INTEGRACION ANALITICA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN SATELITE PERTURBADO POR LOS ARMONICOS SECTORIALES J_{22} Y K_{22} EN TERMINOS DE LA TRANSFORMACION KS

por

José Gregorio Portilla B.*

Resumen

Portilla, J.G.: Integración analítica de las ecuaciones de movimiento de un satélite perturbado por los armónicos J_{22} y K_{22} en términos de la transformación KS. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **20** (76): 15-23, 1996. ISSN 0370-3908.

A partir de las ecuaciones de perturbación en términos de la transformación KS se desarrolla la integración analítica de las ecuaciones que describen el movimiento de un satélite perturbado por los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22} del potencial gravitacional terrestre. El desarrollo en series es llevado hasta la cuarta potencia en las excentricidades. La simetría existente permite integrar solamente dos de las nueve ecuaciones. Se presenta una comparación entre la teoría y la integración numérica directa de las ecuaciones de movimiento.

Palabras claves: Mecánica celeste - satélites artificiales - potencial.

Abstract

Starting from the equations of perturbation of the KS-transformation, analytical integration of equations describing the motion of a perturbed satellite by sectorial harmonic J_{22} and K_{22} is developed. The series expansion is carried out to fourth power of the eccentricity. The symmetry between the differential equations allows integrate only two of the nine equations. A comparison between the theory and the direct numerical integration of the equations of movement is presented.

Keys words: Celestial mechanics - artificial satellites - potential.

* Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Apartado Aéreo 2584, Santafé de Bogotá, Colombia. E-Mail:gportill @ciencias.campus.unal.edu.co

Introducción

La determinación de la posición de un satélite artificial alrededor de la tierra no es tarea sencilla. Y más si se pretende conocerla con un alto grado de exactitud. Por un lado son varias las fuerzas que afectan el movimiento: la atracción gravitacional generada por la tierra, el sol, la luna y los planetas, el rozamiento con la atmósfera, la presión de radiación, el campo magnético terrestre, la resistencia del polvo interplanetario, el efecto Poynting-Robertson, el efecto Yarkovsky, el efecto Schach, etc. Por otro lado, al resolver las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento, se encuentra el inconveniente de que éstas no se pueden integrar de forma completamente general. Esto deja sólo dos opciones: la primera es recurrir a métodos aproximativos de integración de ecuaciones diferenciales, usualmente por expansión en series de potencias; la segunda consiste en la integración numérica directa de las ecuaciones. Las integraciones analíticas tienen el inconveniente de generar expresiones algebraicas muy extensas y en algunos casos los métodos que permiten la integración son de dudosa validez matemática. La integración numérica consume bastante tiempo de CPU y los problemas de redondeo y de degradación en cifras significativas son serios. Ambos métodos comparten la desventaja de que son útiles sólo para períodos cortos de tiempo.

Desde finales de los años cincuenta se han venido desarrollando decenas de teorías analíticas, procurando la mayoría atacar el problema del movimiento sujeto al complicado campo gravitacional generado por la no esfericidad de la tierra. Se destacan las ahora clásicas teorías de **Brouwer** (1959) y **Kozai** (1959) que incluyeron los armónicos J_2, J_3 y J_4. Con el rápido advenimiento de satélites colocados en diversas órbitas hubo la necesidad de extender los desarrollos para incluir armónicos superiores. Hoy en día se conocen, con bastante precisión (gracias al estudio minucioso del movimiento de satélites geodésicos), los armónicos terrestres hasta J_{3636}. De importancia en la descripción del movimiento de satélites geoestacionarios son los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22} que dan cuenta de la variación en longitud del potencial. Estos términos representan la denominada triaxialidad del ecuador y tienen gran importancia en la estabilidad y en la conservación del equilibrio en la posición estacionaria de un satélite de 24 horas, véase por ejemplo **Blitzer** *et al.* (1963) o **Morando** (1963).

Con el desarrollo de la transformación KS y la regularización de las ecuaciones de movimiento (**Stiefel** y **Scheifele**, 1971), se dispone de un formalismo novedoso que permite facilitar el estudio de cierto tipo de movimientos, particularmente encuentros cercanos y colisiones. Si bien es cierto que los denominados elementos en la transformación KS son diez (9 de los cuales son constantes y uno función lineal del tiempo en el movimiento kepleriano), tienen la enorme ventaja de que las ecuaciones diferenciales de los mismos en el movimiento perturbado son de primer orden y en algunos casos son relativamente sencillas de resolver. **Sharma** (1989) estudió el movimiento de un satélite perturbado por el armónico zonal J_2 y demostró que gracias a la simetría de las ecuaciones bastaba integrar no diez ecuaciones sino tres. Posteriormente el mismo autor (**Sharma**, 1993) realizó los desarrollos que incluyeron los armónicos zonales J_3 y J_4. **Portilla** (1994) extendió la teoría para incluir los armónicos zonales J_5 y J_6. En la presente comunicación consideraremos las perturbaciones originadas por un potencial dependiente de la longitud y particularmente se estudiarán las originadas por los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22}.

