VICISITUDES DEL POSTULADO EUCLIDEO EN COLOMBIA

por

Víctor Samuel Albis González*

Resumen

Albis González, V. S.: Vicisitudes del postulado euclídeo en Colombia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21**(80): 281-293, 1997. ISSN 0370-3908.

En este ensayo se estudian, en primer lugar, los intentos publicados de demostración del postulado euclídeo de las paralelas hechos en Colombia en el siglo XIX (Indalecio Liévano & Hermógenes Wilson) y las observaciones que contemporáneos les hicieron en su momento. En segundo lugar, se analizan los ensayos de Julio Garavito Armero sobre las geometrías no euclídeas, aparecidos en la segunda década del siglo XX, insistiendo en los aspectos matemáticos de sus razonamientos y su influencia negativa en la aceptación de aquellas en Colombia en la primera mitad de siglo.

Palabras claves: Historia de la matemática, geometría no euclídea, Colombia

Abstract

In the first place, the alleged proofs of Euclid's Fifth Postulate published in Colombia (Indalecio Liévano & Hermógenes Wilson), during the 19th century, and the contemporary observations to them are examined. In the second place, the mathematical arguments appearing in the essays by Julio Garavito Armero on non-Euclidean geometries, published in the second decade of the 20th century, are analyzed and some discussion on their influence in the non acceptance of these geometries in Colombia in the first half of this century is given.

Key words: History of mathematics, non-Euclidean geometry, Colombia.

1. Introducción

El "maravilloso problema" de las paralelas ha ejercido desde la antigüedad clásica una singular fascinación sobre los matemáticos. En efecto, recordemos que dos líneas que se aproximan arbitrariamente la una a la otra, sin cortarse, se dicen asintóticas, y que nada apriori nos impide pensar que dos líneas rectas no puedan ser asintóticas, tal como lo expresaba **Proclo** [1970, 1176] ya en el siglo V:

* Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá. Apartado aéreo 91480, Santafé de Bogotá, D.C., 8, Colombia.
Email: valbis@ciencias.ciencias.unal.edu.co; albisf@inter.net.co

El hecho de que una recta se incline sobre otra cuando disminuyen los ángulos es verdadero e ineluctable, mientras que el encuentro final de las rectas que se inclinan cada vez más cuando se prolongan es probable, pero no ineluctable, a no ser que un razonamiento demuestre que el hecho es verdadero para todas las rectas.

La anterior no es una afirmación gratuita de PROCLO quien conocía, por ejemplo, la opinión de GÉMINO de que una rama de la hipérbola y una de sus asíntotas podrían considerarse como paralelas en el sentido de la definición euclídea [EUCLIDES, **1970**, 704]:

Rectas [líneas] *paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran.*

Por su parte, EUCLIDES había intentado mucho antes obviar este problema introduciendo su célebre postulado quinto [*ibidem*, 704]:

Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

Pero aún bajo esta forma el postulado encontró objeciones como la de ser poco intuitivo y afirmar cosas acerca de rectas que se encuentran prolongadas al infinito. Por otra parte, su recíproco [*ibidem*, 715]:

En todo triángulo dos ángulos, tomados en junto, son menores que dos rectos[ibidem, 715],

podía demostrarse independientemente del quinto postulado. Finalmente, señalemos que existen evidencias de que mucho antes de que se escribieran los *Elementos* de EUCLIDES, se hicieron intentos por desarrollar una geometría sin el mencionado postulado -con la probable intención de encontrar en ese desarrollo una verdadera "autocontradicción"- como nos lo sugiere el siguiente pasaje de ARISTÓTELES [**1964**, 367-368, *Analítica posterior*, Lib.I, Cap.12, 77a/77b]:

Si una cuestión silogística [Es decir, una premisa presentada o formulada en forma de pregunta o interrogación.] *equivale a una proposición que dé cuerpo a una de las dos posturas de una contradicción, y si cada ciencia tiene sus proposiciones peculiares de las que se deduce su conclusión particular, entonces existe algo así como una interrogación científica distinta o diferenciadamente tal, y de la forma interrogativa de la premisa se consigue el desarrollo de la conclusión apropiada de cada ciencia. De aquí que evidentemente no cualquier interrogación será conducente para la Geometría...; solamente serán geométricas o propias de la Geometría aquellas interrogaciones y cuestiones que formen premisas para la demostración de los teoremas de la Geometría o de cualquier otra ciencia, como la óptica, que emplee las mismas verdades fundamentales que la Geometría... El geómetra se ve obligado a dar su explicación de estas cuestiones, utilizando las verdades fundamentales de la Geometría junto con sus conclusiones previas; en cambio, el geómetra, como tal, no se ve esforzado a dar ninguna explicación acerca de las verdades fundamentales... Hay, pues, un límite en las cuestiones que podemos presentar a cada hombre de ciencia; ni cada hombre de ciencia está obligado a responder a todas las preguntas sobre cada sujeto particular, sino solamente de los que entran dentro del campo de su propia ciencia. Si, pues, en una controversia con geómetra en cuanto geómetra el que discute se limita a la Geometría y demuestra cualquier cosa a partir de premisas geométricas, debe ser evidentemente aplaudido; si se aparta de estas, cometerá falta, y evidentemente ni tan siquiera puede refutar al geómetra, de no ser accidentalmente. No se debe, pues, discutir la Geometría entre los que no son geómetras, pues ante tales personas un argumento irrazonable pasa inadvertido... Ahora bien, puesto que existen cuestiones geométricas, ¿se deduce de ello que hay también cuestiones diferenciadamente no geométricas? Más aún: en cada ciencia especial -la Geometría, por ejemplo-, ¿qué clase de error es el que puede viciar las cuestiones y, sin embargo, no excluirlas de esta ciencia? Por otra parte, ¿es una conclusión errónea la que se construye a partir de premisas opuestas a las verdaderas, o es una falacia formal, aunque derivada de premisas geométricas? ¿O quizá la conclusión errónea se deba a que se deduce de premisas de otra ciencia; por ejemplo, en una controversia geométrica, una cuestión musical es diferenciadamente no-geométrica, mientras que la noción que introduce el paralelo* [paralelismo] *es en algún sentido geométrica, siendo no-geométrica en un aspecto distinto, y estando la razón de ello en que "no-geométrico", igual que "no-rítmico", es un término equívoco, significando en un caso no Geometría en absoluto, y en el otro mala Geometría? Es este error, es decir, el error que se funda en premisas de esta clase -premisas de la ciencia, pero falsas-, el que es contrario* [Contrario, pero no contradictorio.

La ignorancia contradictoria de la ciencia es la carencia absoluta de saber.] *de la ciencia,*

en la interpretación que le da TOTH [**1967**; **1969**; **1977**]: ¿es la contradicción que resulta de negar la existencia de paralelas estrictamente matemática o más ampliamente lógica en su naturaleza?

De acuerdo con lo anterior, se abrieron desde un principio tres caminos para tratar el problema de las paralelas:

(1) derivar el postulado de las paralelas del resto de la geometría elemental;
(2) reformular este postulado o la definición de rectas paralelas en algo menos objetable; y
(3) describir en qué se convertiría la geometría si de alguna manera se negase el quinto postulado.

