CONECTIVOS INTUICIONISTAS SOBRE ESPACIOS TOPOLOGICOS*

por

Xavier Caicedo**

Resumen

Caicedo, X.: Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21**(81): 521-534, 1997. ISSN: 0370-3908.

El clasificador de subobjetos de un topos constituye su "objeto de valores de verdad" y sus morfismos determinan los conectivos proposicionales de su lógica interna. Continuando trabajo anterior para modelos de Kripke, estudiamos dichos conectivos para la lógica de los haces sobre espacios topológicos, caso en el cual están totalmente determinados por ciertas operaciones en conjuntos abiertos. Los conectivos monádicos junto con los de Heyting forman una familia "funcionalmente" completa en cualquier topos espacial; en particular, un solo conectivo adicional genera los implícitos en la lógica trivalente de Heyting. Damos una axiomatización completa para la lógica intermedia modal que resulta en este último caso. Analizamos también los conectivos invariantes bajo homeomorfismos locales, y la escogencia global y uniforme de conectivos en distintos espacios. Los resultados principales se pueden generalizar inmediatamente a los topos de haces sobre álgebras de Heyting completas.

Palabras clave: Conectivo proposicional, espacio topológico, haz, topos, lógica intuicionista

Abstract

The subobject classifier of a topos is its "object ot truth values" and its morphisms yield the propositional connectives of its inner logic. Continuing previous work for Kripke models, we study connectives on sheaves over topological spaces. These are determined by certain operations in open sets. Monadic and Heyting connectives form a functionally complete basis in any espacial topos. In particular, a single new connective generates all connectives implicit in Heyting's intuitionistic trivalent logic. We provide a complete axiomatization for the corresponding intermediate modal logic. We consider also connectives invariant under local homeomorphisms, and the global uniform choosings of connectives on distinct topological spaces. The main results generalize readily to sheaves over complete Heyting algebras.

Key words: Propositional connective, sheaf, topological space, topos, intuicionistic logic.

** Dept. de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia
Dept. de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá

* Con el apoyo de COLCIENCIAS, programa Estímulos a Investigadores.

Introducción

Inspirados en las ideas of Lawvere and Tierney sobre la lógica interna de las categorías, **Freyd** (1972) y **Reyes** (1974) mostraron cómo definir en cualquier topos $\mathbb{T}$ análogos de los conectivos proposicionales y los cuantificadores, e interpretar los lenguajes lógicos de primer orden, de manera que a cada fórmula $\varphi(\mathbf{x})$ y "estructura" $\mathfrak{A}$ en $\mathbb{T}$ con universo A $\in \mathrm{Obj}(\mathbb{T})$ corresponde un subobjeto de "verdad o "extensión":

$$\varphi(\mathbf{x})^{\mathfrak{A}} \rightarrowtail A^n;$$

extensiones sobre las cuales actúan naturalmente los conectivos y cuantificadores. Dependiendo del topos, la lógica resultante es intermedia entre la intuicionista y la clásica. En los topos de Grothendieck esta puede expresarse en términos de la llamada *semántica de Kripke-Joyal,* una noción de *forzamiento* en haces de estructuras que generaliza el forzamiento intuicionista en modelos de Kripke. Esta lógica categórica ha sido estudiada intensamente, véase **Makkai-Reyes** (1977), **Goldblatt** (1984), **MacLane-Moerdijk** (1992), **Caicedo** (1995a). Menos estudiado ha sido el hecho de que la lógica de un topos, a diferencia de la lógica clásica, puede admitir conectivos proposicionales (es decir, morfismos del clasificador de subobjetos) no reducibles a combinaciones de los de Heyting: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Aparte de algunas observaciones sobre las leyes generales de los *conectivos geométricos* de Lawvere asociados a topologías de Grothendieck (por ejemplo, **Goldblatt** 1987), los cuales no agotan todas las posibilidades, está por hacerse el estudio general de los conectivos de un topos y las correspondientes extensiones modales de las lógicas intuicionistas intermedias.

En **Sette-Caicedo** (1993) nos adentramos en dicho estudio y observamos que las propiedades expresables en la lógica de primer orden del topos Sh(X) de haces sobre un espacio topológico X, enriquecida con todos los conectivos del topos, son exactamente las preservadas por sistemas de homeomorfismos parciales entre haces de estructuras, generalizando así el teorema de **Fraïssé** (1954) para lógica clásica. Además mostramos que en estos topos los conectivos monádicos, junto con $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$ ($\vee$ posiblemente infinitario), forman un conjunto "funcionalmente completo". En **Caicedo** (1995b) introducimos una noción natural de conectivo intuicionista en modelos de Kripke que resulta ser, cuando se consideran estos últimos como haces, la escogencia uniforme de un conectivo en cada topos de haces sobre un orden parcial.

En estas notas continuamos el estudio de los conectivos intuicionistas en los topos espaciales. Los resultados principales se generalizan inmediatamente a topos sobre álgebras de Heyting completas (*locales en* **Johnstone** 1982). No sabemos si se generalizan a los topos de Grothendieck y, menos aún, a los topos elementales.

Los conectivos de Sh(X) están determinados por las operaciones en abiertos de X que satisfacen cierta sencilla ecuación funcional, lo que permite interpretar la lógica interna del topos enriquecida con los nuevos conectivos como una genuina lógica multivaluada. Damos una nueva demostración de la mencionada completitud funcional en Sh(X) de los conectivos monádicos junto con los de Heyting, y examinamos en detalle los conectivos de los espacios lineales. En particular, los conectivos del topos de haces sobre el espacio de Sierpinski, es decir, los implícitos en la lógica intuicionista trivalente de **Heyting** (1930), se generan añadiendo un solo conectivo monádico. Presentamos una axiomatización completa de la lógica modal intuicionista trivalente que resulta. Examinamos, finalmente, los conectivos preservados por homeomorfismos locales y la escogencia uniforme de conectivos en cada espacio de una categoría dada de espacios topológicos (conectivos globales). Los conectivos en modelos de Kripke son, por ejemplo, los globales de la categoría de órdenes parciales, *qua* espacios topológicos, con inclusiones continuas abiertas.

1. Conectivos clásicos y conectivos en topoi

Los conectivos proposicionales (n-arios) de la lógica clásica suelen identificarse con las funciones de $\{0,1\}^n$ en $\{0,1\}$, llamadas corrientemente *tablas de verdad*, donde se identifica a 1 con el valor "verdadero" y a 0 con "falso". Es bien sabido que todos los conectivos pueden obtenerse por combinación de $\neg$ y cualquiera de los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$:

x	$\neg$ x
0	1
1	0

x	y	x $\wedge$ y	x $\vee$ y	x $\rightarrow$ y
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Podríamos llamar a ésta la concepción Fregeana o "funcional" de conectivo. Por otra parte, las tablas de verdad inducen las llamadas *operaciones booleanas* entre subconjuntos de un conjunto, las cuales permiten interpretar los conectivos como transformaciones de propiedades en propiedades, tomadas extensionalmente, concepción explícita en los lógicos ingleses del siglo pasado (De Morgan, Venn, Boole). Así, la tabla c: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ induce la familia de operaciones

$$\{c^A: P(A)^n \to P(A)\}_{A \in \mathrm{Conj}}$$

$$c^A(S_1,..,S_n) = \{a \in A : c(\chi_{S_1}(a),..,\chi_{S_n}(a)) = 1\},$$

donde χ_S denota la función característica de S en A. En particular, ¬, ∧ y ∨ inducen el *complemento,* la *intersección* y la *unión,* respectivamente:

$$\neg_A(S)=A-S,\ \wedge_A(S,T)=S\cap T,\ \vee_A(S,T)=S\cup T,$$

operaciones que hacen de P(A) una álgebra booleana.

Para toda función f: A → B, la función *imagen recíproca* f^{-1}: P(B) → P(A), donde $f^{-1}(S) = \{x \in A : f(x) \in S\}$, preserva complementos e intersecciones y por tanto toda operación booleana $\{c^A\}_{A \in \mathrm{Conj}}$. Es decir, el diagrama:

$$\begin{array}{cccc} A & P(A)\times\ldots\times P(A) & \xrightarrow{c^A} & P(A) \\ f\downarrow & \uparrow f^{-1}\times..\times f^{-1} & & \uparrow f^{-1} \\ B & P(B)\times\ldots\times P(B) & \xrightarrow[c^A]{} & P(B) \end{array}$$

siempre conmuta. En el lenguaje de las categorías esto significa que las operaciones booleanas son *transformaciones naturales* de P^n en P, donde P: Conj → Conj es el funtor contravariante *Partes,* y $P^n = P\times\ldots\times P$. De hecho, esta propiedad distingue a las operaciones booleanas. Es decir, las tablas de verdad clasifican exactamente las operaciones naturales entre subconjuntos. Esta dualidad entre tablas de verdad y transformaciones naturales de subobjetos es un fenómeno válido en todos los topos.