Las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la variacion de los elementos de la transformación KS en términos de la anomalía excéntrica E de un objeto sometido solamente a fuerzas que se derivan de un potencial perturbador V_p son, (**Stiefel** y **Scheifele**, 1971):

$$\frac{d\omega}{dE} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3}\left[K^2 - 2rV_p - \frac{r}{2}\left(\vec{u}, \frac{\partial V_p}{\partial \vec{u}}\right)\right], \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dE} = \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{V_p}{2}\vec{u} + \frac{r}{4}\frac{\partial V_p}{\partial \vec{u}}\right] sen\frac{E}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{dE} = -\frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{V_p}{2}\vec{u} + \frac{r}{4}\frac{\partial V_p}{\partial \vec{u}}\right] \cos\frac{E}{2}, \tag{4}$$

en donde ω es la frecuencia angular, τ el tiempo ficticio, $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ representan cada uno un cuatrivector de elementos, $K^2 = GM$ (G siendo la constante de Cavendish y M la masa del cuerpo central), y r es el radio vector que viene dado por

$$r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}; \tag{5}$$

la relacion entre el vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ está dada por la denominada matriz KS

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Es claro que $x_4 = 0$.

Las componentes de $\vec{u}$ son funciones armonicas de la anomalía excéntrica (la variable independiente en este formalismo) mediante

$$\vec{u} = \vec{\alpha}\cos\frac{E}{2} + \vec{\beta} sen\frac{E}{2}. \tag{7}$$

La relación entre el tiempo ficticio τ y el tiempo físico t viene dada por:

$$\tau = t + \frac{1}{\omega}(\vec{u}, \vec{u}^*), \tag{8}$$

donde

$$\vec{u}^* = \frac{d\vec{u}}{dE} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha} sen\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\vec{\beta}\cos\frac{E}{2}, \tag{9}$$

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{r} - \frac{1}{2}\left|\dot{\vec{x}}\right|^2 - V_p\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

El Potencial Perturbador

El potencial gravitacional de un cuerpo planetario se representa usualmente por una expresión de la forma (**Cook**, 1963):

$$V = -\frac{K^2}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\phi)T_{nm}(\lambda)\right]$$

donde R es el radio ecuatorial del cuerpo central, $P_{nm}(\cos\phi)$ los polinomios asociados de Legendre, $T_{nm}(\lambda) = C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm} senm\lambda$, con C_{nm} y S_{nm} constantes adimensionales propias para cada cuerpo llamados coeficientes armónicos y λ y ϕ la longitud y el complemento de la latitud respectivamente.

Cuando el centro de masas del cuerpo planetario se toma como el origen de coordenadas se obtiene $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$. Considerando la expansión hasta $n = 2$ y adoptando la notación comúnmente usada en dinámica de satélites ($J_n = -C_{n0}$, $J_{nm} = -C_{nm}$, $K_{nm} = -S_{nm}$) llegamos a

$$V = -\frac{K^2}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_{20}(\cos\phi)\right] + \left[\left(\frac{RK}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}\right) P_{20}(\cos\phi)(J_{22}\cos 2\lambda + K_{22} sen2\lambda)\right] \tag{11}$$

Los armónicos del tipo J_n son llamados zonales, los del tipo $J_{nn}(n \neq 0)$ sectoriales y los del tipo $J_{nm}(m \neq n \neq 0)$ teselares.

La ecuación (11) puede escribirse también

$$V = V_o + V_p^z + V_p^s,$$

en la cual

$$V_o = -\frac{K^2}{r}, \tag{12}$$

$$V_p^z = \frac{J_2 K^2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_{20}(\cos\phi), \tag{13}$$

$$V_p^s = \frac{K^2}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 3sen^2\phi(J_{22}\cos 2\lambda + K_{22} sen2\lambda), \tag{14}$$

donde en la última ecuación se ha utilizado la relación $P_{20}(\cos\phi) = 3sen^2\phi$. El potencial V_o está implícitamente incluido en las ecuaciones KS por tratarse del potencial que da origen al movimiento kepleriano. El potencial perturbador V_p^z que genera la denominada teoría principal del satélite artificial fue estudiado por **Sharma** (1989). En nuestro estudio nos concentraremos en el potencial perturbador V_p^s con el fin de estudiar los efectos de los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22}.

La relación entre las coordenadas esféricas y rectangulares (x_1, x_2, x_3) permite escribir

$$sen^2\phi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2},$$

$$\cos 2\lambda = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$sen2\lambda = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

y asi obtenemos finalmente

$$V_p = V_p^s = \frac{3K^2R^2}{r^5}\left[J_{22}(x_1^2 - x_2^2) + K_{22}x_1x_2\right]. \tag{15}$$

La Integración Analítica

La integración de la ecuación (1) es inmediata:

$$\omega = cte,$$

que no es sino otra forma de representar la conservación de la energía total del sistema (ver ec. 10).

