mathbf{l}}, \\ \hat{\mathbf{h}} &= \sin \vartheta \hat{\mathbf{r}} - \cos A \cos \vartheta \hat{\mathbf{f}} - \sin A \cos \vartheta \hat{\mathbf{l}}, \\ \hat{\mathbf{a}} &= -\sin A \hat{\mathbf{f}} + \cos A \hat{\mathbf{l}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Las relaciones inversas se obtienen fácilmente de las anteriores,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} &= \cos \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{r}} - \sin \phi \sin \lambda \hat{\mathbf{f}} + \cos \lambda \hat{\mathbf{l}}, \\ \hat{\mathbf{j}} &= \cos \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{r}} - \sin \phi \cos \lambda \hat{\mathbf{f}} - \sin \lambda \hat{\mathbf{l}}, \\ \hat{\mathbf{k}} &= \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \phi \hat{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (19)$$

y también

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \sin \vartheta \cos A \hat{\mathbf{v}} - \cos A \cos \vartheta \hat{\mathbf{h}} - \sin A \hat{\mathbf{a}}, \\ \hat{\mathbf{l}} &= \sin \vartheta \sin A \hat{\mathbf{v}} - \sin A \cos \vartheta \hat{\mathbf{h}} + \cos A \hat{\mathbf{a}}, \\ \hat{\mathbf{r}} &= \cos \vartheta \hat{\mathbf{v}} + \sin \vartheta \hat{\mathbf{h}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Reemplazando las ecuaciones (17) en (18) podemos expresar  $\hat{\mathbf{v}}$  y  $\hat{\mathbf{h}}$  en términos de los vectores unitarios cartesianos de tal forma que

$$\hat{\mathbf{v}} = (-\cos A \sin \vartheta \sin \phi \sin \lambda + \sin A \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \vartheta \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \hat{\mathbf{i}} + (-\cos A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\
& - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \lambda + \cos \vartheta \cos \phi \cos \lambda) \hat{\mathbf{j}} \\
& + (\cos A \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi + \cos \vartheta \operatorname{sen} \phi) \hat{\mathbf{k}}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{h}} = & (\cos A \cos \vartheta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{sen} A \cos \vartheta \cos \lambda \\
& + \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi \operatorname{sen} \lambda) \hat{\mathbf{i}} + (\cos A \cos \vartheta \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \\
& + \operatorname{sen} A \cos \vartheta \operatorname{sen} \lambda + \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi \cos \lambda) \hat{\mathbf{j}} \\
& + (-\cos A \cos \vartheta \cos \phi + \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi) \hat{\mathbf{k}}. \quad (22)
\end{aligned}$$

El vector aceleración está dado por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d(v\hat{\mathbf{v}})}{dt} = v\dot{\hat{\mathbf{v}}} + \dot{v}\hat{\mathbf{v}}, \quad (23)$$

donde  $\dot{\hat{\mathbf{v}}}$  puede encontrarse al derivar la ecuación (21) con respecto al tiempo, la cual da, después de hacer algunas factorizaciones y tener en cuenta la definición de  $\hat{\mathbf{h}}$ ,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{v}}} = & [(-\cos A \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi \operatorname{sen} \lambda - \cos \vartheta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda) \dot{\phi} \\
& + (-\cos A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi \cos \lambda - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \lambda \\
& + \cos \vartheta \cos \phi \cos \lambda) \dot{\lambda} + (\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} A \\
& + \operatorname{sen} \vartheta \cos A \cos \lambda) \dot{A}] \hat{\mathbf{i}} + [(-\cos A \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi \cos \lambda \\
& - \cos \vartheta \operatorname{sen} \phi \cos \lambda) \dot{\phi} + (\cos A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda \\
& - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \vartheta \cos \lambda - \cos \vartheta \cos \phi \operatorname{sen} \lambda) \dot{\lambda} \\
& + (\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} \vartheta \cos A \operatorname{sen} \lambda) \dot{A}] \hat{\mathbf{j}} \\
& + [(-\cos A \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi + \cos \vartheta \cos \phi) \dot{\phi} \\
& - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \vartheta \cos \phi \dot{A}] \hat{\mathbf{k}} - \vartheta \dot{\hat{\mathbf{h}}}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Reemplazando en esta ecuación los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$  por los correspondientes vectores  $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $\hat{\mathbf{h}}$  y  $\hat{\mathbf{a}}$  con ayuda de las ecuaciones (19) y (20) obtenemos, después de un breve proceso algebraico,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{v}}} = & (-\cos A \dot{\phi} - \operatorname{sen} A \cos \phi \dot{\lambda}) \hat{\mathbf{h}} + [-\cos \vartheta \operatorname{sen} A \dot{\phi} \\
& - (\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \phi - \cos \vartheta \cos \phi \cos A) \dot{\lambda} \\
& + \operatorname{sen} \vartheta \dot{A}] \hat{\mathbf{a}} - \vartheta \dot{\hat{\mathbf{h}}}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Al reemplazar la ecuación (25) en (23) y utilizar las derivadas  $\dot{r}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\lambda}$  de las expresiones (14) a (16) encontramos,