Para cualquier topos (bien potenciado) $\mathbb{T}$ hay un funtor contravariante Sub: $\mathbb{T}$ → Conj, análogo a P, que asigna a cada objeto A de $\mathbb{T}$ su conjunto Sub(A) de *subobjetos* (clases de equivalencia de monomorfismos que llegan a A), y a cada morfismo f: A→B una función "imagen recíproca" f^{-1}: Sub(B) → Sub(A) obtenida por "pullback" a lo largo de f.

$$\begin{array}{ccc} A & & \mathrm{Sub}(A) \\ f\downarrow & \mapsto & f^{-1}\uparrow \\ B & & \mathrm{Sub}(B). \end{array}$$

Existe además un objeto *clasificador de subobjetos* Ω, con un "elemento" **t**, que juega en $\mathbb{T}$ el mismo papel que {0,1} y 1 juegan en Conj; es decir, para cada objeto A hay una biyección, natural en A,

$$\chi^A: \mathrm{Sub}(A) \approx \mathrm{Morf}(A, \Omega)$$

tal que $\chi^A(s)$: A → Ω es el único morfismo f: A → Ω para el cual $f^{-1}(\mathbf{t}) = s$. En Conj, χ^A envía S ⊆ A a su *función característica* χ_S: A → {0, 1} (cf. **Johnstone** 1977). La anterior biyección induce inmediatamente

$$\mathrm{Sub}^n(A) = [\mathrm{Sub}(A)]^n \approx \mathrm{Morf}(A, \Omega^n),$$

y por el *Lema de Yoneda* (**MacLane** 1971, III, 2) permite calcular las transformaciones naturales de Sub:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}at(\mathrm{Sub}^n,\mathrm{Sub}) &\approx \mathcal{N}at(\mathrm{Morf}(-,\Omega^n), \mathrm{Morf}(-,\Omega^n)) \\ &\approx \mathrm{Morf}(\Omega^n,\Omega). \end{aligned}$$

Es decir los morfismos de Ω clasifican las transformaciones naturales del funtor Sub. En el caso de la categoría de conjuntos esto nos da:

$$\mathcal{N}at(P^n, P) \approx \{0, 1\}^{\{0,1\}^n},$$

y por tanto la mencionada identidad: *operaciones booleanas* n-*arias en subconjuntos* = $\mathcal{N}at(P^n, P)$.

Resulta de la anterior discusión que en un topos arbitrario $\mathbb{T}$, el clasificador Ω puede verse como el objeto de "valores de verdad" de $\mathbb{T}$, y los morfismos c: $\Omega^n \to \Omega$ como (las tablas de) los *conectivos* n-*arios* de $\mathbb{T}$, que clasifican las operaciones naturales entre subobjetos. En particular, los conectivos de **Freyd** (1972),

$$\neg:\Omega\to\Omega \quad \text{y} \quad \wedge, \vee, \to: \Omega^2 \to \Omega$$

inducen las operaciones $\neg_A$, $\wedge_A$, $\vee_A$, $\to_A$, que hacen de Sub(A) una *álgebra de Heyting* para cada objeto A de $\mathbb{T}$ (cf. **Goldblatt** 1984). En general, si c induce las operaciones c^A en Sub(A), entonces la extensión de cualquier fórmula del lenguaje lógico enriquecido con un símbolo **C** para denotar el conectivo puede interpretarse en cada estructura $\mathfrak{A}$ del topos con dominio A por la regla inductiva:

$$[\mathbf{C}(\varphi_1(\mathbf{x}),\ldots,\varphi_n(\mathbf{x}))]^{\mathfrak{A}} = c^A(\varphi_1(\mathbf{x})^{\mathfrak{A}},\ldots,\varphi_n(\mathbf{x})^{\mathfrak{A}}),$$

interpretación que extiende la de Freyd para los conectivos de Heyting. En el caso de topos de haces, la semántica puede expresarse también como una extensión de la de Kripke-Joyal (ver Sección 4).

2. Conectivos sobre espacios topológicos

Dado un espacio topológico X, $\Omega(X)$ denotará su familia de abiertos; S, U, V, W denotarán elementos de $\Omega(X)$ y **S** negrita denotará n-uplas $(S_1,..., S_n)$ de abiertos. En este contexto, $(S_1 \cap V,...,S_n \cap V)$ se escribirá $\mathbf{S} \cap V$.

Es bien sabido que la categoría Sh(X) de *haces sobre* un espacio X, es decir, los funtores contravariantes de $(\Omega(X), \subseteq)$ en Conj que satisfacen la condición de coherencia de Grothendieck (cf. **Tennison** 1975, **Sette-Caicedo** 1993) con las transformaciones naturales por morfismos, constituye un topos. Su clasificador de subobjetos es el haz

$$\Omega(U) = \{S \subseteq U \ : S \text{ abierto en } X\}$$
$$\Omega_{UV}: \Omega(U) \to \Omega(V) \text{ la } \textit{restricción}:$$
$$\Omega_{UV}(S) = S \cap V, \ \text{ para } U \supseteq V,$$

y por lo tanto sus conectivos , que llamaremos en adelante *conectivos sobre* X, son las transformaciones naturales de Ω^n en Ω; es decir, las familias de funciones c_U: $\Omega(U)^n \to \Omega(U)$, $U \in \Omega(X)$, para la cuales el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega(U)^n & \xrightarrow{c_U} & \Omega(U) \\ \downarrow (\,)\cap V & & \downarrow (\,)\cap V \\ \Omega(V)^n & \xrightarrow{c_V} & \Omega(V) \end{array} \qquad (1)$$

conmuta para todo U y $V \subseteq U$.

Un tal conectivo $(c_U)_U$ está totalmente determinado por su acción en secciones globales, es decir, por la función c_X: $\Omega(X)^n \to \Omega(X)$.

LEMA 1. *Los conectivos n-arios de* Sh(X) *están en correspondencia biunívoca con las funciones* c: $\Omega(X)^n \to \Omega(X)$ *que satisfacen para todo* $V \in \Omega(X)$ *y* $\mathbf{S} \in \Omega(X)^n$:

$$c(\mathbf{S} \cap V) \cap V \ = \ c(\mathbf{S}) \cap V. \qquad (2)$$

Al conectivo $(c_U)_U$ *corresponde la función* $c = c_X$, *y recíprocamente a* c *que satisface* (2) *corresponde el conectivo* $(c_U)_U$ *donde* $c_U(\mathbf{S}) = c(\mathbf{S}) \cap U$.

Demostración. Si $c = c_X$ entonces debe cumplirse para todo $\mathbf{S} \in \Omega(U)^n$ y $V \subseteq U$, por (1) aplicado consecutivamente a las inclusiones $V \subseteq X$, $V \subseteq U$ y $U \subseteq X$:

$$c(\mathbf{S} \cap V) \cap V = \ c_V(\mathbf{S} \cap V) = c_U(\mathbf{S}) \cap V = \\ = c(\mathbf{S}) \cap V \cap U = \ c(\mathbf{S}) \cap V.$$

Recíprocamente, si c satisface (2) y definimos $c_U(\mathbf{S}) = c(\mathbf{S}) \cap U$, se tiene $c_V(\mathbf{S} \cap V) = c(\mathbf{S} \cap V) \cap V = c(\mathbf{S}) \cap V = c(\mathbf{S}) \cap U \cap V = c_U(\mathbf{S}) \cap V$, cuando $V \subseteq U$ y $\mathbf{S} \in \Omega(U)^n$. Es decir, $(c_U)_U$ es un conectivo con $c_X = c$. □

En adelante identificaremos los conectivos de **Sh**(X) con las operaciones en $\Omega(X)$ que satisfacen (2). Obsérvese que esta correspondencia preserva composición.

EJEMPLO 1. Conectivos heytinianos. $\Omega(X)$ es una álgebra de Heyting con las operaciones:

$$S \wedge T = \ S \cap T$$
$$S \vee T = \ S \cup T$$
$$S \to T = \ \text{Int } [(X - S) \cup T]$$
$$-S \ = S \to \emptyset = \text{Int}(X - S),$$

las cuales se verifica fácilmente que satisfacen (2). Las llamaremos *conectivos de Heyting,* y llamaremos *heytinianos* a sus combinaciones por composición, con la ayuda de las proyecciones π^i: $\Omega(X)^n \to \Omega(X)$, $\pi^i(S_1,..., S_n) = \ S_i$, que también son conectivos.

EJEMPLO 2. Conectivos booleanos. Si $\Omega(X) = \{X,\emptyset\}$, por ejemplo cuando $X = \{1\}$, cualquier función f: $\{X,\emptyset\}^n \to \{X,\emptyset\}$ cumple (2) y por lo tanto los conectivos de X coinciden con los clásicos. Evidentemente son todos heytinianos.

EJEMPLO 3. Conectivos no heytinianos. Si $\Omega(X) \neq \{X,\emptyset\}$ necesariamente existen conectivos no heytinianos sobre X. Para cada $W \in \Omega(X)$, la función constante $\Box^W$: $\Omega(X) \to \Omega(X)$ de valor W determina un conectivo sobre X, pues la condición (2) vale trivialmente. Podemos asociar también a cada $W \in \ \Omega(X)$ el conectivo monádico no constante d^W definido por

$$d^W(S) = (S \leftrightarrow W).$$

Si $W \neq \emptyset$, X, los conectivos $\Box^W$y d^W no son heytinianos, pues un conectivo hetytiniano debe enviar $\{\emptyset,X\}$ a $\{\emptyset,X\}$, mientras que $\Box^W(X) = d^W(X) = W$.

3. Conectivos como propiedades locales de abiertos

Por la propiedad característica del clasificador Ω, en cualquier topos los conectivos c: $\Omega^n \to \Omega$ están en correspondencia biyectiva con los subobjetos de Ω^n:

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{T}}(\Omega^n,\Omega) \approx \mathrm{Sub}(\Omega^n).$$

En el caso topológico esto significa que los conectivos n-arios sobre X están en correspondencia biunívoca con los subhaces de Ω, o sea con las familias $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(U)\}_{U \in \Omega(X)}$ que cumplen:

i. $\mathcal{C}(U) \subseteq \Omega(U)^n$.
ii. *Si* $S \in \mathcal{C}(U)^n$ *y* $V \subseteq U$ *entonces* $S \cap V \in \mathcal{C}(V)$.
iii. *Si* $U = \cup_i V_i$, *y* $S \cap V_i \in \mathcal{C}(V_i)$ *para todo* i, *entonces* $S \cap U \in \mathcal{C}(U)$.