Por otro lado, es fácil ver que

$$\left(\vec{u}, \frac{\partial V_p}{\partial \vec{u}}\right) = -6V_p,$$

y con la ecuación (15) podemos ecribir la ecuación (2) como

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{K^2}{8\omega^3}\left\{1 + \frac{3R^2}{r^4}\left[J_{22}\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2K_{22}x_1x_2\right]\right\}. \tag{16}$$

Ahora bien, conocemos en un instante dado los vectores posición y velocidad del satélite, esto es, conocemos para una época de referencia los vectores $\vec{x}$, $\dot{\vec{x}}$, $\vec{u}$, $\vec{u}^*$ que también definen una órbita osculatriz con semieje mayor a y excentricidad e definidos por

$$a = \frac{rK^2}{2K^2 - 16\omega^2 |\vec{u}^*|^2},$$

$$e = \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{16\omega^2}{K^2 a}\left(\vec{u}.\vec{u}^*\right)^2\right]^{1/2}.$$

Aplicando la ecuación $r = a(1 - e\cos E)$ y expandiendo en términos de e hasta la cuarta potencia con ayuda del teorema del binomio obtenemos expresiones para $1/r^n$ $(n = 4, 5)$ en función de E,

$$\frac{1}{r^4} = 1 + 4e\cos E + 10e^2\cos^2 E + 20e^3\cos^3 E + 35e^4\cos^4 E, \tag{17}$$

$$\frac{1}{r^5} = 1 + 5e\cos E + 15e^2\cos^2 E + 35e^3\cos^3 E + 70e^4\cos^4 E. \tag{18}$$

Los valores de x_1 y x_2 en términos de α_i y β_i son dados por

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sigma_0 + \sigma_1\cos E + \sigma_2 senE,\\
x_2 &= \pi_0 + \pi_1\cos E + \pi_2 senE,\\
x_1^2 &= \gamma_0 + \gamma_1\cos E + \gamma_2\cos^2 E + \gamma_3 senE\\
&\quad + \gamma_4 senE\cos E,\\
x_2^2 &= \epsilon_0 + \epsilon_1\cos E + \epsilon_2\cos^2 E + \epsilon_3 senE\\
&\quad + \epsilon_4 senE\cos E,\\
x_1x_2 &= \eta_0 + \eta_1\cos E + \eta_2\cos^2 E + \eta_3 senE\\
&\quad + \eta_4 senE,
\end{aligned} \tag{19}$$

en donde

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{1}{2}\left[\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right) - \left(\alpha_3^2 + \beta_3^2\right) + \alpha_4^2 + \beta_4^2\right],\\
\sigma_1 &= \frac{1}{2}\left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \left(\alpha_2^2 - \beta_2^2\right) - \left(\alpha_3^2 - \beta_3^2\right) + \alpha_4^2 - \beta_4^2\right],\\
\sigma_2 &= \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4,\\
\pi_0 &= \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4 + \beta_1\beta_2 - \beta_3\beta_4,\\
\pi_1 &= \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4 - \beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4,\\
\pi_2 &= \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3,\\
\gamma_0 &= \sigma_0^2 + \sigma_2^2,\\
\gamma_1 &= 2\sigma_0\sigma_1,\\
\gamma_2 &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2,\\
\gamma_3 &= 2\sigma_0\sigma_2,\\
\gamma_4 &= 2\sigma_1\sigma_2,\\
\epsilon_0 &= \pi_0^2 + \pi_2^2,\\
\epsilon_1 &= 2\pi_0\pi_1,\\
\epsilon_2 &= \pi_1^2 - \pi_2^2,\\
\epsilon_3 &= 2\pi_0\sigma_2,\\
\epsilon_4 &= 2\pi_1\pi_2,\\
\eta_0 &= \sigma_0\pi_0 + \sigma_2\pi_2,\\
\eta_1 &= \sigma_0\pi_1 + \sigma_1\pi_0,\\
\eta_2 &= \sigma_1\pi_1 - \sigma_2\pi_2,\\
\eta_3 &= \sigma_0\pi_2 + \sigma_2\pi_0,\\
\eta_4 &= \sigma_1\pi_2 + \sigma_2\pi_1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Sustituyendo las ecuaciones (17) y (19) en (16), integrando y ordenando tenemos

$$\tau = \frac{K^2}{8\omega^3}\left\{E + \frac{3R^2}{a^4}\left[J_{22}\Psi_{(\chi)} + 2K_{22}\Psi_{(\eta)}\right]\right\}, \tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Psi_{(\chi)} = {} & (v_o + \frac{1}{2}v_2 + \frac{3}{8}v_4 + \frac{5}{16}v_6)E\\
& + (v_1 + \frac{3}{4}v_3 + \frac{5}{8}v_5) senE\\
& + \frac{1}{4}(v_2 + v_4 + \frac{5}{16}v_6) sen2E\\
& + \frac{1}{12}(v_3 + \frac{5}{4}v_5) sen3E\\
& + \frac{1}{32}(v_4 + \frac{3}{2}v_6) sen4E\\
& + \frac{1}{80}v_5 sen5E + \frac{1}{192}v_6 sen6E\\
& + (w_0 + \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + \frac{5}{32}w_3 + \frac{1}{5}w_4 + \frac{11}{96}w_5)\\
& - (w_0 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{8}w_4)\cos E\\
& - \frac{1}{4}(w_1 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{5}{16}w_5)\cos 2E
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{12}(w_2 + \frac{3}{4}w_4)\cos 3E - \frac{1}{32}(w_3 + w_5)\cos 4E - \frac{1}{80}w_4 \cos 5E - \frac{1}{192}w_5 \cos 6E, \quad (22)$$

