

¿ATRACTORES EXTRAÑOS (CAOS) EN LA HIDRO-CLIMATOLOGÍA DE COLOMBIA?

Por

Germán Poveda Jaramillo*

Resumen

Poveda, G.: ¿Atractores extraños (CAOS) en la hidro-climatología de Colombia?. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21**(81): 431-444, 1997. ISSN: 0370-3908.

La hidrología de Colombia está fuertemente afectada por ambas fases del ENSO, un fenómeno que exhibe rasgos de caos determinístico de baja dimensionalidad. Se examina el posible comportamiento caótico de la hidro-climatología de Colombia. Para ello, se presentan algunas ideas de la cuantificación de caos usando series temporales y se aplican a series hidrológicas extensas de Colombia, consistentes en registros de precipitación mensual de Bogotá entre 1866 y 1992 y de Medellín entre 1908 y 1995, así como a la serie de caudales medios mensuales del río Magdalena en Puerto Berrío. Se estiman el Espectro de Potencias, la dimensión de Hausdorff-Besikovich (fractal), la dimensión de escalamiento entre distancias en los atractores, y el mayor exponente de Lyapunov de las series temporales. Se estudia la dinámica que controla el comportamiento de la precipitación y los caudales, con el ánimo de investigar la existencia de componentes determinísticas de baja dimensionalidad, y el posible comportamiento caótico. Se discuten algunas ideas acerca de la predicción hidrológica en el contexto de sistemas dinámicos no lineales en régimen de caos.

Palabras claves: Hidrología, ENSO, Teoría del Caos, Colombia.

Abstract

Interannual hydro-climatology of Colombia is strongly influenced by extreme phases of ENSO, a phenomenon exhibiting many features of chaotic non-linear system. The possible chaotic nature of Colombian hydrology is examined by using time series of monthly precipitation at Bogotá (1866-1992) and Medellín (1908-1995), and average streamflows of the Magdalena river at Puerto Berrío. The power spectrum, the Hausdorff-Besikovich (fractal) dimension, the correlation dimension, and the largest Lyapunov exponent are estimated for the time series. Ideas of hydrologic forecasting and predictability are discussed in the context of nonlinear dynamical systems exhibiting chaotic behavior.

Key words: Hydrology, ENSO, Chaos theory, Colombia.

1. Introducción

1.1 PREDECIBILIDAD DEL CLIMA. Como lo sabemos de la experiencia cotidiana, el pronóstico del clima está muy lejos de ser perfecto. Se predice que habrá lluvias aisladas en una región sin indicar la hora ni el lugar y menos se habla de su intensidad. De otra parte, es posible predecir con total exactitud que el sol saldrá mañana a las 5:58 a.m. La diferencia entre los dos tipos de predicciones es evidente. La razón para tal divergencia radica en la escala espacial y temporal de los fenómenos involucrados. La variabilidad astronómica es importante en escalas de tiempo geológicas, pero a escala humana es insignificante y despreciable. De allí el carácter perfecto de las predicciones astronómicas. El clima que nos rodea es producto de la interacción no lineal de múltiples procesos geofísicos que ocurren simultáneamente en diversas escalas del espacio y del tiempo. Tal carácter de no linealidad es el responsable de la poca predecibilidad del clima, particularmente en el mediano y en el largo plazo.

El trabajo ya clásico de *Lorenz* (1969) constituye la primera evidencia de caos en la dinámica del clima. Su modelo consiste en tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para describir de una manera muy sencilla el fenómeno de la convección atmosférica ocasionado por el calentamiento de la atmósfera desde la superficie del terreno. En tal modelo, *Lorenz* encuentra la primera manifestación de que la atmósfera es un sistema inestable, altamente sensible a las condiciones iniciales, caótico, cuya trayectoria puede estar contenida en un "atractor extraño". Por ello se ha recurrido a la metáfora del "aleteo de la mariposa" en la selva del Amazonas que es capaz de desatar un tornado en Japón a la semana siguiente.

La predicción del tiempo en el largo plazo con total precisión es una tarea imposible, pues se necesitaría una precisión ilimitada en el conocimiento de las condiciones iniciales de las variables y además requeriríamos una precisión infinita del modelo y de su integración numérica en computador. Ambos requerimientos son absurdos. Hay pues, límites en la predecibilidad que dependen de los tipos de procesos bajo estudio (en particular de sus escalas), del carácter y magnitud de los errores iniciales y de la exactitud del método de predicción. De otra parte, la predicción climatológica de largo plazo es posible porque la existencia de atractores extraños demuestra que sólo ocurrirán ciertas clases de movimiento turbulento. La herramienta de predicción de largo plazo se basa en el cálculo y la extrapolación de cantidades físicas que se promedian sobre todo el atractor.

El tema de la existencia de atractores de baja dimensionalidad en el clima es aún tema de debate en la literatura (*Lorenz*, 1991). La teoría de caos ha aportado nuevas luces en torno al problema de la turbulencia (rutas a la turbulencia desarrollada, bifurcaciones doblando el período, intermitencia, cuasi-periodicidad, multifractalidad, etc.). El clima es resultado de la turbulencia en muchas escalas espacio-temporales. *Nicolis y Nicolis* (1987) encuentran un atractor de baja dimensionalidad para los ciclos de glaciación/deglaciación durante el último millón de años. *Nicolis y Nicolis* (1984) encuentra una familia de atractores caóticos para el modelo de evolución climática que considera el sistema océano-criósfera-atmósfera modulado por forzamientos astronómicos en el rango 10^3 - 10^5 años. En otras escalas espacio-temporales, *Romanelli et al.* (1988) encuentran atractores de baja dimensión (3-4) para las series de tiempo de (i) valores horarios de la frecuencia crítica ionosférica, (ii) valores diarios del flujo de radiación solar, y (iii) valores horarios del índice geomagnético auroral. *Essex y Nerember* (1987) analizan series de la altura geopotencial diaria de los 500 mb y encuentran un atractor de baja dimensión. *Grassberger* (1986) encuentra un atractor de alta dimensión (alrededor de 10) en registros de anillos de árboles para los últimos 7100 años. *Rodríguez-Iturbe et al.* (1989) encuentran rasgos de caos en registros de lluvia horaria en el área de Boston. *Tsonis y Elsner* (1989) identifican un atractor de baja dimensionalidad en registros de velocidad del viento. *Poveda y Puente* (1993) también encuentran evidencia de caos en registros de velocidad de viento y temperatura para la capa límite atmosférica de un bosque Canadiense, identificando variabilidad en la dimensión de los atractores con la altura.

1.2 EL NIÑO-OSCILACION DEL SUR: UN FENOMENO CAÓTICO? El fenómeno El Niño-Oscilación del Sur (ENSO) se da como resultado de la interacción entre el océano y la atmósfera en la región del Océano Pacífico ecuatorial. Se trata del conjunto más poderoso de variaciones atmosféricas y oceánicas en escalas de tiempo de meses a varios años a nivel global (*Glantz et al.*, 1991; *Philander*, 1990; *Diaz y Markgraf*, 1993). Como se dijo, el ENSO tiene su origen en la interacción no lineal entre el océano y la atmósfera sobre el Océano Pacífico tropical. Además, hay hipótesis que vinculan al ENSO y a los monzones de la India como sistemas mutuamente interactivos (*Webster y Yang*, 1994). Además, *Barnett* (1991) demuestra que el ENSO se debe parcialmente a la interacción no lineal entre dos frecuencias: una cuasi-bienal y otra de baja frecuencia entre 3y 7 años. Uno de los rasgos más destacables del ENSO es su manifestación aperiódica pero recurrente entre 2 y 7 años, un rasgo que

se presenta en sistemas dinámicos no lineales. En tanto que los métodos que se usan para predecir algunos de los rasgos característicos del ENSO han tenido algún éxito, con anticipación de 3 a 9 meses, todavía quedan muchas preguntas abiertas. Entre ellas, entender cómo interactúa el (cuasi) ciclo del ENSO (entre 45 y 60 meses) con el ciclo anual y con otros fenómenos cíclicos que afectan el clima de los trópicos tales como la Oscilación Cuasi-Bienal, la Oscilación del Atlántico Norte, las oscilaciones de 30-60 días, las ondas del este, y aún el ciclo diurno.