Así, al conectivo c: $\Omega^n(X) \to \Omega(X)$ corresponde el subhaz

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(U) &= \{S \in \Omega(U)^n:\ c_U(S) = U\}\\ &= \{S \in \Omega(U)^n:\ c(S) \supseteq U\},\end{aligned}$$

Recíprocamente, un subobjeto $\mathcal{C} = (\mathcal{C}(U))_U \leq \Omega^n$ induce el conectivo

$$c(S) = \bigcup\{V \in \Omega(X): (S \cap V) \in \mathcal{C}(V)\ \},$$

y las dos asignaciones son mutuamente inversas.

Los $\mathcal{C}(U)$ son propiedades o relaciones *locales* de abiertos que se pueden verificar en cualquier recubrimiento abierto, digamos en una base. Por ejemplo, la propiedad local $\mathcal{C}(U) = \{\ S \in \Omega(U) : S \text{ denso en } U\}$ corresponde al conectivo heytiniano de la *doble negación:* $\neg\neg S = \mathrm{Int}(\mathrm{cl}(S))$. En muchos casos resulta lo más natural definir un conectivo en esta forma.

EJEMPLO 4. Los subobjetos asociados a los conectivos de Heyting son:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\neg}(U) &= \{\emptyset\} = \{\ S \subseteq U :\ \mathrm{Int}(U - S) = U\ \}.\\ \mathcal{C}^{\wedge}(U) &= \{(U,U)\} = \{(S,T) \in \Omega(U)^2 :\ S \cap T = U\ \}\\ \mathcal{C}^{\vee}(U) &= \{(S,T) \in \Omega(U)^2 :\ S \cup T = U\ \}\\ \mathcal{C}^{\to}(U) &= \{(S,T) \in \Omega(U)^2:\ S \subseteq T\ \}\\ &= \{(S,T) \in \Omega(U)^2 :\ \mathrm{Int}((U - S) \cup T) = U\},\end{aligned}$$

y los subobjetos asociados a los conectivos $\square^W$ y d^W del Ejemplos 3 son, respectivamente:

$$\mathcal{C}^W(U) = \begin{cases} \emptyset \text{ si W no contiene a U}, \\ \Omega(U) \text{ si } W \supseteq U \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}^W(U) = \{W \cap U\}.$$

EJEMPLO 5. El lector puede verificar que las siguientes propiedades locales $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ definen conectivos,

$\mathcal{C}_1(U) = \{S \in \Omega(U) :\ S \text{ es localmente conexo}\}$
$\mathcal{C}_2(U) = \{S \in \Omega(U) :\ S \text{ es localmente homeomorfo a } \mathbb{R}^n\}$
$\mathcal{C}_3(U) = \{S \in \Omega(U) : \mu(S)=\mu(U)\}$, donde μ es una medida en abiertos de X y el espacio X tiene base enumerable.

Obsérvese que aunque la acción de un conectivo $(c_U)_U$: $\Omega^n \to \Omega$ en $\Omega(X)^n$ lo determina completamente, su valor global $\mathcal{C}(X) \subseteq \Omega(X)^n$ como subobjeto no necesariamente lo determina. Por ejemplo, $\mathcal{C}(X)$ puede ser $\emptyset$, independientemente de los valores $\mathcal{C}(U)$ para $U \neq X$. Tal es el caso de los conectivos constantes $\square^W$ del Ejemplo 3 cuando $W \neq X$.

4. Haces, semántica extendida de Kripke-Joyal

Dado un tipo de similitud o vocabulario de primer orden τ (ver **van Dalen** 1983), sea $\mathbb{E}\mathrm{str}_\tau$ la categoría de homomorfismos entre estructuras de tipo τ.

Un *haz de estructura de tipo* τ *sobre* X es un funtor $\mathfrak{A}$: $(\Omega(X), \subseteq) \to \mathbb{E}\mathrm{str}_\tau$ tal que tanto el *funtor universo*

$$|\mathfrak{A}|: (\Omega(X), \subseteq) \to \mathbb{C}\mathrm{onj},\ \ |\mathfrak{A}|(U) = \text{Universo de } \mathfrak{A}(U),$$

como los *funtores de relación*

$$R^{\mathfrak{A}}: (\Omega(X), \subseteq) \to \mathbb{C}\mathrm{onj},\ \ R^{\mathfrak{A}}(U) = R^{\mathfrak{A}(U)},\ R \in \tau,$$

son haces sobre X. Se sigue de la funtorialidad de $\mathfrak{A}$ que las inclusiones $R^{\mathfrak{A}}(U) \rightarrowtail |\mathfrak{A}|^n(U)$ y las funciones

$$f_U = f^{\mathfrak{A}(U)}: |\mathfrak{A}|^{\tau(f)}(U) \to |\mathfrak{A}|(U)$$

son transformaciones naturales para todo símbolo R, $f \in \tau$. Un haz de estructuras sobre X puede describirse también como un espacio fibrado de estructuras, o como cierto tipo de diagrama en la categoría $\mathbb{S}\mathrm{h}(X)$.

Dado un haz de estructuras $\mathfrak{A}$ de tipo τ, la *semántica de Kripke-Joyal* permite interpretar en $\mathfrak{A}$ el lenguaje de primer orden de tipo τ, de forma natural y directa y sin recurrir a construcciones categóricas, cf. **MacLane-Moerdijk** (1992), **Caicedo** (1995a). Solamente recordamos algunos puntos relevantes. Se puede introducir una noción de *forzamiento* por $\mathfrak{A}$ de una sentencia de primer orden φ en cada abierto U de X:

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi \qquad (\mathfrak{A} \textit{ fuerza } \varphi \textit{ en } U)$$

de manera que se cumple:

i. Para fórmulas atómicas: $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}(U) \models \varphi$
ii. Si $U \supseteq V$ y $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi$ entonces $\mathfrak{A} \Vdash_V \varphi$
iii. Si $U = \cup_i V_i$ y $\mathfrak{A} \Vdash_{V_i} \varphi$ para todo i entonces $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi$.

Podemos también definir un *forzamiento puntual* por la regla:

$\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi$ si y solamente si existe una vecindad abierta U de x tal que $\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi$.

Entonces el conjunto

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}_U = \{ x \in U : \mathfrak{A} \Vdash_x \varphi \}$$

resulta abierto, y por (ii) y (iii) se puede recuperar el forzamiento en abiertos:

$\mathfrak{A} \Vdash_U \varphi$ si y solamente si $\mathfrak{A} \Vdash_x \varphi$ para toda $x \in U$.

El forzamiento en haces no satisface las leyes de la lógica clásica. Satisface, sin embargo, las de la lógica intuicionista como se expresan, por ejemplo, en el Cálculo de Heyting (**van Dalen** 1983).

EJEMPLO 6. El funtor $\mathfrak{A}$: $\Omega(X) \to$ Anillos, con valores

$\mathfrak{A}(U) = (\mathcal{C}(U,\mathbf{R}), +, \cdot, 0, 1)$
$\mathfrak{A}(h) = h|V$, para $h \in \mathcal{C}(U,\mathbf{R})$ y $V \subseteq U$,

es un haz de anillos. Si X es conexo, $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbf{R}$ y g es continua con $g^{-1}(0)$ y $g^{-1}(1)$ de interior no vacío, entonces $[\![f=g]\!]_X$ y $[\![\neg(f=g)]\!]_X$ son abiertos no vacíos disyuntos. Por conexidad de X, existe $x \notin [\![f=g]\!]_X \cup [\![\neg(f=g)]\!]_X$ y por tanto

$$\mathfrak{A} \nVdash_x (f=g \vee \neg f=g);$$

es decir, la ley del tercio excluso no se satisface en ningún abierto que contenga a x.

La semántica de Kripke-Joyal puede extenderse al los lenguajes con los nuevos conectivos. Dado un espacio X, para cada conectivo n-ario c: $\Omega(X)^n \to \Omega(X)$ podemos añadir un nuevo símbolo **C** a la sintaxis de primer orden y la regla que permite formar nuevas fórmulas $C(\varphi_1,..,\varphi_n)$. Ello nos da un lenguaje extendido L(**con**) para el cual se tiene la nueva regla inductiva de forzamiento en abiertos de X:

DEFINICIÓN. Dado un haz $\mathfrak{A}$ de estructuras sobre X y sentencias $\varphi_1,..,\varphi_n$ de L(**con**),

$$\mathfrak{A} \Vdash_U C(\varphi_1,..., \varphi_n) \Leftrightarrow c([\![\varphi_1]\!]_U^{\mathfrak{A}},..., [\![\varphi_n]\!]_U^{\mathfrak{A}}) \supseteq U.$$

En términos de lógica multivaluada:

$$[\![C(\varphi_1,...,\varphi_n)]\!]_U^{\mathfrak{A}} = c([\![\varphi_1]\!]_U^{\mathfrak{A}},..., [\![\varphi_n]\!]_U^{\mathfrak{A}}) \cap U.$$

Equivalentemente, si $\mathcal{C}$ es el subobjeto o propiedad local de abiertos clasificada por c podemos definir:

$$\mathfrak{A} \Vdash_U C(\varphi_1,..,\varphi_n) \Leftrightarrow ([\![\varphi_1]\!]_U^{\mathfrak{A}},..., [\![\varphi_n]\!]_U^{\mathfrak{A}}) \in \mathcal{C}(U).$$