No es nuestro propósito aquí hacer ni siquiera una brevísima descripción de la historia que generó el recorrer de estos tres caminos. Existen, para esto, los excelentes libros de BONOLA [**1955**] y GRAY [**1979**], por ejemplo. Sin embargo, haremos, cuando lo consideremos necesario, algunos comentarios sobre esta historia en beneficio de la comprensión de algunas situaciones. Naturalmente, no sobra decir que es imposible demostrar el quinto postulado a partir de la *geometría elemental*, es decir, de aquellas proposiciones que pueden demostrarse sin él.

Nuestro cuidado en este ensayo es estudiar, en primer lugar, los intentos de demostración del postulado euclídeo hechos por INDALECIO LIÉVANO (Carmen de Apicalá, 1834–Bogotá, 1913) usando el primer camino. Es lo más probable que LIÉVANO ignorara la existencia de la geometría no-euclídea de LOBACHÉVSKI, BOLYAI y GAUSS, y su interés genuino estuviese en llenar el "vacío" que en las matemáticas producía *el inquietante postulado de las paralelas*, como lo intentó con mejor fortuna con el "vacío" de la fundamentación de los números reales [ALBIS & SORIANO, **1976**]. En segundo lugar, analizar los ensayos de JULIO GARAVITO ARMERO (Bogotá, 1865- ibidem, 1920) sobre las geometrías no euclídeas. Contrariamente al caso de LIÉVANO, GARAVITO sí tenía, como lo expresa él mismo, conocimiento de los resultados de LOBACHÉVSKI, RIEMANN y LIE [GARAVITO **1916**, 223 y sigs.; 353 y sigs.]. Su renuencia a aceptar las nuevas ideas sobre el espacio –fuese no-euclídeo o relativista– tuvo, a nuestro parecer, una muy poca benéfica influencia en el desarrollo científico colombiano en la primera mitad del siglo XX, influencia que retrasó la llegada de nuestra ciencia a la modernidad contemporánea [ALBIS **1984**; MARTÍNEZ-CHAVANZ **1988**], dada la fuerte personalidad de GARAVITO y la posición recalcitrante de sus discípulos y epígonos en la defensa de sus opiniones [ÁLVAREZ LLERAS **1920**]. Por último, mencionar otro intento de los publicados en Colombia en el siglo XIX para demostrar el quinto postulado, el de HERMÓGENES WILSON [**1887-88**]. Este intento y los de LIÉVANO fueron atinadamente revisados en su época por RUPERTO FERREIRA [**1871**; **1887-88**, 173], personaje muy significativo en la historia de la matemática colombiana por su interés, basado en amplios conocimientos de la matemática elemental, en desanimar en el siglo XIX no sólo a los "postuladores" euclídeos sino también a los "trisectores" de ángulos, "duplicadores" de cubos y "cuadradores" de círculos [SÁNCHEZ **1994**].

2. Los *Elements* de Legendre, el postulado Euclídeo y los ensayos de Liévano y Wilson

Es un hecho muy conocido el gran mérito que tuvo ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752-1833) en presentar todos sus escritos de manera elegante y sencilla, lo que explica la popularidad de algunos de sus libros, en especial de sus *Éléments de Géométrie* [**1794**^{1}–**1823**^{12}], con más ediciones después de su muerte, realizadas entre otros por M. A. BLANCHET]. Sus investigaciones –recogidas más tarde en [LEGENDRE **1833**]– sobre el quinto postulado aparecieron como notas en estas numerosas ediciones, lo que contribuyó a que el círculo de personas interesadas en el problema de las paralelas se ampliase a finales del siglo XVIII y principios del XIX. En particular, es muy probable que ejemplares de algunas de estas ediciones circulasen temprana y profusamente en las antiguas colonias hispano-americanas, extendiendo así el círculo a la periferia de los centros de investigación europeos. Por ejemplo, LIÉVANO [**1871**, 21] menciona la "teoría de las paralelas" de LEGENDRE que aparece en la edición francesa de 1809, así como también la de 1843 [*ibidem*, 22]. Además, es muy factible que los *Éléments* fuesen texto, o por lo menos obra de referencia, en el *Colejio Militar*[1], fundado en 1846, en el que LIÉVANO fue alumno de AIMÉ BERGERON, quien aparentemente había egresado de la *École Polytechnique* de París, y miembro de la misión francesa organizadora del *Colejio*. La popularidad y el uso continuado de los *Éléments* en la Iberoamérica del siglo XIX condujo a varias traducciones vernáculas, de las cuales conocemos una colombiana [LEGENDRE **1866**], hecha por LUIS

[1]La historia del Colejio Militar aún está por escribirse.

M. LLERAS, una venezolana [LEGENDRE **1879/90**], revisada por JOSÉ MUÑOZ TEBAR, y dos brasileñas, una de MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARÃES [LEGENDRE **1809**] y la otra de B. ALVES CARNEIRO [LEGENDRE **1886**^{2}]. La primera está basada en la décima edición francesa, pero omite las notas adicionales del autor; la segunda, en la décimoquinta [**1848**^{15}], incluyendo, ésta sí, las notas adicionales, y la cuarta en la vigésimoquinta. De la tercera no sabemos sobre cuál edición francesa está basada. Hace algún tiempo nos preguntábamos si existieron otras traducciones en el continente latinoamericano [ALBIS **1977**; MARTINS **1980**], sin que hasta ahora hayamos podido localizar otras distintas a las que acabamos de señalar. Existe también del siglo XIX una traducción castellana, hecha y publicada en España por ANTONIO GILLEMÁN [**ca. 1847**].

El interés de LIÉVANO en la teoría de las paralelas pudo surgir de su lectura de los *Éléments*, aunque también pudieron influirle sus conversaciones con BERGERON. En uno de sus ensayos sobre el tema [**1871**, 21] menciona que LEGENDRE no logra demostrar que dado un punto interior de un ángulo sea posible trazar por ese punto una recta que corte a ambos lados del ángulo. Esta proposición, equivalente al postulado euclídeo [BONOLA **1955**, 120], se llama hoy el *lema* o *postulado de Legendre*.

En su ambicioso plan de "llenar los vacíos" de la matemática[2], LIÉVANO se propone el de las paralelas [*ibidem*, 5],

> ... *el cual consiste en que todos los sistemas seguidos hasta hoy para establecerla* [la teoría] *tienen una proposición que no siendo evidente, se admite sin demostración, porque los esfuerzos de los eminentes geómetras, desde Euclides para acá, no han alcanzado á vencer esta dificultad. Llenar este vacío, es de grandísima importancia, pues casi toda la Geometría se funda en la teoría de las paralelas... He sido conducido á dos métodos diferentes. El que voy a exponer primero lo considero completamente riguroso, fué el último que inventé y en el desarrollaré toda la teoría.*

Por otra parte, otros textos franceses en boga (o sus traducciones) pudo también examinarlos LIÉVANO, como lo sugiere el hecho de que en [**1871**, 11-12] mencione y analice la "mejor demostración que hasta ahora se había dado del Postulado de Euclídes", la atribuida a LOUIS BERTRAND (1731- 1812) [**1774**], escritor de textos suizo [YSELY **1901**, 87]. La anterior cita es contextualmente similar a la siguiente:

> *Hasta ahora no han podido los matemáticos dar una demostración rigurosa de este célebre postulado de Euclides; pero siendo la menos defectuosa la siguiente, voy á esponerla tal como se encuentra en, el escelente Tratado de Geometría* [**1825**] *escrito por nuestro compatriota el eminente literato y sabio matemático D. Alberto Lista* [y Aragón]

que hace MANUEL MARÍA BARBERY, traductor de las *Lecciones de geometría* de P. L. CIRODDE [**1858**^{1}, **1888**^{14}, **1904**^{24}]. La demostración del quinto postulado que allí aparece es esencialmente la de BERTRAND (*vide infra*). Como el libro de CIRODDE tuvo al parecer difusión en Colombia (aunque no podamos precisar a partir de qué época), no sería descabellado que también le fuese conocido a LIÉVANO en alguna de sus numerosas ediciones españolas. Otro texto, el *Curso de geometría elemental* de A. J. H. VINCENT [**1862**] (traducido del francés), estuvo también muy en boga en nuestro país, pues hemos localizado varias copias en diversos lugares. En él se explica de dos maneras el método de BERTRAND, aunque se añade que [VINCENT **1862**, 25–26]

> ... *la demostración espuesta se apoya en consideraciones delicadas sobre el infinito* [y] *no puede disimularse que admitida la definición de paralelas, dada en el no. 32* [Se llaman paralelas dos rectas que, hallándose en el mismo plano, no se pueden encontrar, por más que se prolonguen en los dos sentidos de su dirección.], *es difícil, por no decir imposible, esponer su teoría sin rozar la noción de infinito.*

LIÉVANO, en su comentario sobre el "método de Bertrand", observa, con razón, que en él se admiten para el infinito propiedades que sólo son "evidentes para la cantidad [finita]". Lo anterior nos hace sospechar que también este texto pudo conocerlo LIÉVANO.

[2] Los vacíos que se propone llenar LIÉVANO son la *teoría de los números inconmensurables*, la *teoría de la proporcionalidad*, la *identidad de las expresiones algebraicas enteras* [polinomios] y la *teoría de las paralelas*, que encuentra insatisfactorias o con deficiencias en sus demostraciones. Esto constituye de suyo un ambicioso plan de *fundamentación de las matemáticas elementales.* Cabe también preguntarse aquí la influencia de BERGERON en este asunto, aunque estos temas eran debatidos profusamente en el mundo científico de la época en libros y artículos.

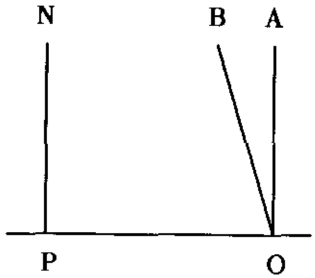


Figura 1

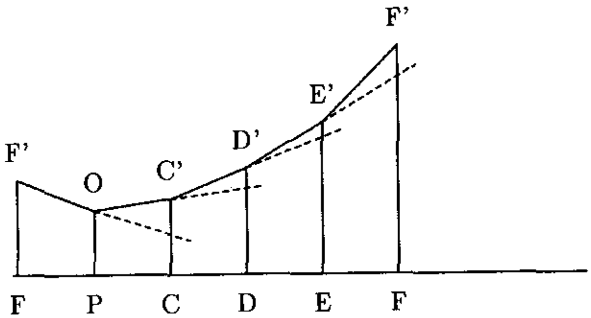
La demostración de Bertrand se basa en un procedimiento de bandas o fajas infinitas propuesto por Antoine Arnaud (1612-1694), el famoso coautor de la *Lógica de Port-Royal.* Para apuntalar nuestra sospecha de que Liévano pudo tener en sus manos los textos de Vincent y Cirodde, trascribimos la versión que da Liévano en [**1871**, 11-12] y sus comentarios:

> *La mejor demostración que hasta ahora se había dado del Postulado de Euclídes, es la de Bertrand de Geneve. Vamos á examinarla. La demostración es la siguiente. Sean (Fig.5)* [Figura 1] *PO la recta, PN la perpendicular y OB la oblícua que forma el ángulo agudo BOP. Levantemos en O la perpendicular OA, esta dejará á la oblicua OB del mismo lado que á PN, formando con ella un ángulo BOA. Las dos paralelas PN y OA determinan una faja que superpuesta en el plano sucesivamente haciéndola girar al rededor de las rectas, cabrá un número ilimitado de veces, tanto de un lado como del otro. El ángulo BOA, por pequeño que sea, superpuesto en el plano sucesivamente, haciéndolo girar al rededor de un lado, no cabrá en el plano (ó en cuatro ángulos rectos) sino un número limitado de veces, y esto se funda en un axioma que he puesto en mi Aritmética* [Liévano **1856**], *á saber, "toda cantidad por pequeña que sea agregada á sí misma sucesivamente puede llegar á dar suma mayor que toda cantidad dada* [principio de Arquimedes]. *Esto admitido, puesto que la semi-faja NPOA cabe en el plano un número ilimitado de veces, el ángulo será mayor que la semi-faja, y entónces si la oblicua OB no cortará a PN, todo el ángulo BOA quedaria contenido dentro de la semi-faja, y seria por consiguiente menor, lo que es contra lo acabado de demostrar, luego la oblicua OB debe cortar á PN.*
>
> *Como se ve, la demostración anterior se funda en que la superficie infinita del ángulo es mayor que la de la semi-faja que también es infinita; y esto lo dedujo Bertrand de que siguiendo un sistema de superposición, el ángulo no cupo en el plano sino un número limitado de veces, ¿y no habrá otro sistema de superposición por el cual la superficie del ángulo quepa en el plano un número ilimitado de veces, como el sistema de la figura 6* [Figura 2] *que con el ángulo α se forman los ángulos exteriores de una línea poligonal...? Esto es lo que seria preciso probar, y me parece muy difícil, por no decir imposible. Admitir esto es admitir que la suma de los ángulos exteriores de un polígono* [cerrado] *cualquiera no puede pasar de cierto límite determinado, y aunque es cierto que es igual a cuatro ángulos rectos, esto se demuestra es después, fundándose en el Postulado de Euclídes. De otro modo- Cuando en virtud del axioma citado se admitió que el ángulo no cabía en cuatro rectos sino un número limitado de veces, se consideró el ángulo como cantidad* [finita], *es decir, bajo el aspecto de la mayor o menor abertura de sus lados, no bajo el aspecto de la superficie encerrada, la cual no es cantidad por ser infinita; y cuando despues admite Bertrand que el ángulo es mayor que la semi-faja, ya no considera el ángulo bajo el aspecto de superficie, y no ha demostrado que bajo este aspecto, el ángulo no cabe en el plano sino un número limitado de veces, ni puede demostrarse, sin admitir para el infinito cierta propiedad que sólo es evidente para la cantidad* [finita]; *y esto es inadmisible al fundar los cimientos de la Geometría.*

Esta versión de la demostración de Bertrand es muy parecida a la segunda demostración propuesta por Vincent (*op. cit.*). Todo lo anterior parece mostrar dos cosas:

(a) que Liévano estaba empapado del problema y sus dificultades hasta donde se lo permitía la información que hubiese recibido de Bergeron y de textos como los de Legendre, Cirodde, Vincent y probablemente del de Lista y Aragón (1775-1848); y
(b) que su propósito era demostrar el postulado euclídeo a partir de los otros postulados de la geometría, es decir, a seguir el primero de los caminos que hemos indicado antes.