y

$$\begin{aligned} v_0 &= \chi_0, \\ v_1 &= \chi_1 + 4e\chi_0, \\ v_2 &= \chi_2 + 4e\chi_1 + 10e^2\chi_0, \\ v_3 &= 2e(2\chi_2 + 5e\chi_1 + 10e^2\chi_0), \\ v_4 &= 5e^2(2\chi_2 + 4e\chi_1 + 7e^2\chi_0), \\ v_5 &= 5e^3(4\chi_2 + 7e\chi_1), \\ v_6 &= 35e^4\chi_2, \\ w_0 &= \chi_3, \\ w_1 &= \chi_4 + 4e\chi_3, \\ w_2 &= 2e(2\chi_4 + 5e\chi_3), \\ w_3 &= 10e^2(\chi_4 + 2e\chi_3), \\ w_4 &= 5e^3(4\chi_4 + 7e\chi_3), \\ w_5 &= 35e^4\chi_4, \end{aligned} \quad (23)$$

y además

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \gamma_0 - \epsilon_0, \\ \chi_1 &= \gamma_1 - \epsilon_1, \\ \chi_2 &= \gamma_2 - \epsilon_2, \\ \chi_3 &= \gamma_3 - \epsilon_3, \\ \chi_4 &= \gamma_4 - \epsilon_4. \end{aligned} \quad (24)$$

El valor de $\Psi_{(\eta)}$ es completamente equivalente al de $\Psi_{(\chi)}$ salvo que, en las ecuaciones (23), los $\chi_n (n = 0, 1, 2, 3, 4)$ se reemplazan por los η_n $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ de las ecuaciones (20).

Por otro lado, las ecuaciones (3) y (4) pueden escribirse de la forma

$$\frac{d\alpha_i}{dE} = Q_i sen(E/2), \quad (25)$$

$$\frac{d\beta_i}{dE} = -Q_i \cos(E/2), \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_i = \frac{3K^2R^2}{4\omega^2}\{ &- \frac{4[J_{22}(x_1^2 - x_2^2) + 2K_{22}x_1x_2]u_i}{r^5} + \\ &+ (-1)^{i+1}\Delta_i \frac{[2J_{22}x_1 + 2K_{22}x_2]\, u_i}{r^4} + \\ &+ \Delta_i \frac{[-2J_{22}x_2 + 2K_{22}x_1]\, u_k}{r^4}\}, \end{aligned} \quad (27)$$

con $(i = 1, 2, 3, 4)$,

$$u_k = \left\{ \begin{array}{lll} i+1 & si & i = 1 \;\; o \;\; 3 \\ i-1 & si & i = 2 \;\; o \;\; 4 \end{array} \right\} \; y$$

$$\Delta_i = \left\{ \begin{array}{lll} +1 & si & i = 1 \;\; o \;\; 2 \\ -1 & si & i = 3 \;\; o \;\; 4 \end{array} \right\} .$$

Puesto que en las ecuaciones (25) y (26) aparecen en cado uno de los términos expresiones de la forma $u_i sen(E/2)$ y $u_i \cos(E/2)$ y dado que éstos pueden ser escritos como

$$u_i sen(E/2) = u_i \cos(E/2) = = \frac{1}{2}[q_0^{(i)} + q_1^{(i)} \cos E + q_2^{(i)} senE],$$

con

$$q_0^{(i)} = \beta_i, \quad q_1^{(i)} = -\beta_i, \quad q_2^{(i)} = \alpha_i, \quad (28)$$

en el primer caso, y

$$q_0^{(i)} = \alpha_i, \quad q_1^{(i)} = \alpha_i, \quad q_2^{(i)} = \beta_i, \quad (29)$$

en el segundo caso, entonces es posible integrar analíticamente las ocho ecuaciones representadas por (25) y (26) con sólo resolver una de ellas. Al integrar las ecuaciones (25) y después de simplificar y arreglar obtenemos

$$\alpha_i = \frac{3K^2R^2}{4\omega^2 a^4}\left[J_{22}\Xi_{(\chi)} + K_{22}\Xi_{(\eta)}\right], \quad (30)$$

con $\tau = 0$ en $t = 0$ y donde

$$\begin{aligned} \Xi_{(\chi)} = &(r_0 + \frac{1}{2}r_2 + \frac{3}{8}r_4 + \frac{5}{16}r_6)E \\ &+ (r_1 + \frac{3}{4}r_3 + \frac{5}{8}r_5 + \frac{35}{64}r_7) senE \\ &+ \frac{1}{4}(r_2 + r_4 + \frac{15}{16}r_6) sen2E \\ &+ \frac{1}{4}(\frac{1}{3}r_3 + \frac{5}{12}r_5 + \frac{7}{16}r_7) sen3E \\ &+ \frac{1}{32}(r_4 + \frac{3}{2}r_6) sen4E + \frac{1}{80}(r_5 + \frac{7}{4}r_7) sen5E \\ &+ \frac{1}{192}r_6 sen6E + \frac{1}{448}r_7 sen7E \\ &+ s_0 + \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{5}{32}s_3 + \frac{1}{5}s_4 + \frac{11}{96}s_5 + \frac{1}{7}s_6 \\ &- (s_0 + \frac{1}{4}s_2 + \frac{1}{8}s_4 + \frac{5}{64}s_6)\cos E \\ &- \frac{1}{4}(s_1 + \frac{1}{2}s_3 + \frac{5}{16}s_5)\cos 2E \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}(\frac{1}{3}s_2+\frac{1}{4}s_4+\frac{3}{16}s_6)\cos 3E\\
&-\frac{1}{32}(s_3+s_5)\cos 4E-\frac{1}{16}(\frac{1}{5}s_4+\frac{1}{4}s_6)\cos 5E\\
&-\frac{1}{192}s_5\cos 6E-\frac{1}{448}s_6\cos 7E, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