EJEMPLO 7. Para los conectivos del ejemplo 3 tenemos

$\mathfrak{A} \Vdash_U \square^W \varphi \Leftrightarrow W \supseteq U.$
$\mathfrak{A} \Vdash_U d^W \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_U = W \cap U,$

y para los del Ejemplo 5,

$\mathfrak{A} \Vdash_U C_1\varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_U$ es localmente conexo
$\mathfrak{A} \Vdash_U C_2\varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_U$ es localmente euclidiano.
$\mathfrak{A} \Vdash_U C_3\varphi \Leftrightarrow \mu([\![\varphi]\!]_U) = \mu(U) \Leftrightarrow \mu(\varphi|U) = 1.$

EJEMPLO 8. Conectivos en modelos de Kripke. Un conjunto parcialmente ordenado $(\Sigma, \leq)$ posee una topología natural Σ^+, generada por abiertos básicos de la forma $[p) = \{ q \in \Sigma : q \geq p \}$, y todo modelo de Kripke $\mathbb{K}$ de tipo τ sobre $(\Sigma, \leq)$ puede verse como un haz de estructuras $\mathbb{K}^*$ sobre (Σ, Σ^+), donde $\mathbb{K}^*([p)) = \mathbb{K}_p$. El valor de $\mathbb{K}^*$ en un abierto cualquiera U se deduce de la propiedad de haz:

$$\mathbb{K}^*(U) = \varprojlim_{p \in U} \mathbb{K}^*([p)).$$

Un conectivo n-ario en modelos de Kripke en el sentido de **Caicedo** (1995b) determina una familia $\mathcal{C}_p \subseteq ([p)^+)^n$, $p \in \Sigma$, que se extiende automáticamente a un conectivo $(\mathcal{C}(U))_{U \in \Sigma^+}$ del topos $Sh(\Sigma, \Sigma^+)$, por la definición:

$$\mathcal{C}(U) = \{ \mathbf{S} \in \Omega(U)^n : \mathbf{S} \cap [p) \in \mathcal{C}_p \text{ para toda } p \in U\}.$$

Puede demostrarse fácilmente que el forzamiento en $\mathbb{K}$, à la Kripke, de cualquier fórmula con conectivos intuicionistas coincide con el forzamiento de la misma fórmula en el haz $\mathbb{K}^*$ para la semántica de Kripke-Joyal. Véase la Sec. 9.

EJEMPLO 9. "Conexidad local" no es heytiniana. Considere de nuevo el conectivo

$$\mathfrak{A} \Vdash_U C\varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_U \text{ es localmente conexo,}$$

y sea X el coproducto (unión disyunta) de un espacio U que no sea localmente conexo y todos los espacios inducidos por órdenes parciales finitos. Entonces la fórmula $C(\varphi\to\varphi)$ es forzada en los abiertos de X inducidos por órdenes parciales, pues estos son siempre localmente conexos, pero no es forzada en U. Ahora bien, si una fórmula proposicional $\theta \in L(\neg, \wedge, \vee, \to)$ es forzada en todos los abiertos de X correspondientes a órdenes finitos, entonces es forzada en todos los modelos de Kripke, debido a la propiedad de modelos finitos del intuicionismo proposicional, y por lo tanto es deducible en el Cálculo de Heyting, gracias al teorema de completitud de **Kripke** (1965). Esto último implica que θ es forzada en todo haz y en particular en el abierto U. Podemos concluir entonces que $C(\varphi\to\varphi)$ no es equivalente a θ en el topos $\mathrm{Sh}(X)$, y por tanto C no es heytiniano sobre el espacio X.

5. Completitud funcional de los conectivos monádicos

Damos una demostración más directa y sencilla que la de **Sette-Caicedo** (1993) de que cualquier espacio topológico X los conectivos monádicos, en combinación con $\wedge$ y $\vee^{\infty}$ (disyunción posiblemente infinitaria), generan todos los conectivos sobre X. En lo que sigue teorema $\Box^W$ y d^W son los conectivos introducidos en el Ejemplo 3.

TEOREMA 1. *Si* $c\colon \Omega^n(X) \to \Omega(X)$ *determina un conectivo sobre* X *entonces* $C(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ *es equivalente en todos los haces sobre X a la fórmula:*

$$\bigvee_{(S_1,\ldots,S_n)\in\Omega(X)^n} \Box^{c(S_1,\ldots,S_n)}\varphi_1 \wedge [\bigwedge_{i=1}^{n} d^{S_i}\varphi_i)]; \quad (3)$$

y si $\mathfrak{C}$ *es la propiedad local asociada a* c, *a la fórmula:*

$$\bigvee_{W\in\Omega(X)} \Box^W\varphi_1 \wedge [\bigvee_{(S_1,\ldots,S_n)\in\mathfrak{C}(W)} \wedge_i d^{S_i}(\varphi_i)].$$

Demostración. Sea $T = ([\![\varphi_1]\!]_U, \ldots, [\![\varphi_n]\!]_U)$. Si $\mathfrak{A} \Vdash_U C(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ entonces

$$\mathfrak{A} \Vdash_U \Box^{c(T)}\varphi_1 \wedge [\bigwedge_{i=1}^{n} d^{T_i}\varphi_i],$$

pues $c(T) \supseteq U$ y $[\![\varphi_i]\!]_U = T_i \cap U$. Como U recubre a U (tome el recubrimiento $V_U = U$, $V_W = \emptyset$ para $W \neq U$) resulta (3). Recíprocamente, si vale (3) entonces existe un recubrimiento $\{V_S\colon S\in\Omega(X)\}$ de U tal que

$$\mathfrak{A} \Vdash_{V_S} \Box^{c(S)}\varphi_1 \wedge [\bigwedge_{i=1}^{n} d^{S_i}\varphi_i].$$

Por tanto, $c(S) \supseteq V_S$ y $T_i \cap V_S = [\![\varphi_i]\!]_{V_S} = S_i \cap V_S$ para cada $S\in\Omega(X)$. Entonces $c(T)\cap V_S = c(T\cap V_S) \cap V_S = c(S)\cap V_S = V_S$, y así $c(T)\cap U = \bigcup_{S\in\Omega} c(T)\cap V_S = U$, o sea $\mathfrak{A} \Vdash_U C(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. Para obtener la segunda fórmula substituya en (3) la equivalencia trivial $\Box^{c(S)}\varphi_1 \equiv \bigvee_{W\subseteq c(S)} \Box^W\varphi_1$, e intercambie disyunciones, lo que da:

$$\bigvee_{W\in\Omega(X)} \bigvee_{S\colon c(S)\supseteq W} \Box^W\varphi_1 \wedge [\wedge_i d^{S_i}(\varphi_i)],$$

fórmula a su vez equivalente a

$$\bigvee_{W\in\Omega(X)} \Box^W\varphi_1 \wedge [\bigvee_{S\in\mathfrak{C}(W)} \wedge_i d^{S_i}(\varphi_i)]. \;\blacksquare$$

COROLARIO 1. *Las siguientes familias son funcionalmente completas para los conectivos de* $\mathrm{Sh}(X)$.

$\{\wedge, \vee^{\infty}, \Box^W, d^W \ (W\in\Omega(X))\}$

$\{\wedge, \to, \neg, \vee^{\infty}, \Box^W \ (W \neq X, \emptyset)\}$

$\{\wedge, \to, \neg, \vee^{\infty}, d^W \ (W \neq X, \emptyset)\}$.

Demostración. d^W y $\Box^W$ son interdefinibles con la ayuda de $\to$, $\wedge$, pues $\Box^W\varphi \equiv d^W(\varphi\to\varphi)$ y $d^W\varphi \equiv (\varphi \to \Box^W\varphi)\wedge(\Box^W\varphi \to \varphi)$. Además, son heytinianos para $W = X, \emptyset$, pues $d^X(\varphi) \equiv \varphi$ y $d^{\emptyset}\varphi \equiv \neg\varphi$. $\blacksquare$

6. Conectivos sobre espacios lineales

Para un espacio topológico proveniente de un orden lineal podemos caracterizar convenientemente las funciones en abiertos que determinan conectivos, y describir conjuntos muy sencillos de generadores monádicos.

TEOREMA 2. *Sea* $(\Sigma, \leq)$ *un conjunto linealmente ordenado, entonces* $f = f_\Sigma\colon \Omega(\Sigma)^n \to \Omega(\Sigma)$ *determina un conectivo* n*-ario sobre* $(\Sigma, \leq)$ *si y solamente si existe* $S\in\Omega(\Sigma)$ *tal que para todo* $X_1,\ldots, X_n \in \Omega(\Sigma)$ *se tiene, en el orden de inclusión:*

i) $f(X_1,\ldots, X_n) = S$, *si* $\min(X_1,\ldots,X_n) > S$.
ii) $f(X_1,\ldots, X_n) \geq \min(X_1,\ldots, X_n)$, *de lo contrario.*
iii) (si $n \geq 2$) *Para cada* $i = 1,\ldots,n$ *y* $A\in\Sigma$ *fijas, la función* $f_{i,A}(X_1,\ldots,X_n) := f(X_1,\ldots, X_{i-1}, X_{i+1},\ldots, X_n)$ *es un conectivo.*

Demostración. La condición (iii) es necesaria pues las constantes son conectivos y éstos son cerrados bajo composición. Veamos que (i) y (ii) son también necesarias. Sean $M = \min(X_1,..., X_n)$ y $S = f(\Sigma,..., \Sigma)$. Si f determina un conectivo, se tiene por el Lema 1:

$$\begin{aligned} f(X_1,...,X_n) \cap M &= f(X_1 \cap M,..., X_n \cap M) \cap M \\ &= f(M,..., M) \cap M \\ &= f(\Sigma \cap M,..., \Sigma \cap M) \cap M \\ &= f(\Sigma,..., \Sigma) \cap M = S \cap M. \end{aligned}$$

Por tanto, $M > S$ implica $f(X_1,..., X_n) \cap M = S$ y por ser lineal el orden, $f(X_1,..., X_n) = S$, es decir se satisface (i). Si $M \leq S$ entonces $f(X_1,..., X_n) \cap M = M$, o sea que se satisface (ii). Recíprocamente, suponga que (i) y (ii) se cumplen para algún S, debemos demostrar que f cumple la ecuación (2) para tal S. Sean $M = \min(X_1,..,X_n)$ y $M' = \min(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) = M \cap X$.