En sus *Investigaciones científicas* [**1871**] recoge Liévano, entre otros ensayos, su teoría de las paralelas (en el prólogo de esta obra habla de su "libro de Geometría", del cual no hemos podido saber si fue publicado), que, como hemos dicho, tiene como objeto final la demostración del quinto postulado. De hecho, presenta allí dos métodos de demostración. Examinaremos aquí ambos (en realidad, el primero fue "inventado el 7 de mayo



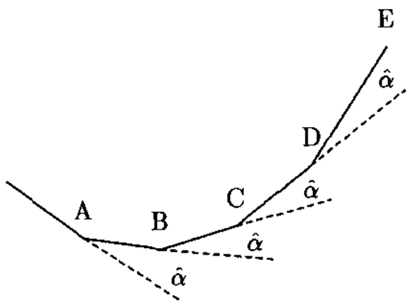


Figura 2

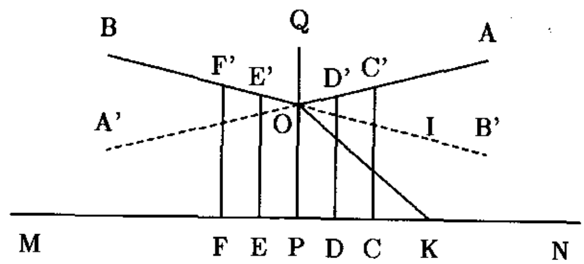


Figura 3

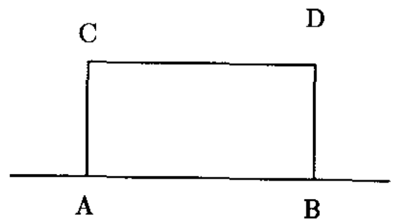


Figura 4

de 1871" y el segundo data de 1856). En el primero comienza por reproducir la definición de paralelas dada por Euclides [**1970**, 704] y por señalar dos resultados, que, como él mismo lo dice, son independientes del quinto postulado:

1) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
2) Para tirar una paralela a una recta dada, por un punto situado fuera de ella, basta tirar por este punto dos perpendiculares, la primera a la recta dada y la segunda a esta perpendicular.

A continuación propone el siguiente

Lema 1. *Tomemos una recta indefinida* (Fig. 1) [Figura 3] *y levantemos una perpendicular PQ, tomemos $PC = PF$ y levantemos perpendiculares en los puntos C y F. En la perpendicular PQ, tomemos una magnitud arbitraria PO y después tomemos $CC' = FF' = PO$ y unamos C' con O y O con F'; digo que la línea $C'OF'$ es una recta, y que además es perpendicular a PO.*

Antes de analizar la demostración que da Liévano al anterior Lema, recordemos los siguientes resultados, independientes del postulado de Euclides, debidos esencialmente a Girolamo Saccheri [**1733**], los que incluimos para rematar más rápidamente el análisis de esta demostración:

(S1). *Si dos segmentos iguales AC y BD son perpendiculares a la recta AB; entonces el segmento CD que une los puntos C, D, forma con AC y con BD ángulos iguales (es decir, el ángulo ACD es igual al ángulo CDB, en la figura 4).*

(S2). *Si el ángulo ACD es recto, entonces el postulado de Euclides es válido.*

Liévano comienza su demostración afirmando que los ángulos POC' y POF' en la Figura 1 son iguales,

> *porque las dos figuras $OPFF'$ y $OPCC'$ son superponibles, pues haciendo girar la primera al rededor de PO como charnela, PF coincidirá con PC y FF' con CC', por ser los ángulos rectos y los lados iguales por construcción...*

Aquí utiliza esencialmente el primer caso de igualdad de triángulos, que como sabemos es independiente del postulado en referencia, en cuya demostración está implícito el *axioma de libre movilidad*, de modo que las figuras de un plano pueden reflejarse al rededor de un eje, rotarse y trasladarse "paralelamente" a sí mismas sin deformación. Continúa de la siguiente manera:

Tomemos ahora el punto D en la mitad de PC y levantemos la perpendicular, la cual, como no puede cortar á ninguna de las dos otras perpendiculares PO, CC', cortará forzosamente la recta $C'O$ en un punto intermedio D'; tomemos lo mismo en el punto medio E de la recta PF y levantemos la perpendicular EE'. Si hacemos girar la figura $D'DPO$ al rededor de $D'D$ como charnela, ella coincidirá con la figura $D'DCC'$, por ser los ángulos en D rectos, $DP = DC$ por construcción y las rectas PO y CC' perpendiculares a MN é iguales por construcción; luego el ángulo $DD'O$ será igual ángulo $DD'C'$ y por consiguiente DD' será perpendicular a $C'O$; luego $C'O$ será paralela a MN, porque ya sabemos que dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí. Lo mismo podemos demostrar de la recta OF', tomando a EE' como charnela, que será perpendicular á EE' y paralela á MN. [Aquí ha construido dos paralelas a MN que pasan por el mismo punto O.] *Todo esto supuesto, si la línea $C'OF'$ no fuera recta, la prolongación de $F'O$ no seria OC', sino que se hallaria dentro del ángulo POF' o dentro del ángulo $C'OQ$. Supongamos primero que esté dentro del ángulo POC' y que sea OB'; entónces la prolongación de $C'O$ será OA' situada dentro del ángulo POF'.*

Tendremos, pues, por el punto O tiradas dos paralelas a MN, á saber, AA' y BB'. Pero el segmento de recta OB' estará más inclinado a cortar el segmento PN, que el otro segmento OA al mismo segmento PN, puesto que OB' está dentro del ángulo POA, y si hacemos girar OA al rededor del punto OA hácia PN hasta que venga a coincidir con alguna recta OK que corte á PN, es claro que en ese movimiento y ántes de llegar á cortar á PN, pasará por la posición de OB'; luego este segmento estará más inclinado á cortar a PN que el otro OA. Ahora tenemos que la semi-faja $NPOB'$ es superponible en la semi-faja $MCC'A'$; luego el segmento $F'B$ estará más inclinado á cortar el segmento FM que el segmento $C'A'$ deja á los segmentos $F'B$ y CM en distintas regiones, u para que $F'B$ estuviera más inclinada á cortar á FM que $C'A'$ á CM, sería preciso que $F'B$ en su prolongación traspasara los límites del segmento OA' cortándolo en algun punto, y como ya tenian el punto O comun, resultarían dos rectas que teniendo dos puntos comunes no se confundían. Luego no se puede suponer que la prolongación de $F'O$ esté situada dentro del ángulo POC'.

En este punto continúa con la demostración del segundo caso, cuando OB' entra en el ángulo $C'OQ$, para llegar nuevamente a una contradicción usando argumentos semejantes a los del primer caso.

El *punto crucial* de la demostración del primer caso es su afirmación de que *$F'B$ estará más inclinado a cortar el segmento FM que el segmento $C'A'$ al CM*, para lo cual se basa en que la semi-faja $NPOB'$ es superponible a la semi-faja $MFF'B$, lo que es equivalente a que el ángulo POL sea igual al $BF'F$ (la superposición se logra reflejando la primera semi-faja en la segunda al rededor de la recta EE', perpendicular a BB' y MN, por construcción). Pero esta afirmación requiere no sólo demostración sino también aclaración de lo que significa "estar más inclinada a cortar que". De hecho, el error de LIÉVANO radica en afirmar que "una inclinación a cortar a la derecha" implica la "misma inclinación a cortar a la izquierda, las que "medidas" en la perpendicular OP, equivaldría a decir que los dos ángulos formados por OP, uno a cada lado, por la recta BB' son iguales. Es decir, cada uno de ellos igual a un recto. Pero (S2), aplicado en el cuadrilátero $PFF'O$, nos diría entonces que estamos en el postulado euclídeo, precisamente lo que quería demostrar.