en la cual

$$
\begin{aligned}
r_0&=\rho_0 g_0^{(i)}+\rho_1 m_0^{(i)}+\rho_2 n_0^{(k)},\\
r_1&=\rho_0(g_1^{(i)}+5eg_0^{(i)})+\rho_1(m_1^{(i)}\\
&\quad+4em_0^{(i)})+\rho_2(n_1^{(k)}+4en_0^{(k)}),\\
r_2&=\rho_0(g_2^{(i)}+5eg_1^{(i)}+15e^2g_0^{(i)})\\
&\quad+\rho_1(m_2^{(i)}+4em_1^{(i)}+10e^2m_0^{(i)})\\
&\quad+\rho_2(n_2^{(k)}+4en_1^{(k)}+10e^2n_0^{(k)}),\\
r_3&=\rho_0(g_3^{(i)}+5eg_2^{(i)}+15e^2g_1^{(i)}+35e^3g_0^{(i)})\\
&\quad+2\rho_1 e(2m_2^{(i)}+5em_1^{(i)}+10e^2m_0^{(i)})\\
&\quad+2\rho_2 e(2n_2^{(k)}+5en_1^{(k)}+10e^2n_0^{(k)}),\\
r_4&=5\rho_0 e(g_3^{(i)}+3eg_2^{(i)}+7e^2g_1^{(i)}+14e^3g_0^{(i)})\\
&\quad+5\rho_1 e^2(2m_2^{(i)}+4em_1^{(i)}+7e^2m_0^{(i)})\\
&\quad+5\rho_2 e^2(2n_2^{(k)}+4en_1^{(k)}+7e^2n_0^{(k)}),\\
r_5&=5\rho_0 e^2(3g_3^{(i)}+7eg_2^{(i)}+14e^2g_0^{(i)})\\
&\quad+5\rho_1 e^3(4m_2^{(i)}+7em_1^{(i)})\\
&\quad+5\rho_2 e^3(4n_2^{(k)}+7en_1^{(k)}),\\
r_6&=35\rho_0 e^3(g_3^{(i)}+2eg_2^{(i)})+35\rho_1 e^4 m_2^{(i)}\\
&\quad+35\rho_2 e^4 n_2^{(k)},\\
r_7&=70\rho_0 e^4 g_3^{(i)},\\
s_0&=\rho_0 g_4^{(i)}+\rho_1 m_3^{(i)}+\rho_2 n_3^{(k)},\\
s_1&=\rho_0(g_5^{(i)}+5eg_4^{(i)})+\rho_1(m_4^{(i)}+4em_3^{(i)})\\
&\quad+\rho_2(n_4^{(k)}+4en_3^{(k)}),\\
s_2&=\rho_0(g_6^{(i)}+5eg_5^{(i)}+15e^2g_4^{(i)})\\
&\quad+2\rho_1 e(2m_4^{(i)}+5em_3^{(i)})\\
&\quad+2\rho_2 e(2n_4^{(k)}+5en_3^{(k)}),\\
s_3&=5\rho_0 e(g_6^{(i)}+3eg_5^{(i)}+7e^2g_4^{(i)})\\
&\quad+10\rho_1 e^2(m_4^{(i)}+2em_3^{(i)})+10\rho_2 e^2(n_4^{(k)}\\
&\quad+2en_3^{(k)}),\\
s_4&=5\rho_0 e^2(3g_6^{(i)}+7eg_5^{(i)}+14e^2g_4^{(i)})\\
&\quad+5\rho_1 e^3(4m_4^{(i)}+7em_3^{(i)})\\
&\quad+5\rho_2 e^3(4n_4^{(k)}+7en_3^{(k)}),\\
s_5&=35\rho_0 e^3(g_6^{(i)}+2eg_5^{(i)})+35\rho_1 e^4 m_4^{(i)}\\
&\quad+35\rho_2 e^4 n_4^{(k)},\\
s_6&=70\rho_0 e^4 g_6^{(i)}, \qquad (32)
\end{aligned}
$$

y al mismo tiempo

$$
\begin{aligned}
g_o^{(i)}&=\chi_0 q_0^{(i)}+\chi_3 q_2^{(i)},\\
g_1^{(i)}&=\chi_1 q_0^{(i)}+\chi_0 q_1^{(i)}+\chi_4 q_2^{(i)},\\
g_2^{(i)}&=\chi_2 q_0^{(i)}+\chi_1 q_1^{(i)}-\chi_3 q_2^{(i)},\\
g_3^{(i)}&=\chi_2 q_1^{(i)}-\chi_4 q_2^{(i)},\\
g_4^{(i)}&=\chi_3 q_0^{(i)}+\chi_0 q_2^{(i)},\\
g_5^{(i)}&=\chi_4 q_0^{(i)}+\chi_3 q_1^{(i)}+\chi_1 q_2^{(i)},\\
g_6^{(i)}&=\chi_4 q_1^{(i)}+\chi_2 q_2^{(i)}, \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_o^{(i)}&=\sigma_0 q_0^{(i)}+\sigma_2 q_2^{(i)},\\
m_1^{(i)}&=\sigma_0 q_1^{(i)}+\sigma_1 q_0^{(i)},\\
m_2^{(i)}&=\sigma_1 q_1^{(i)}-\sigma_2 q_2^{(i)},\\
m_3^{(i)}&=\sigma_0 q_2^{(i)}+\sigma_2 q_0^{(i)},\\
m_4^{(i)}&=\sigma_1 q_2^{(i)}+\sigma_2 q_1^{(i)}, \qquad (34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_0^{(i)}&=\pi_0 q_0^{(i)}+\pi_2 q_2^{(i)},\\
n_1^{(i)}&=\pi_0 q_1^{(i)}+\pi_1 q_0^{(i)},\\
n_2^{(i)}&=\pi_1 q_1^{(i)}-\pi_2 q_2^{(i)},\\
n_3^{(i)}&=\pi_0 q_2^{(i)}+\pi_2 q_0^{(i)},\\
n_4^{(i)}&=\pi_1 q_2^{(i)}+\pi_2 q_1^{(i)}, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