Hay evidencias serias de la posible naturaleza caótica del ENSO. *Vallis* (1986) construye un modelo determinístico tridimensional de ecuaciones diferenciales, análogo al sistema de Lorenz, para describir la dinámica del ENSO. El modelo reproduce algunos de los aspectos cualitativos del fenómeno. *Hense* (1987) encuentra evidencia de la existencia de un atractor extraño usando la serie de tiempo del Índice de Oscilación del Sur (el índice tradicional que se utiliza para describir el ENSO), con una dimensión fractal en el interarvalo 2,5 a 6, lo que sugiere que hay entre 5 y 15 grados de libertad que dominan en el sistema. *Fraedrich* (1986) ha desarrollado un modelo cuadrático (análogo a la ecuación logística, muy popular en teoría de caos) para representar las intensidades del fenómeno de El Niño. La naturaleza aperiódica recurrente del ENSO es un rasgo común en sistemas caóticos, así como el hecho que cada evento del ENSO es diferente de los demás, aunque haya patrones comunes. Los mecanismos físicos de la inestabilidad convectiva encontrados en el ENSO son (auto)-similares a aquellos que ocurren en escalas menores, tal como la oscilación intra-estacional de 30-60 días, y otros tipos de organizaciones de celdas convectivas. *Enfield* (1989) postula que si el ENSO no es un sistema caótico, sería más la excepción que la regla. De acuerdo con *Münnich et al.* (1991), la variabilidad de largo plazo del ENSO es intrínsecamente caótica (independiente de la naturaleza caótica del clima mismo). Recientemente, dos estudios independientes han propuesto que la falta de regularidad exacta del ENSO pueden ser representadas por procesos caóticos de baja dimensionalidad que son forzados por el ciclo anual (*Jin et al.*, 1994; *Tziperman et al.*, 1994). Usando un modelo océano-atmósfera acoplado forzado por la variación en el ciclo anual, *Chang et al.* (1995) encuentran que el ENSO puede presentar caos vía bifurcaciones de doblado del período cuando el ciclo anual se intensifica. La naturaleza caótica del fenómeno ENSO no ha sido claramente definida, aunque hay serias evidencias a favor.

En general, existe buena coherencia entre las anomalías hidrológicas en la parte tropical de América del Sur

(Colombia, Venezuela, Guyana y la cuenca del Amazonas) y las dos fases del ENSO. Con ciertas diferencias en el tiempo y en la amplitud, estas regiones exhiben anomalías negativas en lluvias y caudales durante El Niño, y lo contrario durante La Niña. Hay ya muchas evidencias consistentes de la fuerte influencia del ENSO sobre la hidro-climatología de Colombia (*Poveda y Mesa, 1993; Poveda, 1994; Poveda y Mesa, 1995; Poveda & Mesa, 1996, Poveda & Mesa, 1997*). Entonces es dado preguntar si la hidro-climatología de Colombia presenta señales de caos determinístico de baja dimensionalidad, como resultado de su fuerte dependencia con respecto del ENSO en la escala interanual, y/o como resultado de la interacción de los múltiples procesos geofísicos que modulan su clima a diferentes escalas. En este trabajo se presentan algunas ideas sobre la cuantificación de caos y su aplicabilidad al caso de varias series temporales de la hidrología de Colombia, tratando de identificar los tipos de atractores que subyacen en su evolución.

2. Algunas generalidades de teoría de caos

Desde los trabajos de Henry Poincaré sobre el problema de tres cuerpos en astronomía se sabe que hay sistemas de ecuaciones no lineales que presentan soluciones inestables. Los desarrollos recientes de la llamada Teoría del Caos han identificado «atractores extraños» en el comportamiento de muchos de tales sistemas en meteorología, dinámica de fluidos, biología, ecología, química, economía, fisiología, astrofísica, etc. Un atractor extraño (*Ruelle y Takens, 1971*) de un sistema determinístico de ecuaciones diferenciales no lineales se caracteriza por ser una cuenca de atracción de las trayectorias soluciones en el espacio de fases que exhibe una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. Obviamente, esta sensibilidad a las condiciones iniciales influye de manera notable en el análisis de la dinámica del fenómeno, ya que exige mucha precisión en las condiciones iniciales, lo cual en términos prácticos impone fuertes restricciones a la predecibilidad de largo plazo. Este hecho se refleja en un rápido decaimiento en la función de autocorrelación y la existencia de un espectro de Fourier de banda ancha. Un atractor extraño tiene la propiedad de ser un objeto fractal, ya que su dimensión de Hausdorff-Besikovitch es mayor que su dimensión topológica (*Mandelbrot, 1982*).

3. Herramientas para identificar caos en una serie temporal

3.1 EXPONENTE DE LYAPUNOV. El exponente de Lyapunov proporciona una medida de la tasa promedia

de divergencia de las trayectorias en el espacio de fases. Trayectorias caóticas presentan al menos un exponente de Lyapunov positivo. Para trayectorias periódicas, todos los exponentes de Lyapunov son negativos. En general existen tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas. Mediante el conjunto de los exponentes de Lyapunov es posible estimar la tasa a la cual convergen o divergen las trayectorias dentro de un atractor. Cualquier sistema que contenga por lo menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico (Wolf et al., 1985). Existe todo un espectro de exponentes de Lyapunov definido en términos de la forma en que se deforma el atractor (una esfera inicial de eje $p_i(0)$) a medida que evoluciona en el tiempo. Así, el i -ésimo exponente de Lyapunov, λ_i , se define en términos de la tasa de crecimiento del i -ésimo eje, p_i , como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

en donde los λ_i están ordenados de mayor a menor. Los exponentes de Lyapunov pueden utilizarse para caracterizar el tipo de atractor. Si todos los λ_i son negativos, el atractor es un punto. Si $\lambda_1=0$, y los demás son negativos, el atractor es un ciclo límite estable. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y los demás son negativos, el atractor es un toro bi-dimensional en el espacio de fases. Si al menos un exponente de Lyapunov es positivo, el atractor es extraño, indicando una divergencia exponencial de las trayectorias en el atractor, lo cual genera una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales.

3.2 CONJUNTO DE DIMENSIONES. Como ya se mencionó, un sistema caótico presenta una divergencia exponencial de las trayectorias en el espacio de fases, aunque ellas se encuentran restringidas en una región acotada del mismo espacio. Las trayectorias sufren un proceso de «estirado y doblado» en el atractor, lo que ocasiona la rápida separación de una trayectoria con respecto a las temporalmente vecinas.

3.2.1 Dimensión de Hausdorff. La dimensión fractal, también llamada de Hausdorff-Besikovitch, de un atractor extraño, puede estimarse como:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (1/\epsilon)}$$

La ecuación (2) significa que el número N de cuadros de lado ϵ que se requieren para cubrir un objeto (en este caso bi-dimensional), es inversamente proporcional a ϵ . Observe que el valor de D para un punto, una línea y un

plano es 0, 1 y 2, respectivamente. En general, un fractal es un objeto (conjunto) que tiene un valor de D no entero (fraccionario).

3.2.2. Conjunto Generalizado de Dimensiones. Para la descripción de un atractor extraño se ha definido un conjunto infinito de dimensiones D_q , que incluye la dimensión fractal. Tal conjunto de dimensiones caracteriza completamente el objeto y se determina con (Hentschel y Procaccia, 1983):

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\sum_{i=1}^m p_i^q \right]}{\ln \epsilon}$$

donde p_i es la probabilidad que un punto en la trayectoria esté dentro del i -ésimo cajón de un atractor cubierto con m cajones de tamaño ϵ .

Puede demostrarse que, en el límite cuando q tiende a cero, la ecuación (3) es la misma ecuación (2), correspondiente a la dimensión fractal. Y la dimensión de información D_1 , se define como:

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i$$

La dimensión de correlación, D_2 , se define como (Grassberger y Procaccia, 1983):

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^m p_i^2}{\ln \epsilon}$$

la cual también puede definirse como:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

en donde $C(r)$ es la función de correlación entre pares de puntos, definida como:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \Theta(r - |x_i - x_j|)$$

y Θ es la función de paso unitario de Heaviside. Realmente, $C(r)$ cuenta cuantos pares de puntos (x_i, x_j) hay en el atractor, tales que su distancia $\|x_i - x_j\|$ es menor que r . Es posible demostrar que para el conjunto generalizado de dimensiones D_q se cumple la condición $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_n$ (Hentschel y Procaccia, 1983). Según la definición de las ecuaciones, y desde el punto de vista práctico es mucho más sencillo calcular la dimensión de correlación D_2 que la dimensión fractal D_ϕ aunque las dos están fuertemente ligadas, y por ello se utiliza ésta última para caracterizar las propiedades métricas y geométricas del atractor extraño.