Aquí, en nuestra opinión, estuvo muy cerca LIÉVANO de iniciar una teoría de las paralelas *à la* GAUSS (compárese con la traducción de los manuscritos de GAUSS que aparece en [ALBIS **1983**]). En efecto, en sus manos tenía la "construcción de dos paralelas a una recta por un punto fuera de ella", en el sentido de EUCLIDES, lo que, con su concepto, impreciso, es cierto, de inclinación a cortar, pueden considerarse como los ingredientes necesarios para definir paralelismo a la izquierda y paralelismo a la derecha, y demostrar que estas nociones no dependen de los puntos que se tomen en las rectas en consideración.

Nos ocuparemos ahora brevemente de su segunda demostración, la cual basa en el siguiente Lema:

[Lema]. *Por todo punto K (Fig. 11)* [Figura 5] *tomado en el interior de una faja determinada por dos rectas perpendiculares AB, CD, á una tercera EF, se puede tirar siempre una recta que corte a ambas perpendiculares.*

Sin embargo, no es difícil demostrar que este lema es equivalente al llamado *postulado de* PROCLO:

> *Si una recta interseca una de dos paralelas, también interseca a la otra,*

el que a su vez es equivalente al postulado de Euclides [BONOLA, **1955**, 119].

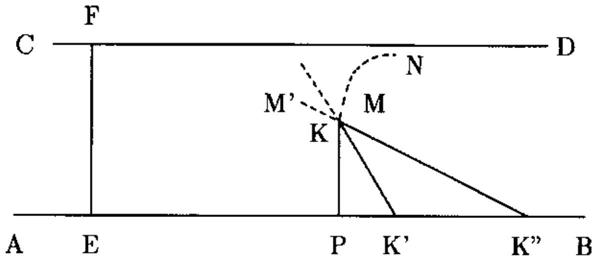


Figura 5

LIÉVANO [**1899**] vuelve a publicar esencialmente estos trabajos en los *Anales de Ingeniería.* Es importante anotar que ellos no fueron aceptados por algunos de sus contemporáneos. Por ejemplo, RUPERTO FERREIRA muestra su desacuerdo los números del "El Tradicionista" de los días 21 y 28 de 1871. LIÉVANO contestó desde las columnas del "El Bien Público". Estas respuestas fueron publicadas posteriormente en 1875, con el título de "Apéndice a las Investigaciones Científicas".

Para terminar esta sección queremos mencionar la propuesta de demostración del postulado euclídeo publicada por HERMÓGENES WILSON en en el primer volumen de los *Anales de Ingeniería* [WILSON, **1887-88**, 171-172].

En la Figura 6, tomemos $AX \perp AB$, BZ oblicua y el ángulo ABZ agudo. Construyamos $BC = CD = DE = \cdots$ y C', DD', EE', $\cdots \perp AX$ y $O'''C \perp AB$, $O''C \perp C'C$, $EO' \perp DD'$, $FO \perp EE'$, etc. Hechas estas construcciones, WILSON "demuestra" que $K = O'''B = O''C = O'D = \cdots$ etc, con lo cual obtiene

$$\begin{aligned} AB &= C'C + K = (D'D + K) + K \\ &= D'D + 2K = D'D + 3K = \cdots, \end{aligned} \qquad (*)$$

es decir, los segmentos $AB, CC', DD', EE', \cdots$ están en progresión aritmética decreciente, lo que finalmente implicará que BZ cortará a AX. En el mismo número de los *Anales* FERREIRA [**1887-88**, 173] dice que el anterior argumento le parece equivalente al postulado eucídeo, pues usa que los ángulos ABC y $C'CD$ son iguales (correspondientes entre paralelas). Por otra parte, un colaborador anónimo de la *Rebista Militar* [ANÓNIMO **1887**] le hace observaciones semejantes a las de FERREIRA, pues considera, entre otras cosas, que WILSON no demuestra la igualdad de los triángulos rectángulos CBO''', DCO'', etc. A este último, WILSON replica en la *Revista Militar* [**1887**]. Lo interesante del argumento de WILSON es su semejanza con uno dado por NASÎR-EDDÎN, en su libro *Euclidis elementorum libri XII studii*

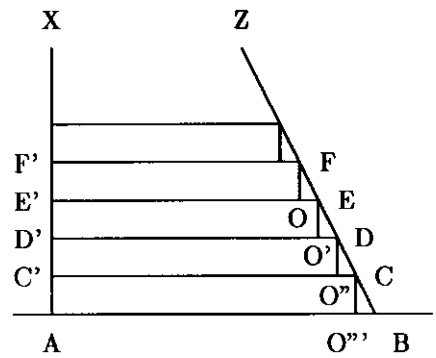


Figura 6

Nassireddini (Roma, 1594), escrito en árabe y nunca traducido a otro idioma distinto del latín. En efecto, NASÎR-EDDÎN demuestra (*) que si el ángulo ABZ es agudo, entonces $AB > CC' > DD' > \cdots$ [BONOLA **1955**, 10-11; AL-DAFFA & STROYLS **1984**].

3. Los ensayos de Julio Garavito

Creemos necesario bosquejar, en primer lugar, el panorama de las geometrías no euclídeas, en la época en que escribió GARAVITO sus dos memorias: *Nota sobre la fórmula fundamental de la trigonometría plana no euclídea* [GARAVITO **1916**, 224–234; 353- - 362; 465–469] y *¿Bancarrota de la ciencia?* [GARAVITO **1917**, 101–107; 203–215], ambas publicadas en los *Anales de Ingeniería* y, posteriormente, reproducidas por ÁLVAREZ LLERAS (con otros trabajos que ya había publicado GARAVITO) en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* La razón de este bosquejo es precisar el conocimiento que poseía este autor sobre estos temas y poder así analizar cabalmente los propósitos que perseguía al escribir estas memorias.

En primer lugar, mencionemos que F. A. TAURINUS, partiendo de la fórmula fundamental de la trigonometría esférica

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \operatorname{sen}\frac{b}{k}\operatorname{sen}\frac{c}{k}\cos A \qquad \text{(A)}$$

(en donde a, b, c son los lados de un triángulo esférico, de ángulos opuestos respectivos A, B, C, y k es el radio de la esfera), obtuvo la la relación

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos A \qquad \text{(B)}$$

al sustituir k por $\imath k$, $\imath = \sqrt{-1}$. Un poco más tarde, F. MINDING [**1839**], estudió sistemáticamente las *superficies de curvatura constante negativa*, insinuando así mismo el siguiente resultado:

> *Si en las fórmulas de la trigonometría esférica se mantienen fijos los ángulos y los lados se multiplican por $\imath = \sqrt{-1}$, entonces se obtienen las ecuaciones satisfechas por los elementos de los triángulos geodésicos de las superficies de curvatura negativa*