con

$$
\rho_0=-\frac{2}{a}, \qquad \rho_1=(-1)^{i+1}\Delta_i, \qquad \rho_2=-\Delta_i. \qquad (36)
$$

La ecuación para $\Xi_{(\eta)}$ es equivalente a la ecuación (31) pero con los cambios siguientes: en las ecuaciones para r y s, ecuaciones (32), los valores de ρ_0 y ρ_2 son remplazados por:

$$
\rho_0=-\frac{4}{a}, \qquad \rho_2=\Delta_i, \qquad (37)
$$

los $m_n^{(i)}$ $(n=0,1,2,3,4)$ son reemplazados por los $n_n^{(i)}$ $(n=0,1,2,3,4)$ y viceversa y los valores de $g_n^{(i)}$ $(n=0,1,2,3,4,5,6)$ son ahora calculados reemplazando los valores de χ_n $(n=0,1,2,3,4)$ por los $\eta_n (n=0,1,2,3,4)$.

Para obtener β_i basta con utilizar los valores de $q_n^{(i)}$, n=0,1,2 que aparecen en la ecuación (29) y colocar un signo negativo al lado derecho de la ecuación (30).

Al adoptar $E = 0$ como condición inicial obtenemos:

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\vec{u}, \vec{u}^*),$$

$$\vec{\alpha} = \vec{u}, \qquad \vec{\beta} = \vec{u}^*.$$

Con esto, las ecuaciones (21) y (30) permiten el cálculo de τ, $\vec{\alpha}_{iE_1}$ y $\vec{\beta}_{iE_1}$ para el instante correspondiente a $E = E_1$ y se tendrá

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i_{E_1}},$$

$$\beta_i = \beta_{i0} + \beta_{i_{E_1}}.$$

Habiendo calculado τ, α_iy β_i se procede a determinar el tiempo físico t y los vectores $\vec{x}$ y $\dot{\vec{x}}$.

Resultados Numéricos

Con el fín de establecer hasta que punto la teoría analítica aquí desarrollada describe adecuadamente el movimiento de un satélite perturbado únicamente por los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22} se realizó una comparación con valores que se obtienen directamente de integrar numéricamente las ecuaciones (1) a (4). Se estudiaron dos casos A y B con diferentes semiejes mayores (órbitas de 24 horas y 12 horas respectivamente) y excentricidades también distintas pero con los restantes parámetros orbitales iguales. Las condiciones iniciales (vectores de posición y velocidad junto con los parámetros orbitales) utilizados en este estudio se transcriben en la tabla 1. A través de todo el estudio los valores adoptados para K^2 y R fueron 398600.5 km^{3}s^{-2} y 6378.14 km respectivamente. Igualmente, los valores de J_{22} y K_{22} fueron calculados a partir de los respectivos coeficientes completamente normalizados (**Seidelmann**, 1992). Los valores calculados son: $J_{22} = -1.574321255 \times 10^{-6}$, $K_{22} = 9.035926411 \times 10^{-7}$.

Las tablas 2 y 3 contienen los resultados tanto analíticos como numéricos para los casos A y B respectivamente. Las tablas contienen el tiempo del paso por el perigeo en segundos, las componentes de los vectores posición en kilómetros, las de la velocidad en kilómetros por segundo, y los elementos orbitales osculadores en función de varios valores arbitrarios de E (100, 500, 5100, 36270). La integración numérica de las ecuaciones (1), (16), (25) y (26), en total 10 ecuaciones de primer orden, fue llevada a cabo utilizando el integrador numérico Radau (**Everhart**, 1985). El paso de integración en la variable independiente E fue de 0.01 radianes (0.57 grados). Así mismo, los valores de esta integración numérica fueron comparados a modo de control con los de una integración numérica alterna de las tres ecuaciones diferenciales de segundo orden ($\ddot{\vec{x}} = -\nabla V_p^s$) en las cuales la variable independiente es el tiempo físico. Los valores que se obtienen en ambas integraciones numéricas coinciden hasta en la doceava cifra decimal para todos los valores de la variable independiente. Por tal razón, los resultados de esta última integración no se hallan consignados en las tablas.