3.3 Reconstrucción del atractor a partir de series temporales

Para la reconstrucción de la trayectoria de la solución de un sistema de ecuaciones no lineales es necesario obtener su solución por métodos analíticos o numéricos. Generalmente el conjunto de ecuaciones no es conocido a priori pero se dispone de una serie temporal de alguna de las variables involucradas en el fenómeno físico, social, biológico, químico, etc.

Un teorema muy importante demostrado por Takens (1981) permite reconstruir «artificialmente» la dinámica de las trayectorias en el espacio de fases. Teniendo una serie temporal $x(t)$, de una de las variables presentes en el fenómeno, se usa el método de los rezagos en el tiempo, basados en el hecho que la interacción entre las variables es tal que cada componente contiene información sobre la dinámica acoplada y compleja del sistema. El procedimiento consiste en crear los vectores d -dimensionales en el espacio de fases como:

$$y(t) = [X(t), X(t + \tau), X(t + 2\tau), \dots, X(t + (D - 1)\tau)]$$

El conjunto de $y(t)$'s captura la evolución del sistema no lineal en tanto que la trayectoria se mueve en un espacio d -dimensional. Obviamente, el atractor así reconstruido no es exactamente el original pero toda la información topológica es preservada. Esta posibilidad refleja el hecho de que, aunque con una serie temporal se está midiendo solamente uno de los grados de libertad del sistema, su evolución está íntimamente afectada por los demás grados de libertad de un sistema acoplado de ecuaciones, y por lo tanto contiene información sobre la evolución de los demás grados de libertad.

Este procedimiento encara dos dificultades. El primero es establecer el valor de τ para la reconstrucción por medio de rezagos de la misma serie, y el segundo es el problema de determinar el orden del espacio dimensional en el cual debe ser embebido el atractor, dado que la dinámica del sistema es desconocida a priori. Acerca de estos dos aspectos véanse los trabajos de Albano *et al.* (1989), Sauer y Yorke (1993), y Porporato y Ridolfi (1997).

3.4 Función de escalamiento entre distancias, $C(r)$.

La dimensión D_2 representa el escalamiento de las distancias entre los puntos discretos del atractor. Tal dimensión ayuda a caracterizar las propiedades del atractor. Según la ecuación (6), D_2 puede ser estimada como la pendiente del diagrama $C(r)$ vs. r en el espacio logarítmico. La relación $C(r)$ vs. r debe establecerse para valores diferentes (crecientes) de la dimensión en que se sumerge el atractor.

Distinguir señales estocásticas de señales caóticas no es una tarea fácil. En el pasado, la convergencia del estimador de la dimensión D_2 se tomó como una indicación de la naturaleza caótica del conjunto de datos (Grassberger y Procaccia, 1983). La demostración de que ciertos ruidos colorados con espectro de decaimiento potencial (procesos no estacionarios) también pueden dar lugar a una dimensión finita (Osborne y Provenzale, 1989), ha reducido la efectividad de esta prueba tradicional para cuantificar caos. Sin embargo, Cutler (1995) ha puesto rigor a la definición de D_2 , que sigue siendo válida para procesos estacionarios. La información que se desprende de la estimación de la dimensión de correlación D_2 es importante porque no sólo es más útil que la dimensión fractal como medida de representación de las propiedades métricas del atractor extraño, sino que permite definir la dimensión del espacio en el que evoluciona el atractor, y por tanto el número de grados de libertad necesarios para describir el fenómeno.

4. Datos utilizados y resultados

Para el examen de la posible presencia de caos determinístico de baja dimensionalidad, se usaron tres series hidrológicas extensas de Colombia, las cuales se presentan en la Figura 1, así: (1) la serie de precipitación mensual de Bogotá en el Observatorio Nacional, para el período 1866-1992; (2) la serie de precipitación mensual en Medellín para el período 1908-1990 y la serie de caudales medios mensuales del río Magdalena en Puerto Berrío (Antioquia), para el período 1936-1992. Para examinar las frecuencias significativas presentes en las se-

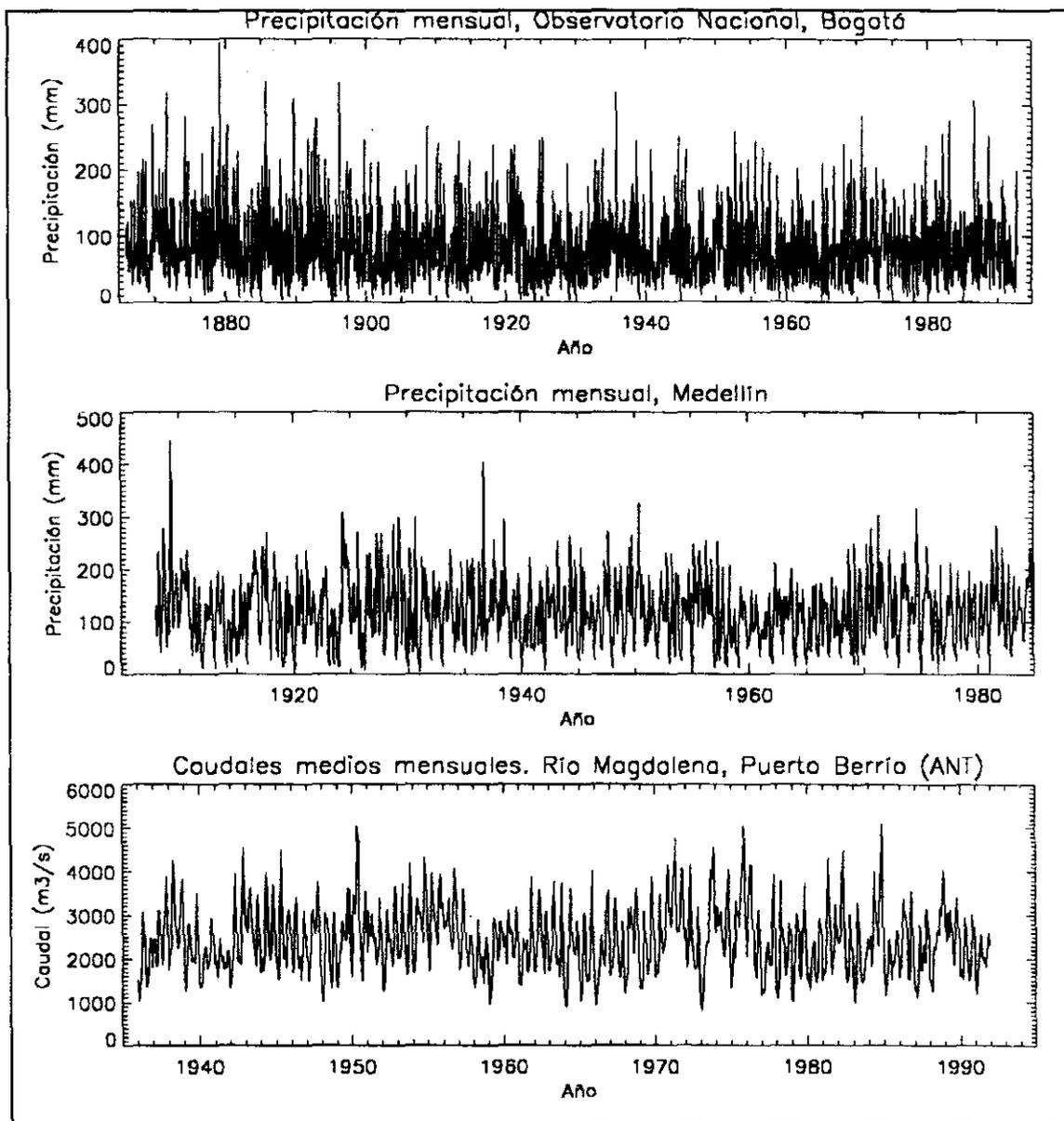


Figura 1

ries se estimó el espectro de potencias, después de estandarizar los registros mediante el escalamiento con respecto de la media y la división por la desviación estándar mensuales. Este procedimiento se utilizó para remover el efecto del ciclo anual, primordial en las series hidrológicas de Colombia, ya que se quiere examinar el efecto de la variabilidad a escala interanual. Para la estimación del Espectro de Potencias se usó el método de Máxima Entropía (*Press et al.*, 1986, p.430). Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 2, con el eje de

las abscisas variando entre 0 y 0.5 (frecuencia de Nyquist), los cuales indican la existencia de las siguientes periodicidades:

- Precipitación en Observatorio Nacional: 66 meses (5,5 años), la banda de frecuencia asociada al fenómeno ENSO; 25 meses (la banda de frecuencias asociada a la Oscilación Cuasi-Bienal de los vientos estratosféricos del trópico, también llamada QBO); 12,2 meses (un posible efecto del corrimiento de la

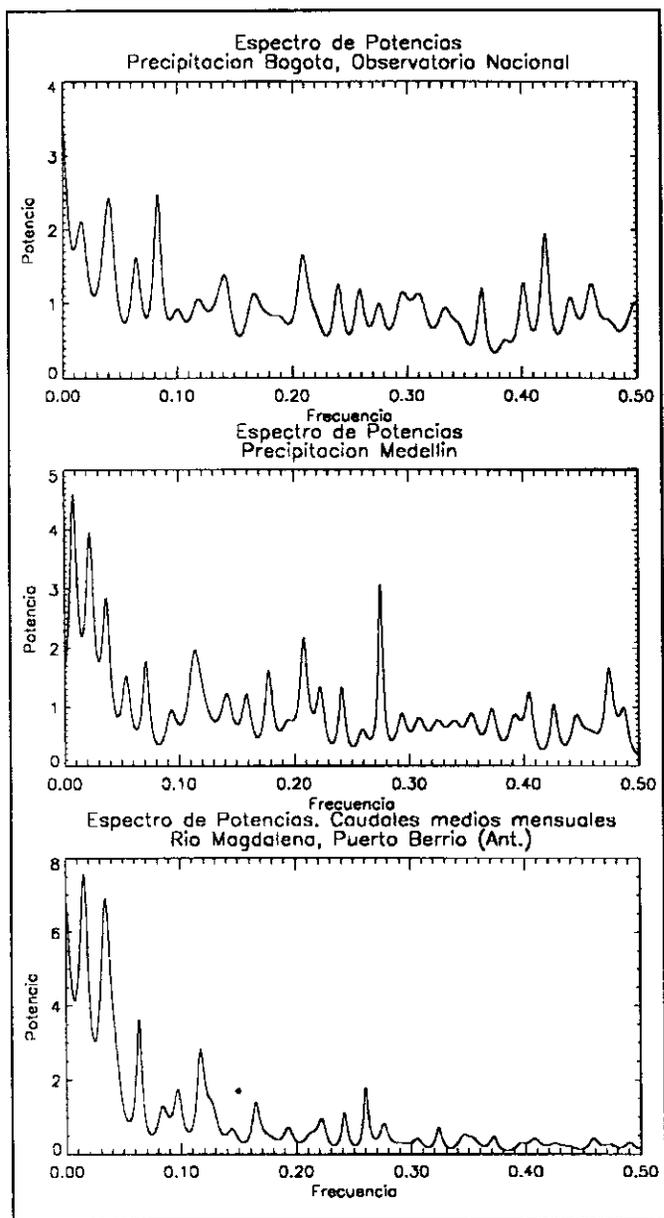


Figura 2

fase del ciclo anual, que hemos detectado en muchas series de la hidrología de Colombia, ver *Mesa et al.*, 1997); y 2,38 meses (una posible manifestación del efecto de las ondas de Madden-Julian, con periodicidad 30-60 días sobre el Océano Pacífico tropical).

- Precipitación en Medellín: 132 meses (11 años, acaso resultado de la posible manifestación de los ciclos de manchas solares?), 46 meses (la banda de frecuencias del fenómeno ENSO); 28 meses (la ban-

da de frecuencias de la QBO); 3,6 meses (una posible manifestación del carácter semi-anual de la lluvia en Medellín); 2,1 meses (posiblemente también el resultado de la Oscilación de Madden-Julian).

- Caudales medios del río Magdalena en Puerto Berrío: 66 meses (5,5 años), la banda de frecuencia asociada al fenómeno ENSO, similar a las lluvias en el Observatorio Nacional; 29 meses (la banda de frecuencias asociada a la QBO; 16 y 8 meses.

Estas (cuasi) periodicidades también son rasgos característicos de fenómenos caóticos, cuando están superpuestas sobre un espectro de banda ancha (*Poveda y Puente*, 1993), tal como lo observamos en la Figura 2.

4.1. EXPONENTES DE LYAPUNOV. La estimación del mayor exponente de Lyapunov para las series temporales se realizó usando la metodología propuesta por *Wolf et al.* (1985) incluyendo las mejoras propuestas por *Landa y Chetverikov* (1988). Ese algoritmo requiere estimar la divergencia promedio de trayectorias vecinas dentro del atractor, lo cual se logra tomando muchos puntos a lo largo de las trayectorias. Se comienza seleccionando una trayectoria de referencia en el atractor y un punto suficientemente cercano de una trayectoria vecina, separados una distancia $d(t_0)$ y luego se mide la tasa de separación de las dos trayectorias a medida que ambas evolucionan. Cuando la distancia entre las dos trayectorias se vuelve demasiado grande, el algoritmo busca una nueva trayectoria y define una nueva separación, realizándose el promedio sobre diferentes regiones del atractor.

El resultado de la estimación está dado en términos de unidades de bits por dato muestral. Así, un valor de +1 significa que la separación de órbitas cercanas se hace el doble en promedio en el intervalo de tiempo entre datos muestrales. El error es estimado como la pendiente del gráfico de la separación entre órbitas en unidades del diámetro de la hiper-esfera D -dimensional más pequeña que encierra el atractor en n pasos de tiempo sucesivos. El error se calcula como 2.5 veces la desviación estándar de la pendiente dividido por la raíz cuadrada del número de trayectorias seguidas. Hay tres parámetros que deben ser definidos. La dimensión de embebimiento D que debe ser mayor que la dimensión esperada del atractor. El parámetro n es el número de intervalos muestrales sobre el cual se sigue la trayectoria antes de escoger un nuevo par de puntos. Si n es muy grande las trayectorias se apartan mucho y se pierde la divergencia exponencial de las órbitas. Si n es muy pequeño, la estimación se hace computacionalmente muy lenta. Hay otro parámetro, E ,

Tabla 1. Exponente de Lyapunov (bits/mes). Serie de precipitación total del Observatorio Nacional en Bogotá, Los valores superiores son para el registro estandarizado y los valores inferiores son para el registro sin estandarizar.

n	D=3	D=4	D=5	D=6	D=7
3	0.741"0.03	0.446"0.03	0.356"0.02	0.332"0.02	0.304"0.02
	0.731"0.04	0.44"0.04	0.341"0.03	0.307"0.02	0.268"0.02
4	0.574"0.03	0.391"0.03	0.315"0.02	0.303"0.02	0.272"0.02
	0.576"0.04	0.386"0.03	0.298"0.027	0.263"0.02	0.236"0.02
5	0.461"0.03	0.305"0.02	0.28"0.02	0.288"0.02	0.256"0.01
	0.436"0.03	0.305"0.03	0.282"0.02	0.245"0.02	0.224"0.02
6	0.371"0.03	0.262"0.02	0.246"0.02	0.247"0.02	0.230"0.01
	0.375"0.03	0.251"0.02	0.226"0.02	0.227"0.02	0.207"0.02

que tiene que ver con la exactitud de los datos por debajo de la cual se espera que el ruido domine a la señal.

En la Tabla 1 se presentan los resultados de la estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual de Bogotá en el Observatorio Nacional (1866-1992; 1524 registros). El significado de D y n ha sido mencionado en el párrafo anterior. El valor del parámetro E se escogió como 0.0001 para las series estandarizadas y 0.00001 para las series no estandarizadas. Los resultados se presentan tanto para la serie estandarizada (casilla superior de las filas de la Tabla 1), como para la serie sin estandarizar (casilla inferior de las filas de la Tabla 1). En la Figura 3 se presentan los resultados gráficos de Bogotá, para los diversos valores de D y n .