Caso 1. $M > S$, entonces $f(X_1,...X_n) = S$ por (i).

Subcaso 1.1. $X > S$, entonces $M' = M \cap X > S$ por ser lineal el orden; y por (i) se tiene $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) = S = f(X_1,..., X_n)$, luego (3) vale trivialmente.

Subcaso 1.2. $X \leq S$, entonces $M > X$ y por tanto $M' = M \cap X = X \leq S$. Por (ii), $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) \geq M \geq M \cap X = X$, luego $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) \cap X = X = S \cap X = f(X_1,..., X_n) \cap X$.

Caso 2. $M \leq S$, entonces $M' \leq S$ y por (ii): $f(X_1,...,X_n) \geq M$ y $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) \geq M \cap X$.

Subcaso 2.1. $X \leq M$, entonces $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) \cap X = X = f(X_1,..,X_n) \cap X$.

Subcaso 2.2. $X > M$. Sea $M = X_i$, entonces $X_i \cap X = X_i = M$. Como $f_{i,M}$ es un conectivo por (iii), entonces $f(X_1 \cap X,...,X_n \cap X) \cap X = f_{i,M}(X_1 \cap X,..,X_n \cap X) \cap X = f_{i,M}(X_1,...,X_n) \cap X = f(X_1,..., X_n) \cap X$. ■

COROLARIO 2. *Si* $f(X_1,..., X_n) \geq \max(X_1,..., X_n)$ *para todos los argumentos entonces* f *es un conectivo.*

Demostración. La propiedad $f(X_1,..., X_n) \geq \max(X_1,...,X_m)$ se hereda al fijar uno o varios de los argumentos y además implica trivialmente (i) y (ii) del Teorema 2, haciendo $S = 1$. Podemos entonces probar por inducción en $k \geq 1$ que todas las funciones resultantes de fijar n-k argumentos en f determinan conectivos. ■

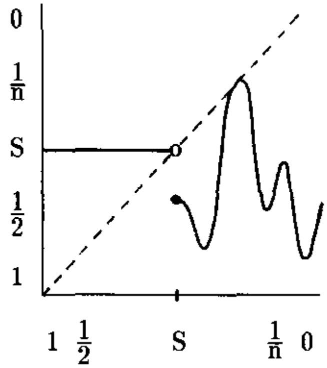
Para el caso monádico tenemos:

COROLARIO 3. f: $\Omega(\Sigma) \to \Omega(\Sigma)$ *determina un conectivo monádico sobre* $(\Sigma, \leq)$ *sí y solamente si existe* $S \in \Omega(\Sigma)$ *tal que:*

$f(X) = S$ *para* $X > S$

$f(X) \geq X$ *para* $X \leq S$.

Gráficamente,



f debe ser constante hasta la diagonal (exclusive) y de ahí en adelante arbitraria, pero permaneciendo en la diagonal o debajo de ella.

EJEMPLO 10. Conectivos de un orden lineal finito. Sea $\Sigma_n = \{1,2,..., n\}$ con el orden corriente, entonces la topología asociada $\Omega(\Sigma_n, \leq)$ está formada por el conjunto vacío y los conjuntos $[j) = \{x \in \Sigma_n : x \geq j\}$, $1 \leq j \leq n$, los cuales forman una álgebra de Heyting lineal de n+1 valores:

$$[1) \supseteq [2) \supseteq ... \supseteq [n) \supseteq \emptyset,$$

que podemos identificar con la sucesión descendente:

$$1 > \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{3} >... > \tfrac{1}{n} > 0 .$$

El Corolario 3 nos permite contar el número de conectivos monádicos, que es en este caso:

$$\sum_{k=0}^{n} (n+1)!/k!.$$

PROPOSICION 1. *Los conectivos sobre* $(\Sigma_n, \leq)$ *son generados por* $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, *junto con los conectivos* N^j, $j = 1, ..., n-1$, *definidos por*

$$\mathfrak{A} \Vdash_k N^j\varphi \Leftrightarrow |[\![\varphi]\!]_{[k)}| \leq j .$$

Demostración. Por el Corolario 1, pues los conectivos $\Box^{[j)}$, $j = 2, ..., n$, son definibles de los N^j:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash_k \Box^{[j)}\varphi &\Leftrightarrow [k) \subseteq [j) \\ &\Leftrightarrow |[k)| \leq |[j)| = n-(j-1) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_k N^{n-j+1}(\varphi \rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Conectivos de $(\omega, \leq)$. $\Omega(\omega, \leq)$ es isomorfo a la sucesión descendente de racionales:

$$1 > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots > 0$$

y la caracterización del Corolario 3 nos muestra que hay 2^{ω} conectivos monádicos sobre $(\omega, \leq)$. Por lo tanto, no podrá haber un conjunto funcionalmente completo enumerable, a no ser que se permitan disyunciones infinitas. En tal caso, por el Corolario 1, es suficiente añadir los conectivos monádicos $d^j = d^{[j)}$, $j \geq 2$, que sobre $(\omega, \leq)$ pueden expresarse por

$$\mathfrak{A} \Vdash_i d^j\varphi \;\Leftrightarrow\; |[i) - [\![\varphi]\!]_{[i)}| = j \dot{-} i \text{ (resta truncada).}$$

7. Los conectivos de la lógica intuicionista trivalente

Consideremos el topos de haces sobre el espacio de Sierpinski $X = (\{1,2\}, \{\{1,2\}, \{2\}, \emptyset\})$. Como $X = (\Sigma_2, \Sigma_2{}^{+})$, donde $\Sigma_2 = (\{1,2\}, \leq)$, se trata de los marcos de Kripke sobre el orden lineal de dos elementos. Sus conectivos están caracterizados por ciertas funciones en $\Omega(X) = \{[1), [2), \emptyset\} = \{1, \frac{1}{2}, 3\}$.

Con respecto a los conectivos corrientes la lógica de este topos no es más que la *lógica intuicionista trivalente* de **Heyting** (1930), que toma valores de verdad en el álgebra $T = (\{1, \frac{1}{2}, 3\}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$, donde:

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

x	$\neg x$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

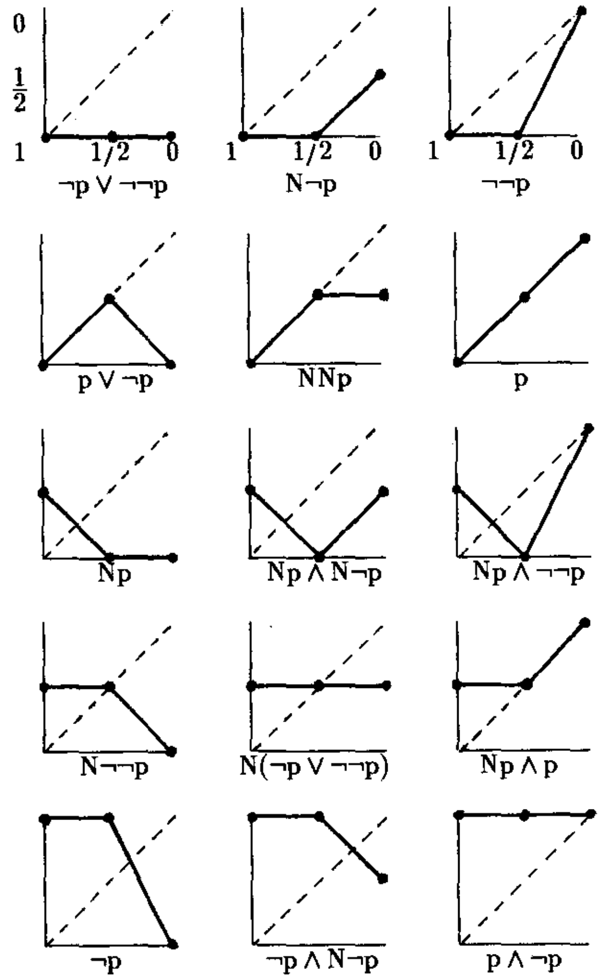
Según la última proposición, un conjunto completo de conectivos para la lógica de este topos es $\{N, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ donde N está definido por la condición

$$\mathfrak{A} \Vdash_i N\varphi \quad \text{sí y solamente si} \quad |[\![\varphi]\!]_{[i)}| \leq 1.$$

Como función en abiertos, $N(x) = \cup\{z \subseteq \Omega(\{1,2\}): |z \cap x| \leq 1\}$, lo que da $N(\{1,2\}) = \{2\}$, $N(\{2\}) = \{1,2\}$ y $N(\emptyset) = \{1,2\}$, es decir,

x	Nx
1	$1/2$
$1/2$	1
0	1

Las siguientes son las funciones de $\Omega(X)$ que determinan conectivos monádicos según el Teorema 2:



Si $f(0) = 1/2$ o $f(1) = 1/2$, el conectivo f no puede ser heytiniano, puesto que en el álgebra de Heyting T la subálgebra $\{1, 0\}$ no es cerrada bajo f. Esto nos deja con 6 conectivos monádicos heytinianos, los cuales corresponden al álgebra de Heyting trivalente libre en un generador, los otros 9 son nuevos.