Como es de esperarse, para valores pequeños de E la teoría analítica se acomoda perfectamente a los resultados de la integración numérica. Los resultados para el caso A (satélite de 24 horas) indican que la integración analítica arroja valo- res muy buenos aún para grandes valores de E. Por ejemplo, para E=36270, equivalente en este caso a 100.481176 días transcurridos desde el tiempo inicial, los valores de las componentes en x_1, x_2 y x_3 divergen en tan sólo la última cifra décimal con respecto a los valores obtenidos en la integración numérica. Aún para valores moderadamente grandes en excentricidad, como en el caso B, la teoría analítica se comporta bien, pues al cabo de 50.518178 días transcurridos desde el tiempo inicial (E=36270), las componentes del vector posición se diferencian en la tercera cifra décimal con respecto a los valores que se obtienen en la integración numérica, lo que representa una incertidumbre de apenas unos pocos metros en posición. De igual forma los valores que se obtienen de los elementos orbitales calculados con la teoría analítica, para grandes valores de E, se diferencian en muy poco con los arrojados por la inte-

Tabla 1. Condiciones Iniciales

Cond. Ini.	Caso A	Caso B
x_1 (Km)	0.0	0.0
x_2 (Km)	-41531.1864898	-24257.9241064
x_3 (Km)	-362.4371737	-211.6956966
$\dot{x}_1$ (Km/s)	3.12109162	4.2320140
$\dot{x}_2$ (Km/s)	0.0	0.0
$\dot{x}_3$ (Km/s)	0.0	0.0
a (Km)	42165.2466298	26658.0745154
e	0.015	0.09
i	0.5	0.5
ω	270.0	270.0
Ω	0.0	0.0
M	0.0	0.0

Tabla 2. Comparación entre la teoría analítica y la integración numérica. CASO A

Parámetro	Anal.,E=100	Num.,E=100	Anal.,E=500	Num.,E=500	Anal.,E=51000	Num.,E=51000	Anal.,E=36270	Num.,E=36270
t(seg)	23732.8072861	23732.8072861	119544.7464457	119544.7464456	1220527.0112318	1220527.0112311	8681573.6159061	8681573.6159012
x_1	41520.0005359	41520.0005359	27100.2510018	27100.2510018	36512.0774301	36512.0774301	-42160.5182948	-42160.5182943
x_2	7954.1111457	7954.1111457	32931.6995056	32931.6995055	-20449.3604465	-20449.3604466	632.4614621	632.4614626
x_3	69.4144369	69.4144369	287.3905342	287.3905342	-178.4628981	-178.4628981	5.5447802	5.5447802
$\dot{x}_1$	-0.5324558	-0.5324558	-2.3282774	-2.3282774	1.5487533	1.5487533	0.0000004	0.0000004
$\dot{x}_2$	3.0199289	3.0199289	1.9538015	1.9538015	2.6827192	2.6827192	-3.0745036	-3.0745036
$\dot{x}_3$	0.0263545	0.0263545‘	0.0170506	0.0170506	0.0234117	0.0234117	-0.0268318	-0.0268318
a (km)	42165.2654369	42165.2654369	42165.2522990	42165.2522990	42165.2683831	42165.2683831	42165.2682186	42165.2682185
e	0.0150002	0.0150002	0.0150003	0.0150003	0.0150004	0.0150004	0.0150003	0.0150003
i	0.5000000	0.5000000	0.5000002	0.5000002	0.5000027	0.5000027	0.5000196	0.5000196
Ω	0.0000064	0.0000064	0.0000497	0.0000497	0.0005515	0.0005515	0.0039173	0.0039173
ω	270.0006010	270.0006008	269.9996131	269.9996131	270.0001480	270.0001480	269.9955501	269.9955500
M	99.1530111	99.1530111	139.4479034	139.4479034	59.2549932	59.2549932	270.8599934	270.8599935

Tabla 3. Comparación entre la teoría analítica y la integración numérica. CASO B

Parámetro	Anal.,E=100	Num.,E=100	Anal.,E=500	Num.,E=500	Anal.,E=51000	Num.,E=51000	Anal.,E=36270	Num.,E=36270
t(seg)	11421.3529883	11421.3529879	59763.1511753	59763.1511799	613114.8750115	613114.8749699	4364770.6511448	4364770.6511103
x_1	26146.5532099	26146.5532149	17065.9427893	17065.9428149	22992.8964282	22992.8967564	-26549.9178005	-26549.9155281
x_2	7028.1145968	7028.1145969	22819.6651951	22819.6651997	-10929.3845323	-10929.3844801	2399.1481082	2399.1475382˙
x_3	61.3333599	61.3333598	199.1441347	199.1441348	-95.3855185	-95.3855180	20.9793891	20.9793839
$\dot{x}_1$	-0.6584531	-0.6584531	-2.7598609	-2.7598609	2.0162999	2.0162999	0.0000011	0.0000011
$\dot{x}_2$	3.7493370	3.7493370	2.3251444	2.3251444	3.5064316	3.5064316	-3.8666763	-3.8666766
$\dot{x}_3$	0.0327199	0.0327199	0.0202913	0.0202913	0.0306001	0.0306002	-0.0337473	-0.0337473
a (km)	26658.1036323	26658.1036372	26658.0858557	26658.0858598	26658.1135133	26658.1135044	26658.1114505	26658.1113547
e	0.0900004	0.0900004	0.0900008	0.0900008	0.0900009	0.0900009	0.0900007	0.0900007
i	0.5000000	0.5000000	0.5000007	0.5000007	0.5000068	0.5000068	0.5000497	0.5000497
Ω	0.0000178	0.0000178	0.0001282	0.0001282	0.0014028	0.0014027	0.0099542	0.0099540
ω	270.0002119	270.0002119	269.9997706	269.9997700	269.9989583	269.9989507	269.9898760	269.9898240
M	94.9214896	94.9214896	136.6854910	136.6854917	55.5338460	55.5338534	275.1568472	275.1569000