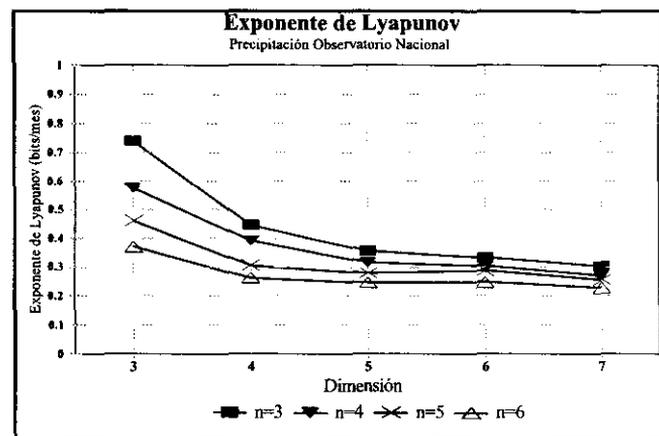


Figura 3. Estimadores del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual estandarizada de Bogotá (Observatorio Nacional), con diferentes valores de D y n

Tabla 2. Exponente de Lyapunov (bits / mes). Serie de precipitación mensual de Medellín. Los valores superiores son para el registro estandarizado y los valores inferiores son para el registro sin estandarizar.

n	D=3	D=4	D=5	D=6	D=7
3	0.663"0.047	0.45"0.039	0.366"0.038	0.343"0.033	0.288"0.029
	0.65"0.05	0.407"0.04	0.368"0.013	0.308"0.030	0.237"0.03
4	0.531"0.040	0.392"0.035	0.337"0.033	0.284"0.032	0.258"0.028
	0.509"0.04	0.358"0.03	0.303"0.04	0.286"0.03	0.236"0.02
5	0.395"0.04	0.305"0.03	0.281"0.032	0.276"0.027	0.229"0.026
	0.406"0.04	0.291"0.03	0.295"0.04	0.244"0.03	0.206"0.03
6	0.345"0.03	0.265"0.03	0.249"0.03	0.238"0.03	0.215"0.03
	0.348"0.04	0.256"0.03	0.254"0.03	0.217"0.03	0.179"0.02
7	0.275"0.04	0.209"0.02	0.191"0.03	0.197"0.03	0.189"0.02
	0.29"0.03	0.202"0.03	0.215"0.03	0.217"0.03	0.185"0.02
8	0.249"0.03	0.186"0.02	0.189"0.02	0.188"0.02	0.169"0.02
	0.233"0.03	0.182"0.02	0.198"0.02	0.195"0.02	0.157"0.02

En la tabla 2 y en la Figura 4 se presentan los resultados de la estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual de Medellín (1908-1986). Los resultados se presentan tanto para la serie estandarizada como para la serie sin estandarizar.

En la Tabla 3 y la figura 5 se presentan los resultados de la estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de caudales medios mensuales del río Magdalena en Puerto Berrío. Los resultados se presentan para la serie estandarizada y para la serie sin estandarizar.

Tabla 3. Exponente de Lyapunov (bits/mes). Serie de caudales medios mensuales del río Magdalena (Puerto Berrío). Los valores superiores son para el registro estandarizado y los valores inferiores son para el registro sin estandarizar.

n	D=3	D=4	D=5	D=6	D=7
3	0.634"0.05 0.604"0.06	0.443"0.05 0.412"0.05	0.383"0.05 0.349"0.05	0.369"0.04 0.291"0.04	0.302"0.04 0.239"0.04
4	0.456"0.05 0.473"0.05	0.369"0.05 0.390"0.04	0.359"0.04 0.305"0.04	0.340"0.0 0.271"0.03	0.258"0.04 0.230"0.03
5	0.416"0.05 0.394"0.05	0.314"0.04 0.309"0.04	0.301"0.04 0.302"0.04	0.303"0.04 0.257"0.03	0.240"0.03 0.197"0.03
6	0.335"0.05 0.320"0.043	0.275"0.04 0.245"0.03	0.257"0.04 0.257"0.03	0.257"0.03 0.249"0.03	0.225"0.03 0.186"0.03
7	0.278"0.04 0.264"0.04	0.195"0.03 0.221"0.04	0.213"0.04 0.206"0.03	0.219"0.03 0.181"0.03	0.208"0.03 0.182"0.02
8	0.263"0.04 0.237"0.04	0.215"0.03 0.202"0.03	0.209"0.03 0.176"0.03	0.207"0.03 0.181"0.02	0.178"0.02 0.158"0.02

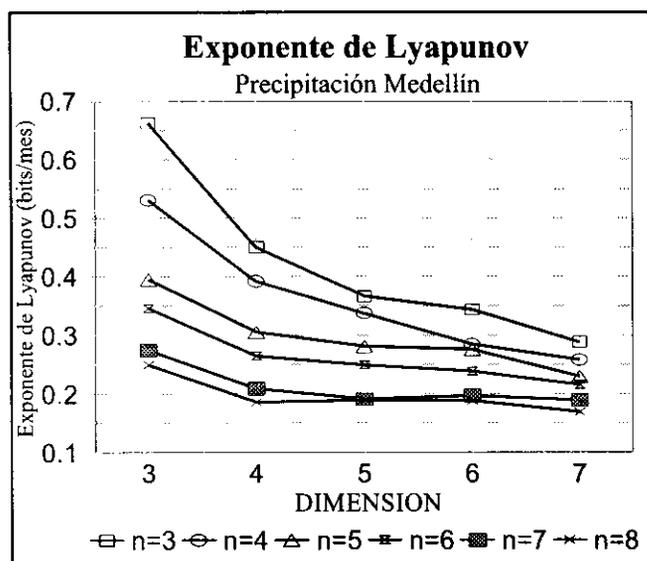


Figura 4. Estimación del mayor exponente de Lyapunov para la serie de precipitación mensual en Medellín

De los resultados obtenidos para la estimación del mayor exponente de Lyapunov, λ , se desprenden los siguientes hechos:

- Todos los valores de λ se encuentran en el rango 0.15 a 0.75. La teoría indica que de acuerdo con estos resultados, las trayectorias de las series hidrológicas, en el espacio de fases D -dimensional, presentan divergencia exponencial (base 2), en promedio. Esto sugiere la existencia de caos en las series de la hidrología de Colombia. Sin embargo, la precisión de los resul-

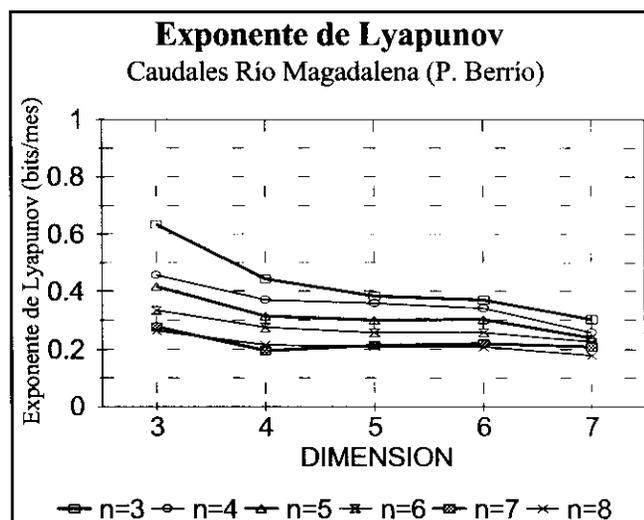


Figura 5. Estimadores del mayor exponente de Lyapunov para la serie estandarizada de caudales medios mensuales del río Magdalena (Puerto Berrío, Antioquia), para distintos valores de D y n

tados obtenidos está supeditada a la longitud de las series. Más adelante se discutirá este aspecto.