Este resultado fue demostrado por D. CODAZZI [**1857**]. El punto culminante lo alcanza E. BELTRAMI [**1868**] cuando produce explícitamente, y esencialmente por el mismo procedimiento que TAURINUS, una superficie de curvatura constante negativa, inmersa en el espacio euclídeo tridimensional, y en la cual, al reemplazar recta por geodésica, logra una *interpretación* de la geometría desarrollada por I. N. LOBACHÉVSKI [**1829-1830**, **1840**], con lo que reducía la consistencia de esta geometría a la de la euclídea. Recordemos que el desarrollo por LOBACHÉVSKI se apoya en postular la existencia de dos paralelas por un punto exterior a una recta dada; a partir de esto y razonando impecablemente, logra establecer la relación (B) y observa, por ejemplo, al final del libro *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien* [**1840**] que si en ella se sustituye k por $\imath k$, obtienen la relación (A). Este pequeño opúsculo encontró pronta difusión entre los lectores de lengua francesa, gracias a la traducción hecha por J. HOÜEL [LOBACHÉVSKI **1886**]. Dada la fuerte influencia francesa en los programas y textos usados en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional en Bogotá, podría pensarse que una copia de esta traducción hubiese llegado a esta institución. Sin embargo, la categórica afirmación de GARAVITOde desconocer los originales del geómetra ruso [GARAVITO **1916**, 223], más el hecho de no haber podido localizar en los fondos más antiguos del Departamento de Bibliotecas de la Universidad Nacional, nos conducen a concluir que los resultados de LOBACHÉVSKI, GAUSS y BOLYAI se conocieron en el país por fuentes secundarias.

En efecto, H. POINCARÉ, entre otros, se había encargado ya de divulgar extensamente las geometrías no euclídeas, las de RIEMANN incluidas, a finales del siglo pasado. Esto lo hizo especialmente en su libro *La ciencia y la hipótesis* [(**1902**) **1943**], del cual existen tempranas traducciones en castellano como las de EMILIO GONZÁLEZ LLANA en la primera década del siglo XX, las cuales circularon en Colombia por la misma época[3]. En este libro aparece una descripción de su famoso modelo de la geometría de LOBACHÉVSKI, construido usando familiares figuras y conceptos de la geometría euclídea.

Además, el *Traité de géometrie* de ROUCHÉ y CH. DE COMBEROUSSE [**1878-79**, **1891**], texto recomendado entonces en la Facultad Nacional de Matemáticas e Ingeniería, traía en su Nota II, tomo II, una "exposición" de los resultados de LOBACHÉVSKI, con una, como veremos, deducción insatisfactoria, ciertamente, de la que llamaremos luego *fórmula fundamental de la trigonometría hiperbólica*. Lo insatisfactorio de esta deducción hizo posiblemente que esta Nota II fuese reescrita por POINCARÉ en ediciones posteriores de este libro [**1912**], en su momento muy en boga entre los profesores de geometría.

Hechos estos comentarios preliminares, es suficiente leer cuidadosamente los dos trabajos de GARAVITO, en especial los numerales 8 y 9 de [GARAVITO **1916**] y las páginas 204 y 206 de [GARAVITO **1917**], para convencerse que GARAVITO estaba *enterado* de los resultados que hemos mencionado antes y que, más aún, mucho de lo que allí escribe lo entresacó del citado libro de POINCARÉ. Por otra parte, él aceptaba estos resultado como parte de la información en su poder; si no, que lo digan los siguientes apartes:

> *Las fórmulas que Lobatchewsky presentó como correspondientes a la geometría plana no euclídea son las que resultan de la trigonometría esférica cuando se supone imaginario el radio de la esfera* [GARAVITO **1916**, 223].

> *La consecuencia útil que se deduce de los estudios de* SOPHUS LIE *es la de que es posible hacer una geometría esférica de dos dimensiones, tomando como punto de partida el postulado de Riemann; así como también es posible hacer una geometría de dos dimensiones sobre el postulado de Lobatchewsky, en donde el plano ha sido sustituido por una esfera imaginaria y la recta por un círculo máximo de tal esfera.*[GARAVITO *ib*, 354]

> *... pues si se supone que en lugar de una paralela se pueden trazar dos y que hay una región de incompatibilidad (postulado de Lobatchewsky), se llega a la deducción de que las rectas son círculos máximos de una esfera imaginaria; y si al contrario se supone que no es posible la incompatibilidad (postulado de Riemann) se llega a la deducción de que las rectas son círculos máximos de esfera real.*[*ib.*, 356]

[3]Uno de estos ejemplares, en mi poder, perteneció a la excelente biblioteca de mi abuelo D. Samuel González Tapia, en Sincelejo, y fue comprado a la Librería de Camacho y Roldán, en Bogotá.

Por esta razón, la pretensión de J. ÁLVAREZ LLERAS **[1920]** de ser GARAVITO el que "antes que nadie [trató] de estas cuestiones", es decir, sustituir k por $\imath k$ en la relación (A) para obtener la (B), es inadmisible, tal como lo expresa DUARTE **[1946]**. Esta sustitución la utiliza GARAVITO dos veces: en [GARAVITO **1916**, 468] y en [GARAVITO **1917**, 211].

Para seguir a GARAVITO en sus razonamientos es indispensable conocer la noción de *uniformidad recíproca*, la cual usa, como veremos, incorrectamente y repetidamente en ambas memorias.

Sean, pues, $u(z)$ y $v(z)$ dos funciones uniformes de una variable z, real o imaginaria. Decimos que $u(z)$ y $v(z)$ son *uniformemente recíprocas* (la una de la otra) si a cada valor de $u(z)$ corresponde un único valor de $v(z)$, y recíprocamente. O sea, la uniformidad recíproca entre $u(z)$ y $v(z)$ existe si hay una biyección ϕ del codominio de u, tal que $\phi(v(z)) = u(z)$, para todo z en el dominio común de u y v. Es claro que de acuerdo con esta definición si tomamos $u(z) = \text{th}(z/k)$, en donde $k \neq 0$ es una constante arbitraria y $v(z) = z$, en el dominio común $-\infty < z < \infty$, entonces $u(z)$ y $v(z)$ son uniformemente recíprocas tomando $\phi = u$, por ser ésta una biyección de $-\infty < z < \infty$ (codominio de v) en $(-1, 1)$ (codominio de u). Observemos que ϕ *no es una función algebraica.*

Cada vez que GARAVITO cree haber establecido la uniformidad recíproca entre dos funciones uniformes u y v, concluye la existencia de constantes A, B, C, D que cumplen

$$Auv + Bu + Cv + D = 0, \tag{1}$$

o si se quiere,

$$u = \frac{Cv + D}{Av + B} = \phi(v), \tag{1'}$$

en donde $\phi(t) = (Ct + D/(at + B)$ es una función algebraica. Pero, como hemos visto en el ejemplo anterior, esto no es siempre posible, pues ϕ bien puede ser una función trascendente y como es *única* –dada la uniformidad de las funciones u y v– el uso que hace GARAVITO varias veces de (1) es incorrecto. Lo que sí es posible afirmar es lo siguiente: *si de antemano sabemos que la relación entre $u(z)$ y $v(z)$, dada por ϕ, es algebraica, entonces la relación* (1') *subsiste entre u y v* [DARBOUX **1917**, Parte 2, 35–43].