gración numérica. Se puede así estudiar globalmente la evolución de la forma y orientación de la órbita conforme avanza el tiempo. Se observa la ausencia de cambio secular en el semieje mayor y la excentricidad, lo que sí se observa en la inclinación, en la longitud del nodo ascendente y en el argumento de latititud del perigeo. Esto era de esperarse, pues las ecuaciones de Lagrange promediadas sobre la anomalía media (eliminando los términos de período corto) indican precisamente ese comportamiento (Véase **Meyer** *et al*, 1994, p. 27).

Los valores de J_{22} y K_{22}, en el caso de la tierra, son muy pequeños. Esto permite que la teoría analítica aquí expuesta sea de utilidad aún para períodos extendidos de tiempo, i.e., hasta para varias decenas de revoluciones. **Sharma** (1989) estudió el caso del armónico zonal J_2 y encontró que para el caso terrestre ($J_2 \sim 10^{-3}$) la teoría describe adecuadamente el movimiento de un satélite sólo hasta la primera revolución, $E < 360$; para valores superiores de E la teoría se degrada rápidamente. De ahí que Sharma haya llamadado a su teoría una predicción de corto término. Esto significa que sí se desea combinar todos los armónicos que afectan de forma significativa el movimiento de un satélite alrededor de la tierra (J_2, J_3, J_4, J_5, J_{22}), para predecir lo mejor posible su movimiento, las teorías analíticas serán de utilidad sólo en la primera revolución, pues el armónico J_2, mil veces más grande que cada uno de los restantes, determina el movimiento general del satélite.

Conclusión

La integración analítica de las ecuaciones de los elementos KS, cuando se considera la perturbación por los armónicos sectoriales J_{22} y K_{22} expandida hasta la cuarta potencia en las excentricidades, arroja expresiones que permiten describir con exactitud la evolución de un satélite terrestre aún para muchas revoluciones incluso si éste se mueve en órbitas moderadamente excéntricas. En el caso de aplicarlo al movimiento real de un satélite en órbita terrestre dicha exactitud para períodos extendidos de tiempo no sirve de mucho, ya que el armónico zonal, 1000 veces mayor que los sectoriales, representa un término de perturbación lo suficientemente grande como para que las teorías analíticas ya pierdan su exactitud al cabo de una revolución.

La teoria aquí expuesta puede ser gran utilidad en la descripción detallada del movimiento de un satélite en órbita lunar, incluso para varias revoluciones, ya que en este cuerpo (**Meyer** *et al.*, 1994) $J_2 \sim J_{22} * 10^1 \sim J_3 * 10^1 \sim J_5 * 10^1 \sim 10^{-4}$. En este caso el valor moderado de J_2 con respecto a los armónicos siguientes permitiría elaborar una teoría aplicable para varias revoluciones sin preocuparse por la irrelevancia a largo plazo de los términos que provienen de los armónicos más pequeños.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento al profesor Eduardo Brieva por sus comentarios y útiles sugerencias y a Indira Amanda Medina por la transcripción y revisión en las ecuaciones y las tablas. Este trabajo ha sido financiado por el CINDEC de la Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá, através del proyecto 803116.

Bibliografía

Blitzer, L., Kang, G. & B. McGuire. 1963. The Perturbed Motion of 24-Hour Satellites Due to Equatorial Ellipticity. J. Geophys. Res. **68**: 950-952.

Brouwer, D. 1959. Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag. Astron. J. **64** (1274): 378-397.

Cook, G.E. 1963. Perturbations of Satellite Orbits by Tesseral Harmonics in the Earth's Gravitational Potential. Planet. Space Sci. **11**: 797-815.

Everhart, E. 1985. An Efficient Integrator That Uses Gauss-Radau Spacings. Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Carusi y Valsecchi (edi.): 185-202.

Kosai, Y. 1959. The Motion of Close Earth Satellite. Astron. J. **64** (1274):367-377.

Meyer, K., Buglia, J. & P. Desai. 1994. Lifetimes of Lunar Satellites Orbits. NASA Technical Paper 3394, Marzo 1994.

Morando, M. B. 1963. Orbites de Résonance des Satellites de 24 H. Bull. Astron. **24**: 47-67.

Portilla, J.G. 1994. Términos de Período Corto en el Movimiento de un Satélite Artificial Bajo la Acción de los Armónicos J_5 y J_6 del Potencial Terrestre, Integración Analítica Mediante el Uso de la Transformación KS. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **19** (72):317-335.

Seidelmann, P. K. 1992. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, University Science Books, Mill Valley, California.

Sharma, R.K. 1989. Analytical Approach Using KS Elements to Short-Term Orbits Predictions Including J_2. Cel. Mech. & Dyn. Astron. **46** (4): 321-333.

1993. Analytical Short-Term Orbits Predictions with J_3 and J_4 in Terms of KS Elements. Cel. Mech. & Dyn. Astron. **56** (4): 505-521.

Stiefel, E. & G. Scheifele. 1971. Linear end Regular Celestial Mechanics, Sprenger-Verlag, Berlin.