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} = & v \left\{ -\frac{v}{r} \left[ \hat{\mathbf{h}} + \tan \phi \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \vartheta \hat{\mathbf{a}} \right] \operatorname{sen} \vartheta - \right. \\
& \left. \vartheta \dot{\hat{\mathbf{h}}} + \operatorname{sen} \vartheta \dot{A} \hat{\mathbf{a}} \right\} + \dot{v} \hat{\mathbf{v}}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que el vector aceleración relativo en el problema de los dos cuerpos puede expresarse, de acuerdo con las ecuaciones (3) y (20), como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2(1 + \frac{m_2}{m_1})}{r^2} (\cos \vartheta \hat{\mathbf{v}} + \operatorname{sen} \vartheta \hat{\mathbf{h}}).$$

Igualando las dos últimas ecuaciones encontramos

$$\dot{v} = -\frac{k^2(1 + \frac{m_2}{m_1})}{r^2} \cos \vartheta, \quad (27)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{k^2(1 + \frac{m_2}{m_1})}{r^2 v} \operatorname{sen} \vartheta - \frac{v \operatorname{sen} \vartheta}{r}, \quad (28)$$

$$\dot{A} = \frac{v \operatorname{sen} \vartheta \tan \phi \operatorname{sen} A}{r}. \quad (29)$$

Las ecuaciones (14), (15) y (16) junto con (27), (28) y (29) constituyen las seis ecuaciones diferenciales que describen el problema de los dos cuerpos.

### El Problema Principal del Satélite Artificial

En la terminología empleada en mecánica celeste la adición de más cuerpos o de otros tipos de fuerzas al modelo simple de los dos cuerpos se conoce con el nombre de perturbación, pues desde el punto de vista analítico muchos métodos de solución se apoyan en estudiar la evolución con el tiempo de la solución analítica (la cónica) cuando las nuevas fuerzas entran en consideración.

En el caso en que  $m_2$  se mueve cerca del cuerpo central  $m_1$ , i.e., donde  $r$  es del mismo orden de magnitud que el radio  $R$  de  $m_1$  ( $r/R > 1$ ) las asimetrías de masa que pueda tener este último juegan ya un papel importante en el movimiento de  $m_2$  pues el potencial pierde su dependencia exclusiva de  $r$  y se producen fuerzas de perturbación que alteran significativamente con el tiempo el movimiento de  $m_2$ .

El potencial de un cuerpo real puede representarse de la siguiente forma (Kaula, 1966)

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\operatorname{sen} \phi) T_{nm}(\lambda) \right], \quad (30)$$

donde  $P_{nm}(\operatorname{sen} \phi)$  son los polinomios asociados de Legendre y  $T_{nm}(\lambda) = C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m\lambda$ , siendo  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$  constantes adimensionales propias para cada cuerpo llamados coeficientes armónicos.

Cuando el centro de masas del cuerpo central se toma como el origen de coordenadas se obtiene  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ . Considerando la expansión hasta  $n = 2$ , haciendo explícita la simetría axial del problema y adoptando la notación  $J_2 = -C_{20}$ , llegamos a

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 P_{20}(\text{sen}\phi) \right], \quad (31)$$

donde  $P_{20}(\text{sen}\phi) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2\phi - 1)$ . En el caso de la mayoría de los cuerpos celestes a los cuales se les ha estudiado su campo gravitacional la consideración de expandir el potencial hasta  $n = 2$  se justifica en el sentido de que es el término que produce la mayor perturbación y por tanto domina el movimiento global del satélite. Por ejemplo, en el caso de la Tierra, el valor de  $J_2$  es al menos mil veces mayor que cualquiera de los restantes coeficientes (Seidelmann, 1992). Cuando se incluye como perturbación el término de  $J_2$  únicamente, el problema de encontrar el movimiento de  $m_2$  se conoce con el nombre de problema principal del satélite artificial.