- En general, los valores de λ son más altos para la serie estandarizada que para la serie sin estandarizar. Las series estandarizadas son aquellas a las cuales se les ha Arestado“ el ciclo anual y por tanto mostrarían un atractor más complicado (más caótico) que el atractor de las series sin estandarizar. En estas últimas, el ciclo anual y semi-anual es muy fuerte y puede dominar el resto de la señal.
- Para el mismo valor de n , se observa una disminución del valor de λ a medida que D aumenta. Parecería presentarse una estabilización de λ con los valores más altos de D .
- En general, para un mismo valor de D , el valor de λ decrece en todas las series.
- Para $D=3$, la serie de precipitación de Bogotá presenta el más alto de los tres valores (ver por ejemplo, $n=3$ y $n=6$). En tanto que para $D=4$, 5 y 6, la serie de caudales del río Magdalena presenta los mayores valores. Para $D=7$, los valores del exponente de Lyapunov de la precipitación en Bogotá y de caudales del río Magdalena son casi indistinguibles y el menor valor lo presenta la serie de precipitación de Medellín.
- Para valores de D entre 3 y 6, el exponente de Lyapunov de la serie de Medellín ocupa un valor intermedio entre los de la precipitación en Bogotá y los caudales del río Magdalena.
- La magnitud de los exponentes de Lyapunov cuantifica la dinámica de los atractores en términos de información. Si $\lambda=0.1$ bits/mes y un punto inicial fuera

especificado con una precisión de una parte por millón (20 bits), después de 200 meses (20 bits/0.1 bits/mes) habremos perdido todo conocimiento del estado inicial del sistema. Por ello se dice laxamente que el inverso del exponente de Lyapunov λ^{-t} es el límite de predecibilidad del comportamiento de largo plazo del sistema (Rodríguez-Iturbe et al., 1989).

4.2 Dimensión de Hausdorff-Besikovitch

Los resultados de la estimación de la dimensión de Hausdorff-Besikovitch para las series hidrológicas de Colombia se muestran en la Tabla 4, en función de la dimensión, D , en que se embebe el atractor reconstruido artificialmente por el método de los rezagos en el tiempo.

4.3 Dimensión de escalamiento entre distancias en el atractor

Mediante el análisis de la función de escalamiento de las distancias entre parejas de puntos del atractor, $C(r)$ vs. r en espacio logarítmico, es posible examinar el comportamiento de la pendiente D_2 -la dimensión que aquí se ha llamado de escalamiento entre las distancias de parejas de puntos en el atractor- para distinguir si la serie temporal proviene de un proceso estocástico de infinitos grados de libertad, o determinístico de baja dimensionalidad o aún no estacionario. Para las series temporales bajo análisis se verificó el comportamiento del diagrama $C(r)$ vs. r , usando el algoritmo propuesto por Theiler (1987). En la Tabla 5 y Figuras 6, 7, 8 y 9 se presentan los resultados de la estimación de D_2 para diferentes valores de la dimensión D en que se reconstruye el atractor. Las letras N. D. (No Disponible) corresponden a una estimación de D_2 con un error de estimación del 100%.

Tabla 4. Estimación de la Dimensión de Hausdorff-Besikovitch para las series hidrológicas de Colombia. Registro Estandarizado (E), y sin estandarizar (No E).

SERIE	D=2	D=3	D=4	D=5
Bogotá (E)	1.829"0.331	2.075"0.375	2.807"0.507	3.288"0.594
Bogotá (No E)	1.730"0.313	2.337"0.430	3.051"0.551	3.598"0.65
Medellín (E)	1.637"0.374	2.161"0.494	2.492"0.57	2.468"0.565
Medellín (NoE)	1.792"0.41	1.947"0.446	2.609"0.597	3.000"0.686
Magdalena (E)	1.614"0.46	1.989"0.562	2.267"0.64	N.D.
Magdalena (NoE)	1.742"0.475	2.147"0.585	2.6"0.708	N.D.

Tabla 5. Estimación de la Dimensión de Escalamiento entre distancias, D_2 , para las series hidrológicas de Colombia. Las letras entre parentesis de la primera columna corresponden al Registro Estandarizado (E), y sin estandarizar (No E).

SERIE	D=2	D=3	D=4	D=5	D=6	D=7
Bogotá (E)	2.074 « 0.031	3.013 « 0.028	3.887 « 0.007	4.581 « 0.118	5.291" 0.11	N.D.
Bogotá (No E)	2.046 « 0.051	2.913 « 0.034	3.704 « 0.058	4.531 « 0.091	4.965 « 0.105	N.D.
Medellín (E)	2.075 « 0.024	3.025 « 0.039	3.924 « 0.032	4.731" 0.086	5.163 « 0.124	5.91"0.195
Medellín (NoE)	2.046 « 0.07	3.003 « 0.08	3.799 « 0.048	4.688 « 0.162	5.044 « 0.23	5.594 «0.23
Magdalena (E)	2.014 « 0.13	3.01 « 0.12	3.79 « 0.05	4.550 « 0.180	4.90 « 0.18	5.5 « 0.17
Magdalena(NoE)	2.03 « 0.07	3.00 « 0.118	3.651" 0.008	4.295 « 0.16	4.758 « 0.22	5.343 «0.23

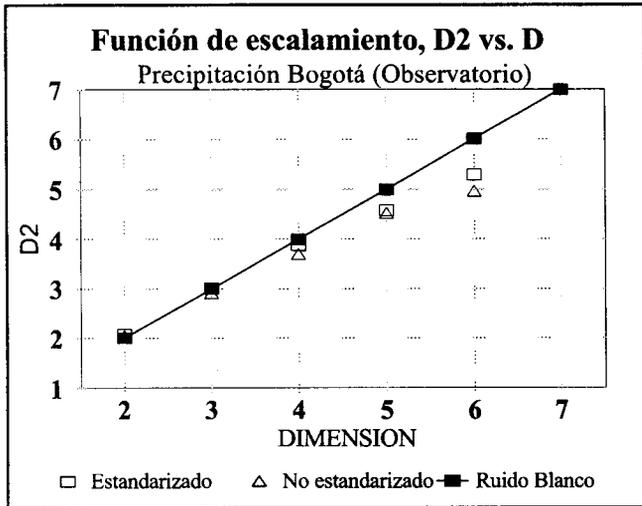


Figura 6. Variación del exponente de escalamiento D_2 en función de D . Para un ruido blanco la variación es lineal. Para la serie de precipitación mensual de Bogotá el crecimiento es más lento, aunque no muestra rasgos claros de convergencia o saturación.

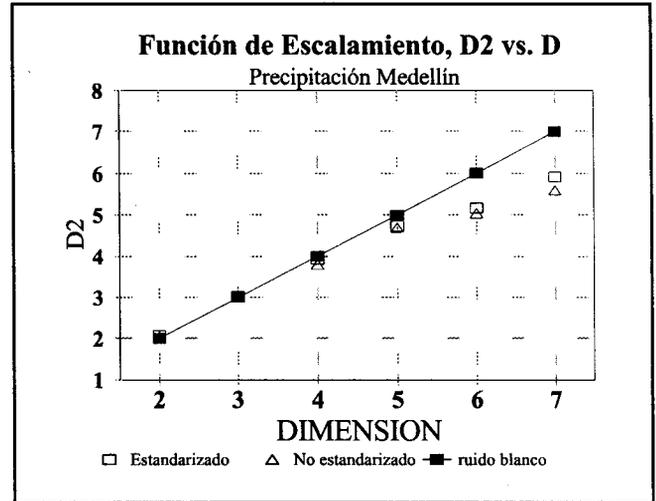


Figura 7. Variación del exponente de escalamiento D_2 en función de D . Para un ruido blanco el crecimiento D_2 es lineal con D . Para las series de Medellín el crecimiento es más lento, aunque no exhiben una convergencia definida.

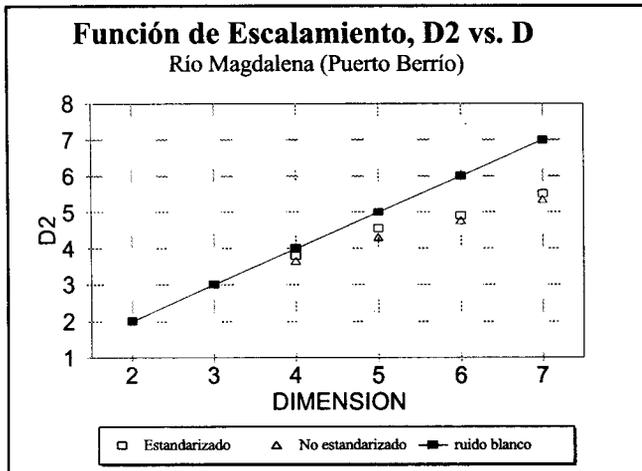


Figura 8. Variación del exponente D_2 en función de D para las series de caudales mensuales del río Magdalena (Puerto Berrío, Antioquia). Para un ruido blanco, D_2 crece linealmente con D . Aquí también se observa que el crecimiento es más lento para la serie de caudales que para un ruido blanco.