Obsérvese que la implicación trivalente de **Lukaciewicz** (1930), cf. **Cignoli, D'Ottaviano & Mundici** (1995):

$\rightarrow_L$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

no es un conectivo intuicionista; si lo fuera, la función $f(x) = (x \rightarrow_L 0)$ también lo sería, pero esta función no aparece en la tabla anterior. No satisface el Corolario 3 ya que el valor $f(1) = 0$ no se repite en $f(1/2)$.

Demostraremos ahora que el siguiente es un sistema deductivo completo para las sentencias válidas de la lógica proposicional trivalente enriquecida con N:

Axiomas del Cálculo de Heyting
A_1 $((\varphi \to \theta) \to \psi) \to (((\psi \to \varphi) \to \psi) \to \psi)$
A_2 $(\varphi \to \psi) \to (N\psi \to N\varphi)$
A_3 $N\varphi \to [(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)]$
A_4 $\varphi \vee N\varphi$
A_5 $\neg\neg N\psi$
Reglas: *Modus Ponens.* (4)

A_1 es el axioma dado para la lógica intuicionista trivalente en **Monteiro** (1964). A_3 y A_4 coinciden con los dados en **Caicedo** (1995b) para el mismo conectivo en modelos de Kripke arbitrarios (llamado allí C^1). A_4 y A_5 son característicos de N en lógica trivalente. Para demostrar la completitud del sistema utilizaremos métodos algebraicos.

DEFINICIÓN. Una N-*álgebra (de Heyting)* es una par (H,N), donde H es una álgebra de Heyting trivalente, es decir, satisface la ecuación

$$((\varphi \to \theta) \to \psi) \to (((\psi \to \varphi) \to \psi) \to \psi) = 1,$$

y N es una operación en H que satisface las ecuaciones

$$(\varphi \to \psi) \to (N\psi \to N\varphi) = 1$$
$$N\varphi \to [(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)] = 1$$
$$\varphi \vee N\varphi = 1$$
$$\neg\neg N\psi = 1.$$

El álgebra de Heyting $T = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge, \vee, \to, \neg)$ con las operación N arriba indicada es una N-álgebra. Igualmente, $B = \{0,1\}$, o cualquier álgebra booleana, con la operación constante $Nx = 1$ es una N-álgebra. Es claro además que (B,N) es imagen homomorfa de (T,N) por la identificación de 1 y $\frac{1}{2}$.

LEMA 2. *Las álgebras de Heyting* T *y* B *tienen expansiones únicas* (T,N) *y* (B,N) *a* N-*álgebras.*

Demostración. Por A_4, se tiene en cualquier N-álgebra, $N0 = 0 \vee N0 = 1$, y por A_5 se tiene que $Nx \neq 0$ para toda x (si $Nx = 0$ entonces $\neg\neg Nx = 0$). Además en (T,N), $\frac{1}{2} \vee N\frac{1}{2} = 1$, lo que implica $N\frac{1}{2} \neq 0, \frac{1}{2}$, es decir $N\frac{1}{2} = 1$. Hemos visto que $N1 \neq 0$. Si $N1 = 1$ en (T,N), entonces $\psi \vee \neg\psi = 1 \to ((1 \to \psi) \vee (1 \to \neg\psi)) = 1$ por A_3, lo cual implicaría que T es booleana, una contradicción. Consecuentemente, $N1 = \frac{1}{2}$. Esto muestra la unicidad de N en T. Por otra parte, en una N-álgebra (B,N), $Nx = 1$ para toda x, pues hemos visto que $Nx \neq 0$. □

Se puede demostrar que en toda álgebra booleana la única operación posible de N-álgebra es la constante 1. Recíprocamente, que ésta sea una operación de N-álgebra implica que el álgebra es booleana. Por otra parte, no toda álgebra de Heyting trivalente puede expandirse a una N-álgebra, como es el caso del álgebra trivalente libre en un generador.

LEMA 3. *Un homomorfismo sobreyectivo de una álgebra de Heyting* H *en una álgebra de Heyting* H' *transforma toda operación de* N-*álgebra en* H *en una operación* de N-*álgebra en* H'.

Demostración. Resulta inmediatamente de A_2 que $(x \leftrightarrow y) \leq Nx \leftrightarrow Ny$ en cualquier N-álgebra. Luego, para cualquier homomorfismo de algebras de Heyting, $f(x) = f(y)$ implica $f(Nx \leftrightarrow Ny) \geq f(x \leftrightarrow y) = 1$, y así $f(Nx) = f(Ny)$, puede definirse entonces en H': $Nf(x) = f(Nx)$. □

TEOREMA 3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una fórmula* φ *del lenguaje proposicional* $L(\to, \vee, \wedge, \neg, N)$.

a) φ *es formalmente deducible en el sistema* (4).

b) $K \Vdash \varphi$ *para todo haz* K *sobre el espacio de Sierpinski (equivalentemente, para todo modelo de Kripke sobre* $1 \to 2$).

c) $v(\varphi) = 1$ *para toda valuación* v *de* L *en* $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ *que satisfaga las tablas trivalentes de* (T, N).

Demostración. (a) ⇒ (b). A_1 vale en todas las álgebras trivalentes, es decir $v(A_1) = 1$ para toda valuación en T que satisfaga las tablas arriba indicadas. Como todo modelo de Kripke K sobre $1 \to 2$ da lugar a una valuación v_K que valida las mismas formulas que K fuerza, tenemos que K fuerza A_1. En **Caicedo** (1995b) se demuestra que A_2 y A_3 son válidos en todos los modelos de Kripke. Finalmente, observe que para cualquier modelo de Kripke K sobre $1 \to 2$ se tiene $K \Vdash_2 N\varphi$ para cualquier φ, pues $[\![\varphi]\!]_2 \subseteq \{2\}$, y así $K \Vdash_2 \varphi \vee N\varphi$. Si $K \nVdash_1 \varphi$ entonces $[\![\varphi]\!]_1 \subseteq \{2\}$ y así $K \Vdash_1 N\varphi$, es decir, $K \Vdash_1 \varphi \vee N\varphi$. Esto demuestra la validez de A_4. La validez de A_5 es igualmente sencilla, pues $N\psi$ se fuerza siempre en el nodo 2.

(b) $\Rightarrow$ (c). A toda valuación v de las letras proposicionales con valores en T corresponde un modelo proposicional de Kripke K_v sobre $1 \to 2$ tal que $[\![p]\!] = \emptyset$ si $v(p) = 0$, $[\![p]\!] = \{2\}$ si $v(p) = \frac{1}{2}$, y $[\![p]\!] = \{1,2\}$ si $v(p) = 1$. Por la construcción de las tablas es evidente que $K_v \Vdash_{\{1,2\}} \varphi$ si y solamente si $v(\varphi) = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Dada una N-álgebra (H, N^*) de 2 o más elementos, el álgebra de Heyting H es un producto subdirecto de copias de T y de B. Por el Lema 3, la imagen de N^* en cada factor subdirecto es una operación de N-álgebra y por el Lema 2 debe coincidir con las operaciones N de T y B, respectivamente. Esto implica que como N-álgebra (H,N^*) es un producto subdirecto de copias de (T,N) y (B,N). Ahora, toda ecuación válida en (T,N) lo es en (B,N), ya que ésta última es imagen homomorfa de (T,N), luego lo es en cualquier N-álgebra. Aplicando ésto a la N-álgebra libre en enumerables generadores, es decir al álgebra deductiva de fórmulas $H = L(\to, \vee, \wedge, \neg, N)/\mathfrak{F}$, con generadores $p_1, p_2, \ldots$, donde $\mathfrak{F}$ es el filtro generado por los axiomas, obtenemos que cualquier fórmula válida en (T,N) se deduce de los axiomas. $\square$

8. Conectivos invariantes

Un conectivo c sobre un espacio X se dirá *invariante* si para todo par de abiertos U, W en X y todo homeomomorfismo h: U $\to$ W se tiene

$$c_W \circ h' = h' \circ c_U.$$

Esto significa que la propiedad local de abiertos que lo define es invariante bajo homeomorfismos locales:

$$(S_1,..,S_n) \in \mathfrak{C}_U \Leftrightarrow (h'(S_1),..,h'(S_n)) \in \mathfrak{C}_W,$$

pues $\mathbf{S} \in \mathfrak{C}_U \Leftrightarrow c_U(\mathbf{S}) = U \Leftrightarrow h'(c_U(\mathbf{S})) = h'(U) = W \Leftrightarrow c_W(h'(\mathbf{S})) = W \Leftrightarrow h'(\mathbf{S}) \in \mathfrak{C}_W$. Semánticamente, para cualquier formula construida con conectivos invariantes y cualquier homeomorfismo h: U $\to$ W:

$$A \Vdash_U \varphi[\sigma] \Leftrightarrow A \Vdash_W \varphi[h \circ \sigma].$$

Se verifica fácilmente que los conectivos invariantes son cerrados bajo composición.

EJEMPLO 12. Los conectivos heytinianos son invariantes sobre cualquier espacio X. Los conectivos en modelos de Kripke de **Caicedo** (1995b) son invariantes sobre cualquier orden parcial fijo. Todo conectivo definido por una propiedad local *topológica*, por ejemplo "localmente conexo" (Ejemplo 9) es invariante sobre cualquier espacio.