La fórmula fundamental de la trigonometría hiperbólica está dada por

$$\text{th}\left(\frac{z}{k}\right) = \frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\Delta}, \quad -\Delta < \theta < \Delta, \tag{2}$$

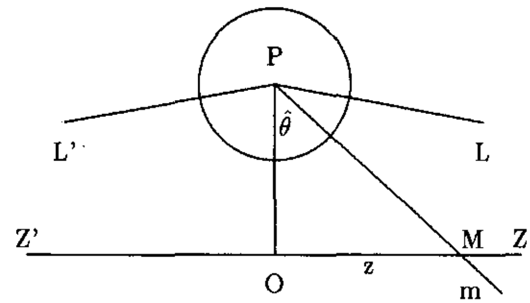


Figura 7

en donde (veáse la Figura 7) $z = OM$, $\theta = O\hat{P}M$, Δ es el *ángulo de paralelismo* en la geometría de LOBACHÉVSKI y k es la constante que pareció enloquecer a GARAVITO. Es claro que la representación hecha en la Figura 7 es sólo simbólica, en el sentido que usamos algunos *trazos euclídeos* para representar rectas no euclídeas.

Como bien lo indica GARAVITO, la deducción de (2) hecha en [ROUCHÉ & COMBEROUSSE **1891**, 585-587] es insatisfactoria. En razón de la completez y la importancia que tienen en GARAVITO, transcribimos los razonamientos que allí aparecen: si en (1) tomamos $u(z) = \text{th}(z/k)$ y $v(z) = z$ que, como hemos visto, son uniforme recíprocas, referidas al dominio común $-\infty < z < \infty$, y observamos que $\text{th}(z/k) = 0$ cuando $z = 0$, obtenemos $D = 0$. Es decir,

$$Az \cdot \text{th}\left(\frac{z}{k}\right) + B\text{th}\left(\frac{z}{k}\right) + Cz = 0. \tag{3}$$

Ahora bien, si en (3) sustituimos z por $-z$, tenemos

$$Az \cdot \text{th}\left(\frac{z}{k}\right) - B\text{th}\left(\frac{z}{k}\right) - Cz = 0, \tag{4}$$

de modo que, sumando (3) y (4) miembro a miembro, resulta $Az \cdot \text{th}(z/k) = 0$, y, por lo tanto, $A = 0$. Luego

$$\text{th}\left(\frac{z}{k}\right) = C_1 z, \qquad C_1 = -\frac{C}{B}. \tag{α}$$

Es claro que (α) es "inadmisible". En la misma forma, usando nuevamente (1), se muestra que

$$\text{tg}(\theta(z)) = C_2 z. \tag{β}$$

De (α) y (β) resulta entonces (2). Naturalmente, la deducción así hecha es incorrecta, pero en modo alguno "pone de manifiesto la falsedad" de (2), como lo afirma GARAVITO [**1916**, 234] en un imperdonable *error de* *juicio*, pues lo equivocado de su demostración no implica necesariamente la falsedad de una proposición. Pero éste no es el único error que comete GARAVITO en *dos renglones consecutivos* ("La relación (β) es correcta" [GARAVITO 1916, 234]). En efecto, refiriéndonos siempre a la Figura 7, en la geometría de LOBACHÉVSKI sucede que $\theta(z) \to M$ si $z \to \infty$, y recíprocamente. Es claro que en estas condiciones (β) no subsiste, pero sí subsiste en la geometría euclídea. Como suponemos que está trabajando con las hipótesis de LOBACHÉVSKI con el fin de, a partir de ellas, "demostrar rigurosamente la falsedad de la fórmula (2) que sirve de fundamento a la trigonometría plana no euclídea" [GARAVITO **1916**, 224], comienza a ponerse en evidencia la manera confusa con que GARAVITO maneja estos asuntos.

Otro argumento que aduce GARAVITO en favor de la falsedad de (2), es que no existe una uniformidad recíproca entre $u(z) = \mathrm{tg}(\theta(z))$ y $v(z) = \mathrm{th}(z/k)$, refiriéndonos al dominio común $-\infty < z < \infty$. Pero esto tampoco es cierto. En efecto, ya hemos observado que en la geometría de LOBACHÉVSKI la relación que liga z con el ángulo $\theta(z)$ no es del tipo (β) (nos seguimos refiriendo a la Figura 7). Sin embargo, es claro y además independiente del postulado euclídeo, que por cada punto M de $L'OL$ podemos trazar una recta PM y una sola. Cada una de ellas determina un único ángulo $O\hat{P}M = \theta(z)$, en donde z es la *distancia* de O a M. En la geometría de LOBACHÉVSKI, $\theta(z)$ cumple la condición $-\Delta < \theta(z) < \Delta$, lo cual establece una biyección θ de $(-\infty, \infty)$ sobre $(-\Delta, \Delta)$. Como $0 < \Delta < \pi/2$, es claro que $\mathrm{tg}(\theta(z)) = u(z)$ es una biyección de $(-\infty, \infty)$ sobre $(-\mathrm{tg}\Delta, \mathrm{tg}\Delta)$. Por otra parte, $v(z) = \mathrm{th}(z/k)$ es una biyección de $(-\infty, \infty)$ sobre $(-1, 1)$. Luego, tomando $\phi = v \circ u^{-1}$, vemos que efectivamente u y v son uniformemente recíprocas. Para obtener (2) basta tomar ahora $\phi' = (\mathrm{tg}\Delta)\phi$ en vez de ϕ.

Lo anterior invalida, pues, la siguiente afirmación de GARAVITO:

> *... no es posible, dado el significado de z, establecer la uniformidad recíproca y perfecta entre* tg θ *y* th(z/k) *que se requiere para la validez de la fórmula (2).* [GARAVITO 1916, 232]

Lo que es interesante es que, más tarde, tomando como dominio común todo el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, GARAVITO establece muy ingeniosamente la uniformidad recíproca entre u y v, usando nuevamente (1) [GARAVITO **1917**, 212-213], pero parece no percatarse que, una vez establecida para $\mathbb{C}$, la relación continúa siendo válida para todo subdominio común de u y v, en

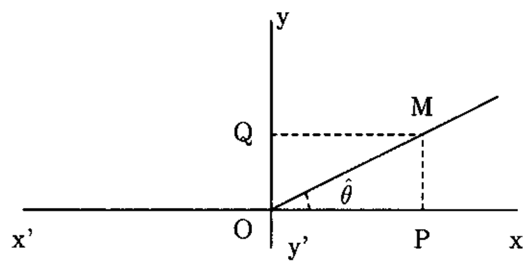


Figura 8

particular para $(-\infty, \infty)$. O sea, él mismo se encarga de invalidar su propia afirmación anterior.

Algo parecido le sucede cuando primero hace notar

> *... una vez por todas, que no pretendemos demostrar el postulado de Euclides* [GARAVITO **1916**, 355]

y sin embargo lo demuestra sin percatarse de ello. En efecto, en el numeral 10 de [GARAVITO **1916**], después de algunas consideraciones sobre los sistemas de coordenadas, llega a mirar la siguiente situación: Sean O un punto del plano y OP y OQ dos rectas perpendiculares entre sí que pasan por O.