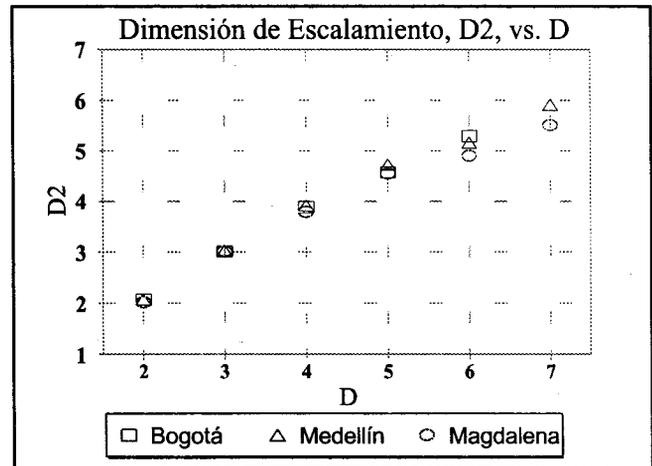


Figura 9. Variación del exponente de escalamiento D_2 en función de la dimensión D para las tres series estandarizadas de precipitación en Bogotá y Medellín y para los caudales medios del río Magdalena (Puerto Berrío, Antioquia)

A partir de los resultados de la estimación de la función de escalamiento entre pares de puntos, D_2 , en el atractor D -dimensional, es pertinente resaltar las siguientes conclusiones:

- Para las tres series hidrológicas estudiadas, el crecimiento de D_2 vs. D es más lento que el correspondiente a un ruido blanco (Figura 9). Es bien sabido que las series hidrológicas no corresponden a procesos de ruido blanco y su escala de fluctuación así lo confirma (ver *Betancur et al.*, 1993), más aún aquellas no estandarizadas. Las series estandarizadas tampoco presentan el diagrama de un ruido blanco. En estas últimas, aunque se ha removido el ciclo anual, todavía están presentes otros ciclos de gran escala que modulan la hidrología de Colombia, tales como el ciclo del ENSO (56 y 43 meses) y el ciclo de la Oscilación Cuasi-Bienal (26 meses), la oscilación de Madden-Julian (40-60 días) e inclusive hasta ciclos decadales de origen solar (Figura 2). Tales ciclos de gran escala temporal agregan persistencia de largo plazo a las series hidrológicas. A ello puede deberse el comportamiento observado en las figuras 6, 7, 8 y 9
- En ninguno de los diagramas de D_2 vs. D se observa una clara convergencia o saturación hacia un valor definido. En particular, es notable que no sea posible estimar el valor de D_2 para $D=7$ con la serie de Bogotá, a pesar de ser la serie de mayor longitud de las estudiadas aquí. La razón pudiera atribuirse a la clara tendencia decreciente que presenta esta serie (ver *Smith et al.*, 1996), pero este argumento juega más a favor de la convergencia, tal como se anotó para procesos no ergódicos (*Osborne y Provenzale*, 1989, *Cutler*, 1994).
- En la Figura 9 se presenta una comparación de los resultados de la estimación de D_2 para las tres series hidrológicas estandarizadas. El crecimiento más lento lo exhibe la serie de caudales del río Magdalena. Este resultado reafirma la evidencia hidrológica de una menor intermitencia y variabilidad (caos en una cierta manera) en las series de caudales mensuales que la existente en las series de precipitación mensuales. Por tanto no es extraño encontrar un valor mayor de la dimensión de Hausdorff-Besikovich o de la Dimensión D_2 (ver Tablas 4 y 5) para procesos de lluvia que para procesos de caudales mensuales, particularmente de una cuenca del tamaño de la del río Magdalena.

4. Conclusiones

Este trabajo explora con herramientas de sistemas dinámicos no lineales, sobre la posible presencia de caos de baja dimensionalidad en la hidrología de Colombia. En particular se ha estimado el Espectro de Potencias, que confirma la presencia de (cuasi) periodicidades asociadas a la interacción no lineal de diversos fenómenos macro-climáticos sobre la hidrología de Colombia. En particular es manifiesta la influencia del fenómeno ENSO y de la QBO, así como de las ondas de Madden-Julian. El ciclo perfecto de 11 años identificado para la precipitación en Medellín podría ser una evidencia de la influencia de las manchas solares, pero esta conclusión todavía necesita más exploración. También se estimaron el mayor exponente de Lyapunov y las dimensiones fractal y de escalamiento de distancias en el atractor. Los resultados obtenidos no permiten tener conclusiones definitivas, aunque se han estimado exponentes de Lyapunov positivos entre 0.15 y 0.75, lo cual parece indicar que hay divergencia exponencial de las trayectorias en el espacio de fases, un signo de caos. El período de predecibilidad de un fenómeno está dado como el inverso del mayor exponente de Lyapunov, por lo que se desprende un período entre 2 y 7 meses como el horizonte de predecibilidad de las series hidrológicas estudiadas. Los resultados de la estimación de la Dimensión Fractal no son concluyentes para decir inequívocamente si hay caos en las series estudiadas. En particular es interesante destacar que la serie de precipitación mensual en Bogotá, por tener una tendencia decreciente muy marcada, estadísticamente significativa (*Smith et al.*, 1996) presenta estimadores de D_2 para $D \geq 7$ con barras de error del 100%, lo que manifiesta la incertidumbre asociada. La teoría predice convergencia de D_2 para procesos no estacionarios (ver *Cutler*, 1994) y en nuestro caso, no se observa. Es necesario seguir investigando en otras series de gran longitud de variables de la hidro-climatología de Colombia, para confirmar la existencia de una componente caótica dominante.

La reconstrucción del atractores de un sistema dinámico utilizando únicamente una serie de tiempo mediante el método de los rezagos es un piedra fundamental en análisis de caos. Los requerimientos de datos representan otra restricción en la estimación de la dimensión D_2 . Varios investigadores han propuesto límites al número de datos que se requieren. Entre otros, *Ruelle* (1990) propone un tamaño de $10^{D_2/2}$, mientras que *Essex y Neremberg* (1991) sugieren que $2^{D_2} (D_2+1)$ puntos son suficientes para la reconstrucción del atractor. Las series hidrológicas de Colombia cuentan con una longitud de registros de 1524

para la precipitación en Bogotá, 948 para la precipitación en Medellín y 684 para los caudales del río Magdalena. Con el criterio de *Essex y Neremberg* (1991) se tienen los siguientes requerimientos:

D_2	3	4	5	6	7	8
Puntos requeridos en el atractor	32	80	196	448	1024	2304

De tal manera que si el valor de la dimensión del atractor fuera entre 6 y 7, la longitud de las series no sería una restricción para la estimación de D_2 en la hidrología de Colombia. De todas formas, el número de datos requeridos para determinar la dimensión de un atractor depende de la estructura del atractor, de su dimensionalidad y del intervalo de discretización del fenómeno. En trabajos separados, *Lorenz* (1991) y *Read* (1991) señalan que la longitud de las series de variables meteorológicas es muy corta para poder efectuar una estimación adecuada de las dimensiones de los atractores, dado el comportamiento altamente complejo del sistema climático que involucra muchos grados de libertad. Sin embargo, estudios de modelos y de la atmósfera misma demuestran que hay aspectos fundamentales de la dinámica atmosférica de gran escala (en espacio y tiempo) que parecen mostrar una cierta simplicidad que puede ser representada por pocos grados de libertad.

A escalas temporales menores la variabilidad se considera el ruido de las escalas mayores.

Los procesos caóticos exhiben una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo su carácter determinístico puede ser aprovechado para efectuar predicciones de corto plazo con muy buenos resultados. El conocimiento de las inestabilidades (o estabilidades) locales dentro del atractor puede ayudar a mejorar en mucho las predicciones. Entre los métodos de predicción en régimen de caos se destacan: MARS (Multivariate Adaptive Regression Splines; *Lewis et al.*, 1994), método de los análogos (*Kostelich y Lathrop*, 1994), método de reconstrucción del atractor filtrado (*Sauer*, 1994), métodos de promediación de los vecinos próximos en el atractor (*Wayland et al.*, 1993), el método de funciones base radiales (*Casdagli*, 1989). Todas estas herramientas pueden ser usadas para la predicción de la hidrología de Colombia, teniendo en cuenta que la variabilidad natural del clima ocurre en todas las escalas de tiempo y que el grado de predecibilidad de los procesos está determina-

do por la misma escala temporal involucrada. Las variaciones diarias del tiempo pueden predecirse con buen suceso para algunos días, las variaciones estacionales pueden predecirse con una anticipación temporal del orden de estaciones, como también es posible obtener buenas predicciones de las variaciones anuales e interanuales con uno o más años de anticipación. La predicción del clima bajo escenarios de cambio global también muestran posibilidades de predicción aunque falta mucho por entender acerca del papel real que juegan las nubes en la dinámica energética de la tierra y de la retroalimentación de los procesos océano-atmósfera-tierra. En cualquier caso las interacciones no lineales y la posible existencia de caos deben jugar un papel fundamental en el terreno de la predicción climática e hidrológica.