EJEMPLO 13. Los conectivos de un orden lineal finito son todos invariantes; por ejemplo, los de la lógica trivalente de Heyting. Este no es el caso de los órdenes infinitos; los conectivos constantes $\square^{[j)}$ de $(\omega, \leq)$ no son invariantes, pues dado el homeomorfismo h(x) = x+1 de [0) en [1) y $S \in [0)^+$ se tiene:

$$h'(\square^{[2)}{}_{[0)}(S)) = h'([2)) = [3) \neq [2) = \square^{[2)}{}_{[1)}(h'(S)).$$

Mostramos en seguida que todos los conectivos invariantes *monádicos* de $(\omega, \leq)$ y de $(\mathbb{R}, \leq)$ son generados por un solo conectivo invariante. No sabemos si este genera todos los invariantes n-arios de estos espacios.

DEFINICIÓN. Sea F el conectivo definido en modelos de Kripke por: $\mathfrak{A} \Vdash_p F\varphi \Leftrightarrow \forall q > p$: $\mathfrak{A} \Vdash_q \varphi$.

Sobre $(\omega, \leq)$, $F\varphi$ significa que φ será forzada a más tardar en el siguiente paso:

$$\mathfrak{A} \Vdash_n F\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_{n+1} \varphi;$$

y el iterado F^k= F... F (k veces) significa que *será forzada a más tardar en k pasos*:

$$\mathfrak{A} \Vdash_n F^k\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_{n+k} \varphi.$$

La tabla de verdad de F^k es: $c(1/j) = 1/1+(j-k)$, $c(0) = 0$.

TEOREMA 4. *Los conectivos monádicos invariantes de $(\omega, \leq)$ son infinitos y están generados por los de Heyting ($\vee$ finito) más el conectivo* F.

Demostración. Verificamos primero que los siguientes son todos los subobjetos correspondientes a conectivos monádicos invariantes $(\mathfrak{C}_n)_n = (\mathfrak{C}([n)))_n$ sobre $(\omega, \leq)$:

1. $\mathfrak{C}_n = \emptyset$
2. $\mathfrak{C}_n = \{\emptyset\}$
3. *Para cada* $k \in \omega$, $\mathfrak{C}_n = \{[n), [n+1), \ldots, [n+k)\}$
4. *Para cada* $k \in \omega$, $\mathfrak{C}_n = \{[n), [n+1), \ldots, [n+k), \emptyset\}$
5. $\mathfrak{C}_n = \{[n), [n+1), \ldots\} = [n)^+$
6. $\mathfrak{C}_n = \{[n), [n+1), \ldots, \emptyset\} = [n)^+ \cup \{\emptyset\}$.

Es suficiente calcular $\mathfrak{C}_o$, pues por invarianza

$$[j+n) \in \mathcal{C}_n \Leftrightarrow [j) \in \mathcal{C}_o, \tag{5}$$

ya que $h(x) = x+n$ es un homeomorfismo de $[0)$ en $[n)$, de modo que $\mathcal{C}_o$ determina a $(\mathcal{C}_n)_n$ por traslaciones. Observe además que $[k) \in \mathcal{C}_o$ implica $[k) = [k) \cap [j) \in \mathcal{C}_j$, y por (5), $[k\text{-}j) \in \mathcal{C}_o$ para toda $j \leq k$. Tenemos, pues, según los casos:
Caso 1: no existe j tal que $[j) \in \mathcal{C}_o$. Entonces $\mathcal{C}_o = \emptyset$ o $\mathcal{C}_o = \{\emptyset\}$, y así $\mathcal{C}_n = \emptyset$ para toda n, o $\mathcal{C}_n = \{\emptyset\}$ para toda n.
Caso 2: existe j tal que $[j) \in \mathcal{C}_o$. Entonces

$$\mathcal{C}_o = \{[0), [1), ..., [k)\} \quad \text{o} \quad \mathcal{C}_o = \{[0), [1), ..., [k), \emptyset\}$$

si existe máximo k tal que $[k) \in \mathcal{C}_o$; y de lo contrario $\mathcal{C}_o = \Omega(X)$ o $\mathcal{C}_o = \Omega(X) - \{\emptyset\}$.

Es inmediato que los conectivos arriba enumerados son, cuando se interpretan:

1. false
2. $\neg\varphi$
3. $F^k\varphi$
4. $F^k\varphi \vee \neg\varphi$
5. $\neg\neg\varphi$
6. true. ■

Como hemos dicho, no sabemos si F genera todos los conectivos invariantes sobre $(\omega, \leq)$. Como ilustración, el conectivo invariante binario

$$\mathcal{C} = \{([p), [q)) : \ |[p) - [q)| \leq k \}$$

puede expresarse por $\bigwedge_{i \in \omega}(F^i\varphi \to F^{i+k}\psi)$.

Para el caso de $(\mathbb{R}, \leq)$, consideramos por comodidad los siguiente conectivos adicionales:

$$\mathfrak{A} \Vdash_x M\varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_{[x)} \text{ tiene mínimo}$$
$$\mathfrak{A} \Vdash_x N\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \Vdash_{[x)} \varphi \text{ ó } [\![\varphi]\!]_{[x)} \neq \emptyset \text{ y no tiene mínimo}$$

Sobre $(\omega, \leq)$, estos conectivos son triviales pues $M\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ y $N\varphi \equiv$ false, pero sobre $(\mathbb{R}, \leq)$ no son ni siquiera heytinianos.

LEMA 4. *En modelos de Kripke sobre* $(\mathbb{R}, \leq)$,
$M\varphi \equiv \neg\neg\varphi \wedge (F\varphi \to \varphi)$
$N\varphi \equiv \neg\neg\varphi \wedge (M\varphi \to \varphi)$.

Demostración. Utilice la densidad y completez del orden de $(\mathbb{R}, \leq)$. ■

TEOREMA 5. *Los conectivos monádicos invariantes de* $(\mathbb{R}, \leq)$ *son 14 y están generados por los de Heyting más el conectivo* F.

Demostración. Solamente hay dos tipos de abiertos no vacíos en $(\mathbb{R}, \leq)$: $[x) = [x,\infty) \approx [1,\infty)$ y $(x,\infty) \approx (1,\infty)$. Por tanto, para determinar un conectivo invariante $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}([x)), \mathcal{F}((x,\infty))\}_{x \in \mathbb{R}}$ como subobjeto es suficiente conocer

$$\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}([1)) \ \text{ y } \ \mathcal{F}(1^*) = \mathcal{F}((1,\infty)).$$

Caso 1: existe $[y) \in \mathcal{F}(1)$ con $y>1$. Entonces $[z) \in \mathcal{F}(1)$ para todo $z>1$, pues hay un endo-homeomorfismo de $[1)$ que envía $[y)$ a $[z)$, y por restricción a $(1,\infty)$ se tiene también $[z) \in \mathcal{F}(1^*)$ para todo $z > 1$. Además, $[y) \in \mathcal{F}([y))$ y $(y,\infty) \in \mathcal{F}((y,\infty))$ por restricción y asi $[1) \in \mathcal{F}(1)$, $(1,\infty) \in \mathcal{F}(1^*)$ por homeomorfismo. En suma, tenemos:

$$\mathcal{F}(1) \supseteq \{ [z): z \geq 1 \},$$
$$\mathcal{F}(1^*) \supseteq \{ [z): z > 1 \} \cup \{(1,\infty)\}.$$

Caso 2: existe $(y,\infty) \in \mathcal{F}(1)$ con $y>1$. Entonces se obtiene análogamente que

$$\mathcal{F}(1) \supseteq \{(z,\infty) : z \geq 1\} \cup \{[1)\},$$
$$\mathcal{F}(1^*) \supseteq \{(z,\infty) : z \geq 1\}$$

Combinando la presencia y ausencia de los dos casos anteriores, tenemos los posibles valores de $\mathcal{F}(1)$ y $\mathcal{F}(1^*)$:

- No vale 1 ni 2:
1. $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}(1^*) = \emptyset$
2. $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}(1^*) = \{\emptyset\}$
3. $\mathcal{F}(1) = \{[1)\}$, $\mathcal{F}(1^*) = \{(1,\infty)\}$
4. $\mathcal{F}(1) = \{[1), (1,\infty)\}$, $\mathcal{F}(1^*) = \{(1,\infty)\}$.

- Vale 1 pero no 2:
5. $\mathcal{F}(1) = \{[z) : z \geq 1\}$,
$\mathcal{F}(1^*) = \{[z): z > 1\} \cup \{(1,\infty)\}$
6. $\mathcal{F}(1) = \{(1,\infty), [z) : z \geq 1\}$,
$\mathcal{F}(1^*) = \{[z) : z > 1\} \cup \{(1,\infty)\}$.

- Vale 2 pero no 1
7. $\mathcal{F}(1) = \{[1), (z,\infty): z \geq 1\}$,
$\mathcal{F}(1^*) = \{(z,\infty) : z \geq 1\}$.

-Valen 1 y 2:
8. $\mathcal{F}(1) = \{[z), (z,\infty): z \geq 1\}$,
$\mathcal{F}(1^*) = \{(1,\infty), [z), (z,\infty): z > 1\}$.

Se duplican los casos 3 a 8 añadiendo $\emptyset$ a cada uno, lo que da 14 conectivos, pues $\emptyset \in \mathfrak{F}(1) \Leftrightarrow \emptyset \in \mathfrak{F}(1^*)$. Finalmente, se verifica que los conectivos arriba enumerados corresponden respectivamente a:

1. false,
2. $\neg\varphi$
3. φ
4. $F\varphi$
5. $M\varphi$
6. $F\varphi \vee M\varphi$,
7. $N\varphi$
8. $\neg\neg\varphi$.