La fuerza que se ejerce sobre la partícula de masa  $m_2$  debida a la partícula  $m_1$  puede representarse en términos del potencial como

$$\mathbf{F}_{21} = -\nabla V.$$

Cuando  $J_2 = 0$  se tiene el problema de los dos cuerpos que ya hemos estudiado. Igualando con la ecuación (2) y expresando el gradiente en términos de coordenadas esféricas encontramos

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \ddot{\mathbf{r}} = - \left[ \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \right].$$

Al efectuar las derivadas parciales y factorar tenemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2(1+\frac{m_2}{m_1})}{r} \left\{ \hat{\mathbf{r}} - \left( \frac{R}{r} \right)^2 J_2 [3P_{20}(\text{sen}\phi) \hat{\mathbf{r}} - P_{21}(\text{sen}\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}] \right\}, \quad (32)$$

donde  $P_{21}(\text{sen}\phi) = 3\text{sen}\phi \cos \phi$ .

Al reemplazar en (32) las ecuaciones (20) e igualar con (26) encontramos

$$\dot{v} = -\frac{k^2(1+\frac{m_2}{m_1})}{r^2} \left[ \cos \vartheta - \left( \frac{R}{r} \right)^2 J_2 (3P_{20}(\text{sen}\phi) \cos \vartheta - P_{21}(\text{sen}\phi) \text{sen} \vartheta \cos A) \right], \quad (33)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{k^2(1+\frac{m_2}{m_1})}{r^2 v} \left[ \text{sen} \vartheta - \left( \frac{R}{r} \right)^2 (3P_{20}(\text{sen}\phi) \text{sen} \vartheta + P_{21}(\text{sen}\phi) \cos \vartheta \cos A) \right] - \frac{v \text{sen} \vartheta}{r}, \quad (34)$$

$$\dot{A} = \frac{k^2(1+\frac{m_2}{m_1})}{vr^2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{J_2 P_{21}(\text{sen}\phi) \text{sen} A}{\text{sen} \vartheta}$$

$$+ \frac{v \text{sen} \vartheta \tan \phi \text{sen} A}{r}. \quad (35)$$

Las ecuaciones (33), (34) y (35) junto con (14), (15) y (16) constituyen las ecuaciones diferenciales del problema principal del satélite artificial.

### La Relación entre las dos Clases de Variables

Mostraremos a continuación la relación existente entre las componentes cartesianas del vector posición y velocidad con las variables  $r$ ,  $v$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi$ ,  $\lambda$  y  $A$ . Para  $r$  y  $v$  basta con aplicar las ecuaciones (6) y (7). De la definición del momentum angular encontramos,

$$\vartheta = \text{sen}^{-1} \left( \frac{h}{rv} \right). \quad (36)$$

De las ecuaciones (10) se deduce inmediatamente,

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right), \quad (37)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (38)$$

En la figura 4 es claro que el vector unitario  $\hat{\mathbf{h}}$  es perpendicular al plano de la órbita y su correlación con el momentum angular es inmediata. La relación entre los ángulos  $i$  y  $\Omega$  (llamados inclinación y longitud del nodo

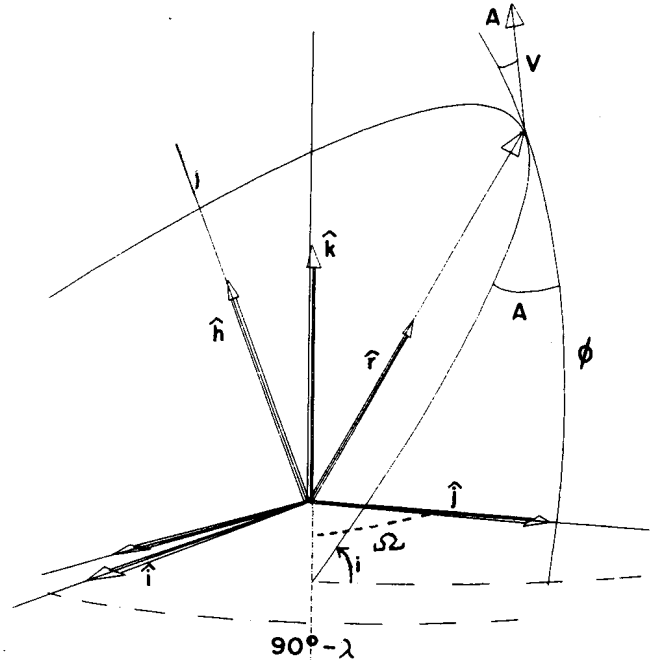


Figura 4

ascendente respectivamente) con  $\hat{\mathbf{h}}$  es

$$\hat{\mathbf{h}} = \cos \Omega \text{sen} i \hat{\mathbf{i}} - \text{sen} \Omega \text{sen} i \hat{\mathbf{j}} + \cos i \hat{\mathbf{k}}, \quad (39)$$

y puesto que  $\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{h}$ , al igualar (39) con (8) se deduce

$$i = \cos^{-1} \left[ \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{h} \right], \quad (40)$$

$$\Omega = \tan^{-1} \left[ \frac{x\dot{z} - z\dot{x}}{y\dot{z} - z\dot{y}} \right]. \quad (41)$$