Referencias

- Albano, A. M., A. Passamante, & M. E. Farrell.** 1991. Using higher-order correlations to define an embedding window, *Physica D*, 54, 85-97.
- Barnet, T. P.**, The interaction of multiple time scales in the tropical climate system", *J. Climate*, 4, 269-285.
- Betancur, C. M., L. F., Sánchez, & G., Poveda** 1993. Estimación de la escala de fluctuación en series de lluvias y caudales en Colombia, *Revista Atmosfera*, No. 20. 1993. Por:
- Casdagli, M.**, 1989. Nonlinear prediction of chaotic time series", *Physica D*, 35, 335-356.
- Chang, P., B. Wang, T. Li, & L., Ji.** Interactions between the seasonal cycle and ENSO-frequency entrainment and chaos in a coupled atmosphere-ocean model, *Geophys. Res. Lett.*, 21, No. 25, 2817-2820, 1994.
- Cutler, C. D.**, 1994. A theory of correlation dimension for stationary time series, *Phil. Trans. R. Soc. Lon. A*, 348, 343-355.
- Diaz, H. F., & V. Markgraf,** (eds.), 1993. *El Niño. Historical and paleoclimatic aspects of the Southern Oscillation*. Cambridge University Press. 476 p.
- Enfield, D. B.**, 1989. El Niño, past and present, *Rev. Geophys.*, 27, 159-187.
- Essex, T. L., & Neremberg, M. A. H.**, 1991. Comment on Deterministic chaos: The science and the fiction by D. Ruelle, *Proc. R. Soc. Lon. A*, 435, 287-292.
- Essex, T. L., T. Lookman, & M. A., Neremberg,** 1987. The climate attractor over short time scales, *Nature*, 326, 64-66.
- Fraederich, K.**, 1986. Estimating the dimensions of weather and climate attractors, *Jour. Atmos. Sci.*, 43, 419-432.
- Glantz, M., R. Katz & N. Nicholls,** (eds.), 1991, *Teleconnections linking worldwide climate anomalies*. Cambridge University Press. 535 p.
- Grassberger, P.**, 1986. Do climatic attractors exist?, *Nature*, 323, 609-612.
- Hense, 1987.** On the possible existence of a strange attractor for the Southern Oscillation, *Beitr. Phys. Atmosph.*, 60, 34-47.

- Hentschel, H. G. E., & I. Procaccia.** 1983. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica D*, 8, 435-444.
- Jin, F.-F., J.D. Neelin, & M., Ghil.** 1994. El Niño on the Devil's Staircase: Annual subharmonic steps to chaos, *Science*, 264, 70-72.
- Kostelich, E. J. & D. P. Lathrop,** 1994. Time series prediction by using the method of analogues. En: *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past* (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XV, Addison-Wesley, 283- 295.
- Landa, P. S., & V. I., Chetverikov.** 1988. On the evaluation of the maximum Lyapunov exponent from a single experimental time series, *Soviet Phys. Tech. Phys.* 33, 236-268.
- Lewis, P.A. W., B. K. Ray, & J.G., Stevens.** 1994. Modeling time series by using Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS), En: *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past* (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), SFI Studies in the Science of Complexity, Proc. Vol. XV, Addison-Wesley, 297-318.
- Lorenz, E. N.,** 1963. Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141.
- _____, 1991. Dimension of weather and climate attractors, *Nature*, 353, 241-244.
- Mandelbrot, B. B.,** 1982. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman and Co., San Francisco.
- Mesa, O. J., G. Poveda & L. F. Carvajal.** 1997. *Una Introducción al Clima de Colombia*. Imprenta Universidad Nacional, Bogotá, 1997.
- Münnich, M., M. A., Cane, & S. E., Zebiak.** 1991. A study of the self-excited oscillations in a tropical ocean-atmosphere system. Part II: Nonlinear cases, *J. Atmos. Sci.*, 48, 1238-1248.
- Nicolis, C. & G. Nicolis.** 1984. Is there a climatic attractor?, *Nature*, 311, 529-532.
- _____, 1986. Reconstruction of the dynamics of the climatic system from time-series data, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83, 536-540.
- Osborne, A. R., & A., Provenzale.** 1989. Finite correlation dimension for stochastic systems with power law spectra, *Physica D35*, 357-381.
- Philander, S. G.,** 1990. *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation*, Academic Press, San Diego, USA, 293 p.
- Pool, R.,** 1989. Is something strange about the weather?, *Science*. 243, 1290-1293.
- Porporato, A., & L., Rindolfi.** Nonlinear analysis of river flow time sequences, *Water Res. Res.*, 33, 1353-1367.
- Poveda, G.,** Funciones Ortogonales Empíricas en el análisis de la relación entre los caudales medios en Colombia y las temperaturas de los océanos Pacífico y Atlántico, *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica e Hidrología*, IAHR, Santiago de Chile, Vol. 4, 131-144, 1994.
- Poveda, G., & O., Mesa.** 1995. The Relationship between ENSO and the hydrology of tropical South America. The case of Colombia. *Proceedings of the Fifteenth Annual American Geophysical Union Hydrology Days*, 227-236, Atherton, CA, USA, Hydrology Days Publications.
- _____, 1997. Feedbacks between hydrological processes in tropical South America and large scale oceanic-atmospheric phenomena, *J. Climate*, Vol. 10.
- Poveda, G., & C., Puente.** 1993. Strange attractors in the atmospheric boundary layer turbulence, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol 64. No. 1-2, 175-197.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, & W. T. Vetterling.** 1986. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 818 p.
- Read, P. L.,** 1991. Applications of chaos to meteorology and climate, En: *Chaos and related non-linear phenomena*, Ed. T. Mullin, Oxford University Press.
- Rodríguez-Iturbe, I., B., Febres de Power, M. B., Sharifi, & K. P., Georgakakos.** 1989. Chaos in rainfall, *Water Res. Res.*, 25, 1667-1675.
- Ruelle, D.,** 1990. Deterministic chaos: The science and the fiction, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 427, 241-248.
- Sauer, T.,** 1994. Time series prediction by using delay coordinate embedding, En: *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past* (Eds. A.S.Weigend y N. A. Gershenfeld), SFI Studies in Science of Complexity, Proc. Vol. XV, Addison-Wesley, 175-193.
- Sauer, T., & J. A., Yorke.** 1993. How many delay coordinates do you need?, *Inter. Jour. Bifurcation and Chaos*, 3, 737-743.
- Takens, F.,** 1981. Detecting strange attractors in turbulence. In: *Dynamical Systems and Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics. No. 898, 366-381, Springer-Verlag.
- Theiler, J.,** 1987. Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points, *Phys. Rev. A*. 36. 4456-4462.
- Tsonis, A. A., & J. B. Elsner.** 1989. Chaos, strange attractors and weather, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 70, 14-23.
- Tziperman, E., L., Stone, M. Cane, & H., Jarosh,** El Niño chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean-atmosphere oscillator, *Science*, 264, 72-74. 1994.
- Vallis, G. K.,** 1986. El Niño: chaotic dynamical system?, *Science*, 232, 243-245.
- _____, 1988. Conceptual models of El Niño and the Southern Oscillation, *Jour. Geo. Res.*, 93, 13 979-13 991.
- Wayland, R. D., Pickett, D. Bromley, & A., Passamante.** 1993. Measuring the predictability of noisy recurrent time series, *Int. Jour. Bifur. Chaos*, 3, 797-802.
- Wolf, A., J. B., Swift, Swinney, H., & J. A., Vastano.** 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, 16, 286-317.
- Webster, P. J., & S., Yang.** 1992. Monsoon and ENSO: Selectively interactive systems, *Q. J. R. Meteor. Soc.*, 118, 877-926.