Ahora, los conectivos 5, 6 y 7 son expresables con F por el Lema 4, y añadir $\emptyset$ a los conectivos 3 a 8 equivale tomar la disyunción $\Box\varphi \vee \neg\varphi$ para cada uno. ∎

9. Conectivos globales.

Llamaremos *conectivo global (de espacios topológicos)* a toda escogencia de un conectivo c^X: $\Omega(X)^n \to \Omega(X)$ en cada espacio X que sea preservada por inyecciones homeomorfas abiertas. Es decir, cada c^X es invariante y la invarianza se extiende a abiertos homeomorfos que residen en distintos espacios. También podemos ver los conectivos globales como la escogencia de una propiedad topológica de abiertos $\mathfrak{C}$ tal que para cada X, $\mathfrak{C}(X) \subseteq \Omega(X)^n$ cumple la condición de haz sobre $(\Omega(X), \subseteq)$.

Los conectivos heytinianos son globales, lo mismo que todo conectivo definible por una propiedad topológica. Si nos restringimos a los espacios provenientes de órdenes parciales, los conectivos globales coinciden esencialmente con los conectivos intuicionistas en modelos de Kripke de **Caicedo** (1995b). Para ver esto, dado un conectivo C en modelos de Kripke, introduzcamos su *normalización* :

$$C^* = \{(\Sigma, \leq, \mathbf{S}) : \forall p \in \Sigma\ ([p], \leq, \mathbf{S} \cap [p]) \in C\}.$$

Entonces C y C^* son equivalentes para forzamiento en modelos de Kripke, y $C^{**} = C^*$. Además:

PROPOSICION 2. *Los conectivos normalizados en modelos de Kripke coinciden con los conectivos globales en órdenes parciales.*

Demostración. Dado un conectivo normalizado C en modelos de Kripke, la asignación para cada orden parcial $\Sigma = (\Sigma, \leq)$ de:

$$\mathfrak{C}(\Sigma) = \{\mathbf{S} \in \Omega(\Sigma)^n : (\Sigma, \leq, \mathbf{S}) \in C\}.$$

define un conectivo global, pues se cumple:

Si $\mathbf{S} \in \mathfrak{C}(\Sigma)$ y h: $\Sigma' \to V \subseteq \Sigma$ es un homeomorfismo entonces $(\Sigma, \leq, \mathbf{S}) \in C$ y h: $\Sigma' \to V$ es un isomorfismo de orden. Por las propiedades de C, $(V, \leq, \mathbf{S} \cap V) \in C$ y $(\Sigma', \leq, h^{-1}(\mathbf{S})) = (\Sigma', \leq, h^{-1}(\mathbf{S} \cap V)) \in C$; o sea, $h^{-1}(\mathbf{S}) \in \mathfrak{C}(\Sigma')$.

Si $\Sigma = \cup W_i$, $\mathbf{S} \in \Omega(\Sigma)^n$ y $\mathbf{S} \cap W_i \in \mathfrak{C}(W_i)$ para todo i, sea $p \in \Sigma$, entonces $[p] \subseteq W_i$ para algún i, y por tanto $\mathbf{S} \cap [p] = (\mathbf{S} \cap W_i) \cap [p] \in C([p])$. Es decir, $([p], \leq, \mathbf{S} \cap [p]) \in C$. Por normalidad, $(\Sigma, \leq, \mathbf{S}) \in C$.

Recíprocamente, si $\Sigma \mapsto \mathfrak{C}(\Sigma)$ es un conectivo global en órdenes parciales, dado como propiedad topológica,

$$C = \{(\Sigma, \leq, \mathbf{S}) : \mathbf{S} \in \mathfrak{C}(\Sigma)\}$$

es un conectivo normalizado en modelos de Kripke, y las asignaciones descritas son mutuamente inversas. ∎

Se puede verificar que los conectivos heytinianos son preservados por imágenes inversas de funciones continuas abiertas. Este no es el caso de otros conectivos globales como "localmente conexo".

CONJETURA. Los conectivos heytinianos sobre espacios topológicos coinciden con los conectivos globales preservados por funciones continuas abiertas.

Sobre órdenes parciales las funciones continuas abiertas son los *homomorfismos fuertes* de **Caicedo** (1995b); es razonable conjeturar también que los conectivos heytinianos en modelos de Kripke son exactamente los preservados por dichos homomorfismos.

Categorialmente, los conectivos globales son las transformaciones naturales $(c^X)_X$ de $(\Omega|_{\mathbb{T}\mathrm{opia}})^n$ en $\Omega|_{\mathbb{T}\mathrm{opia}}$, donde Ω: $\mathbb{T}$op $\to$ Conj es el funtor contravariante que envía cada espacio topológico a su topología y cada función continua a la función imagen recíproca, y $\mathbb{T}$opia es la subcategoría de $\mathbb{T}$op determinada por las inyecciones homeomorfas abiertas. Estas transformaciones estan en correspondencia con los subfuntores de $\Omega|_{\mathbb{T}\mathrm{opia}}$ que cumplen en cada X la condición de haz.

Generalizando, podemos definir los conectivos globales de cualquier subcategoría $\mathbb{C}$ de $\mathbb{T}$op como las transformaciones naturales $(c^X)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})}$ de $\Omega|_{\mathbb{C}}$ en si mismo, siempre que $\mathbb{C}$ contenga todas las inclusiones de abiertos en sus objetos. Estas últimas se necesitan para que cada función c^X defina en realidad un conectivo. Los conectivos globales de la categoría $(\Omega(X), \subseteq)$ son precisamente los conectivos de Sh(X). Los de la categoría $(\Omega(X), \subseteq)$ enriquecida con todas las inyecciones continuas abiertas entre sus objetos son los conectivos invariantes de Sh(X). Hemos visto que los de la categoría de espacios provenientes de órdenes parciales con inyecciones homeomorfas abiertas son los conectivos en modelos de Kripke.

De ser cierta la conjetura arriba propuesta, los conectivos globales de la categoría de funciones abiertas continuas serían exactamente los heytinianos. Obsérvese que no toda función continua preserva la negación o la implicación de Heyting. Como el espacio de Sierpinski $\mathbb{S}$ representa al funtor Ω en $\mathbb{T}$op (con todas las funciones continuas), se tiene por el Lema de Yoneda que los conectivos globales de $\mathbb{T}$op están en correspondencia con las funciones continuas de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{S}$. No es difícil mostrar que éstos son los generados por $\wedge$, $\vee$, **true** y **false**. Es decir, la lógica global de $\mathbb{T}$op es la de los reticulados distributivos con máximo y mínimo.

Reconocimientos. La demostración del Teorema 3 nos fue inspirada por las sugerencias del Prof. Roberto Cignoli (U. de Buenos Aires) respecto a utilizar métodos algebraicos en el estudio de los conectivos. También se ha beneficiado este trabajo de las observaciones y correcciones del Prof. Francisco Miraglia (U. de São Paulo).

Bibliografía

Caicedo, X. 1995a: Lógica de los haces de estructuras. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21 (74)**: 569-585.

Caicedo, X. 1995b: Investigaciones sobre los conectivos intuicionistas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21 (75)**: 705-716.

Cigonoli, R., D'Ottaviano, I. & D. Mundici 1995: Álgebras das lógicas de Lukasiewicz. CLE, Unicamp, Brasil.

Fraissé, R. 1954: Sur quelques classifications des systemes de relations. Université d'Alger, Publications Scientifiques, Série A, 1, 35-182.

Freyd, P. 1972: Aspects of Topoi. Bull. Austral. Math. Soc. **7**: 1-76.

Freyd, P. & A. Scedrov 1990: Categories, Allegories. North Holland, Amsterdam.

Godement, R. 1958: Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux. Hermann, Paris.

Goldblatt, R. 1984: Topoi, the Categorical Analysis of Logic. North Holland, Amsterdam.

Goldblatt, R. 1987: Grothendieck topologies as geometric modalities. Zeitschr. f. math. Logik und Grundl. d. Math., d. **27**: 495-529.

Heyting, A. 1930: Die formalen Regen der intuitionistchen Logik. Sitzungsbericthe de Preussischen Akademie de Wissenschaften, Physikalisch-mathmeatische Klasse, 42-56.

Johnstone, P. T. 1977: Topos Theory. Academic Press, New York.

Johnstone, P. T. 1982: Stone Spaces. Cambridge University Press.

Kripke, S. 1965: Semantical Analyisis of Intuitionistic logic I. Formal systems and recursive functions, (Crossley and Dummett, eds.). North Holland, Amsterdam.

Lukasiewicz , J. 1920: O logique Trójwarkościowej. Ruch Filozoficzny **6**: 170-171.

Makkai, M. & G. E. Reyes 1977: First order categorical Logic. Lecture Notes in Math. 611, Springer Verlag.

MacLane, S. 1971: Categories for the Working Mathematician. Springer Verlag.

MacLane, S. & I. Moerdijk 1992: Sheaves in Geometry and Logic, Springer Verlag.

Monteiro, L. 1964: Sur les Algèbres de Heyting trivalentes. Notas de Lógica Matemática No. **19**, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina.

Monteiro, L. 1970: Les algebres de Heyting et the Lukasievicz trivalentes. Notre Dame Journal of Formal Logic, **XI, 4**: 453-466.

Reyes, G. E. 1974: From sheaves to logic. MAA Studies in Algebraic Logic.

Sette, A. M. & X. Caicedo 1993: Equivalencia elementar entre feixes. Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic, Notas de Lógica Matemática, **38**: 129-141.

Stone, M. H. 1937. Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics. Cas. Mat. Phys. **67**: 1-25

Tennison, B. R. 1975: Sheaf Theory. London Math. Soc. Lect. Notes **20**. Cambridge University Press.

van Dalen, D. 1983: Logic and Structure. Springer Verlag.