Al aplicar el teorema del seno en el triángulo esférico rectángulo mostrado en la figura 4 hallamos

$$A = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen} i \text{sen}(\Omega - \lambda)}{\text{sen} \phi} \right]. \quad (42)$$

Las relaciones inversas, esto es, pasar de  $r$ ,  $v$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi$ ,  $\lambda$  y  $A$  para hallar  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$  son inmediatas, pues las componentes del vector posición son calculadas mediante (10) y las componentes del vector velocidad se hallan al reemplazar (14), (15) y (16) en (11).

## La Integración Numérica

Las ecuaciones diferenciales aquí expuestas están acopladas y su solución analítica completa no es posible. Sin embargo, en la práctica se puede hallar la solución de un problema en particular integrando las ecuaciones numéricamente. Tarea engorrosa hasta hace poco, la aparición de computadores veloces y baratos, software apropiado con asequibilidad a todos los campos de la educación y la investigación, han hecho que las integraciones numéricas sean relativamente fáciles de manipular aun para personas con escasos conocimientos matemáticos. Existen programas capaces de integrar en principio cualquier número de ecuaciones diferenciales simultáneas incluso de segundo orden. Un ejemplo de ello lo constituye el integrador RADAU (Everhart, 1985) especialmente diseñado para estudiar problemas de mecánica celeste. Pero existe más difusión de programas que integran sólo ecuaciones diferenciales de primer orden. Muy populares son los integradores de tipo Runge-Kutta y Burlish-Stoer cuyas subrutinas se encuentran en el Numerical Recipes (Teukolsky, 1992) escritos en lenguaje Fortran.

## Ejemplo

Consideremos como ejemplo el movimiento de un satélite artificial moviéndose en órbita baja alrededor de una tierra achatada pero despreciando la perturbación

producida por la resistencia del aire. Se conocen para el instante  $t=0$  las componentes del vector posición y velocidad del satélite en unidades de radio terrestre (1 radio terrestre,  $R.T.$ , = 6378.14 km) y radio terrestre por día ( $d$ ) respectivamente. Estas son:

$$\begin{aligned} x &= 0.5462983953, \\ y &= 0.9111710449, \\ z &= 0.0013483736, \\ \dot{x} &= -55.3351031107, \\ \dot{y} &= 33.0662350579, \\ \dot{z} &= 81.4706722711, \end{aligned}$$

que en términos de las variables aquí utilizadas corresponden a (los grados están en unidades de radianes):

$$\begin{aligned} r &= 1.0623918429, \\ v &= 103.8884978113, \\ \vartheta &= 1.5707114233, \\ \phi &= 0.0012691870, \\ \lambda &= 0.5400932308, \\ A &= 5.6138159950. \end{aligned}$$

Se desea determinar las componentes del vector posición y velocidad de dicho satélite para 3.0 días después del tiempo inicial. Para ello hemos utilizado el integrador del tipo Burlish-Stoer (Teukolsky, 1992), que permite integrar ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas. Las ecuaciones a integrar son las (14), (15) y (16) junto con (33), (34) y (35). Tomamos como valor de  $k=107.0926758 R.T.^{\frac{3}{2}}/d$ . El integrador obtiene como resultado para  $t=3.0 d$  los siguientes valores:

$$\begin{aligned} r &= 1.0610938780, \\ v &= 103.9363177498, \\ \vartheta &= 1.5695154977, \\ \phi &= -0.8149572259, \\ \lambda &= 1.8028679991, \\ A &= 5.1510316758, \end{aligned}$$

que en coordenadas cartesianas corresponden a

$$\begin{aligned} x &= 0.7082928266, \\ y &= -0.1673906127, \\ z &= -0.7721540471, \\ \dot{x} &= 52.9919592658, \\ \dot{y} &= 84.1649329608, \\ \dot{z} &= 30.1806968154. \end{aligned}$$

Al comparar con una integración numérica de las ecuaciones (32) realizada en el RADAU se obtienen resultados que difieren sólo hasta en la octava cifra decimal.

## Discusión

Es indudable que al considerar los problemas inherentes de la integración numérica (tiempo de CPU, re-

donde, pérdida de cifras significativas, sin considerar el problema logístico de la consecución de un computador o del programa integrador) muy pocos dejarían de utilizar la solución clásica analítica para sustituirla por métodos numéricos. Pero las ecuaciones de primer orden aquí expuestas se constituyen en una forma novedosa de estudiar el problema de los dos cuerpos en variables que son fáciles de visualizar. Poseen la ventaja de ser de primer orden lo cual permite la reducción de errores de dedondeo y pérdida de estabilidad. Además, pueden ser de utilidad desde el punto de vista pedagógico con el fin de comparar valores obtenidos analíticamente con los generados en una integración numérica. La introducción de cualquier fuerza adicional al problema de los dos cuerpos hace que las ecuaciones originales pierdan su integrabilidad. En el caso del problema principal del satélite artificial se puede expresar el problema en seis ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando las ecuaciones de Hamilton en variables de Delaunay, pero esto implica haber resuelto de antemano el problema de dos cuerpos, pues en tal caso se está estudiando cómo cambia de forma y orientación la cónica en el espacio. Lo mismo se puede decir de la integración de las diez ecuaciones diferenciales de primer orden que resultan de aplicar la transformación KS a problemas perturbados (Stiefel y Scheifele, 1971). En las variables utilizadas en este trabajo es muy sencillo introducir diversos tipos de fuerzas tales como la resistencia del aire, el empuje derivado de pérdida de masa, etc. La adición de términos que dan cuenta de otros tipos de fuerzas a nuestras ecuaciones diferenciales del problema de dos cuerpos son extensamente usadas por investigadores en el estudio del movimiento de cohetes y misiles (Feeley y Speyer, 1993) así como también en el proceso de reentrada de meteoritos a la atmósfera terrestre (Baldwin y Sheaffer, 1971).

### Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento al profesor Eduardo Brieva por sus recomendaciones y sugerencias y a Mauricio Giraldo y William Cepeda por la elaboración de las figuras. Este trabajo ha sido financiado por el CIN-DEC de la Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá, a través del proyecto 803116.

### Bibliografía

Baldwin, B. & Y. Sheaffer. 1971. Ablation and Breakup of Large Meteoroids During Atmospheric Entry. *J. Geophys. Res.* **76** (19): 4653-4668.

- Brouwer, D. 1959. Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag. *Astron. J.* **64** (1274): 378-397.
- Brouwer, D. & G. Clemence. 1961. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, Londres.
- Cowell, P. & A. Crommelin. 1910. Investigation of the Motion of Halley's Comet From 1759-1910, Appendix to Greenwich Observations 1909, Neill, Bellevue, Londres.
- Everhart, E. 1985. An Efficient Integrator That Uses Gauss-Radau Spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Carusi y Valsecchi (edi.): 185-202.
- Feeley, T. & J. Speyer. 1993. Approximate Optimal Guidance for the Advanced Launch System. *Nasa Contractor Report* 4568.
- Garfinkel, B. 1959. The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet. *Astron. J.* **64** (1274): 353-367.
- Goldstein, H. 1963. *Mecánica Clásica*, Aguilar Ediciones, Madrid.
- Irigoyen, R. & C. Simó. 1993. Non Integrability of the  $J_2$  Problem. *Cel. Mech. & Dyn. Astron.* **55** (3): 281-287.
- Kaula, W. 1966. *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publ. Comp., Waltham, Massachusetts.
- Kinoshita, H. & H. Nakai. 1989. Numerical Integration Methods in Dynamical Astronomy. *Cel. Mech. & Dyn. Astron.* **45** (3): 231-244.
- Kinoshita, H. & H. Yoshida. 1991. Symplectic Integrators and their Application to Dynamical Astronomy. *Cel. Mech. & Dyn. Astron.* **50** (1): 59-71.
- Kosai, Y. 1959. The Motion of Close Earth Satellite. *Astron. J.* **64** (1274):367-377.
- McCuskey, S. 1963. *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- Seidelmann, P. K. 1992. *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, California.
- Standish, E. 1982. The JPL Planetary Ephemerides. *Cel. Mech. & Dyn. Astron.* **26** (2): 181-186.
- Stiefel, E. & G. Scheifele. 1971. *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Teukolsky, S.. 1992. *Numerical Recipes en Fortran*, Cambridge Uni. Press, New York.