Sea M un punto del plano [distinto de O], y consideremos las perpendiculares MP y MQ, trazadas desde M, a OP y OQ, respectivamente. Estas construcciones, como él mismo lo indica son independientes del postulado de Euclides. Hagamos ahora $OP = x_1$, $OQ = y_1$, $MQ = x$, $MP = y$, y llamemos θ al ángulo $M\hat{O}P$. Dice entonces GARAVITO que si $x = x_1$ y $y = y_1$, estamos en la hipótesis euclídea, pero aun no estando en ella, tenemos dos sistemas de valores, (x, y), (x_1, y_1), para definir la posición del punto M. Y añade:

> *Estas coordenadas serán funciones de r y θ y las relaciones*
> $$\frac{x_1}{r}, \quad \frac{y_1}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \tag{5}$$
> *serán solamente funciones de θ.* [GARAVITO **1916**, 360]

Esta última afirmación requiere demostración, pues no es del todo evidente. Es más, partiendo de ella, GARAVITO demuestra que $x = x_1$ y $y = y_1$, que, como ya ha observado, es el postulado euclídeo de las paralelas. Como según él, todo lo que ha hecho es independiente de este postulado, tiene ante sí *una demostración del postulado en cuestión*. Pero lo que ha hecho no es independiente de este postulado, pues decir que las relaciones (5) son independientes de θ es equivalente a este postulado, como lo hemos probado en [ALBIS & MORENO, **1976**].

No nos debe extrañar, pues, que cuando quiere hacer los mismos razonamientos sobre la esfera [GARAVITO **1916**, 465–466] encuentre que las relaciones (5) *serían las fórmulas de la trigonometría plana elíptica*, lo cual no es cierto: lo que ha sucedido, sin él percatarse, es que *ha razonado sobre el plano euclídeo creyendo hacerlo sobre la esfera.* Sin embargo, echa toda la culpa al mal empleo de la fórmula (1), cuando ya hemos visto que es él quien siempre la aplica mal, para "deducir de ella todo lo que se quiera". [GARAVITO **1916**, 466]

El uso subrepticio del postulado de Euclides no lo hace únicamente en el caso anterior. En efecto al afirmar que a cada

> *... valor de tg θ, se hallarán dos series (A) de arcos los cuales determinan una recta única PM la cual cortará a L'OL* [Figura 5] *en un punto único M a distancia finita $z = OM$* [GARAVITO 1917, 208],

no está haciendo otra cosa que enunciar el postulado euclídeo de las paralelas. Naturalmente, al aplicar nuevamente (1), encuentra

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{z}{b} ,$$

la fórmula fundamental de la geometría euclídea. Es decir, *no ha hecho nada.*

Las siguientes frases de GARAVITO resumen en buena parte lo que ha querido hacer en estas dos memorias:

> *Grande ha debido ser la sorpresa de Lobatchewsky al hallarse, cuando menos lo esperaba, frente a frente con el postulado de Euclides. ¿Por qué motivo no había hallado antes contradicción alguna en sus raciocinios impecables al suponer falsa la propiedad euclídea de las rectas? La respuesta es clara: no había razonado con rectas situadas en un plano sino sobre otra clase de líneas y superficies.*[GARAVITO 1917, 209]

En efecto, en este diciente parráfo acepta, por un lado, que LOBACHÉVSKI no podía llegar a contradicciones pues no razonaba "con rectas en un plano sino sobre otra clase de líneas y superficies (recordemos que ya hemos anotado que GARAVITO conocía la interpretación de la geometría de RIEMANN sobre la esfera real y la de LOBACHÉVSKI sobre la esfera de radio imaginario o una superficie de curvatura constante negativa). En esto todos concordamos. Pero al mismo tiempo pretende que LOBACHÉVSKI llegue a las mismas conclusiones que él: al postulado de Euclides. Esto último no era posible para LOBACHÉVSKI, pero sí para GARAVITO, pues cada vez que intenta mostrar que no podemos llegar a (2) usando rectas en un plano introduce en una u otra forma el postulado de Euclides (o algo que le es equivalente) como lo hemos mostrado aquí y ya lo había hecho antes DUARTE [**1946**].

Bibliografía

1. Albis González, Víctor S. & Soriano Lleras, Luis I., *The Work of Indalecio Liévano in the Foundations of the Real Number System*, Historia Mathematica **3** (1977), 161–166.
2. Albis González, Víctor S. & Moreno Armella, Luis, *Una hipótesis equivalente al postulado euclídeo de las paralelas*, Boletín de Matemáticas (Bogotá) **10** (1976), 78–85.
3. Albis González, Víctor S., *Latin-American translations of Legendre's "Éléments de Géométrie"*, Historia Mathematica **4** (1977), 339–340.
4. Albis González, Víctor S. & R. Álvarez, *Los trabajos de Gauss sobre la teoría de las paralelas*, In: Víctor S. Albis (ed.), *A C. F. Gauss* (1983), Universidad Nacional de Colombia (Departamento de Matemáticas y Estadística), Bogotá.
5. Albis González, Víctor S., *Un programa de investigación en la historia de un país latinoamericano*, Quipu: Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología **1** (1984), 391-400.
6. Al-Daffa, Ali A. & John J. Stroyls, *Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam*, University of Petroleum and Minerals & John Wiley & Sons, Dahran/New York, 1984.
7. Anónimo, *El postulado de Euclides*, Revista Militar (1887), 67.
8. Álvarez Lleras, Jorge, *Julio Garavito Armero. Ensayo biográfico y literario*, Anales de Ingeniería **27** (1920), 362–420.
9. Aristóteles, *Obras*, traducción del griego estudio preliminar, preámbulos y notas por Francisco de P. Samaranch, Aguilar, Madrid, 1964.
10. Beltrami, E., *Sagio di interpretazione della geometria no euclidea*, Giornale de Matematiche **6** (1868), 284–312.
11. Bertran de Ginebra (Louis Bertrand), *Developpment nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, 1774.
12. Bonola, Roberto, *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*, Dover Publications, New York, 1955.
13. Cirodde, P. L., *Lecciones de geometría*, traducción de Manuel María Barbery. 24a. tirada, A. & Roger & F. Chernoviz, París, 1858^1, 1888^{14}, 1904^{24}.
14. Codazzi, D., *Intorno alle superficie, le quali hanno constante il prodotto de due raggi di curvatura*, Ann. Scienze Mat. Fis. **8** (1857), 346–355.
15. Darboux, G., *Principes de géometrie analytique*, Paris.
16. Dehn, Max, *Die Lengendre'sche Sätze über die Winkelsumme in Dreiecke*, Math Annalen **53** (1900), 405–439.
17. Duarte, F. J., *Sobre las geometrías no euclidianas. Notas históricas y bibliográficas*, Revista Acad. Colombiana Ci. Ex. Fi. Nat. (1946), 63–80.

18. Al-Daffa, Ali A. & Stroyls John J., *Nasir al-Din al Tusi's attempt to prove the parallel postulate of Euclid*, In: Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam (1984), J. Wiley, New York.
19. Escobar Larrazábal, M., *Julio Garavito A.*, Anales de Ingeniería **35**, 279–285.
20. Euclides, *Elementos de geometría. IN: Francisco Vera (editor y traductor), Científicos griegos, Vol. I*, Aguilar, Madrid, 1970.
21. Ferreira, Ruperto, *Reseña de las "Investigaciones Científicas" de Indalecio Liévano*, El Tradicionista, 21 y 28 de noviembre (1871).
22. Ferreira, Ruperto, *El postulado de Euclides*, Anales de Ingeniería **1** (1887-88), 172-173.
23. Garavito A., Julio, *Nota sobre la fórmula de la trigonometría plana no euclídea en la geometría hiperbólica*, Anales de Ingeniería **24** (1916), 222–234; 353–362; 465- 469.
24. Garavito A., Julio, *¿Bancarrota de la ciencia?*, Anales de Ingeniería **25** (1917), 101– 107;203–215.
25. Gray, Jeremy, *Ideas of Space. Euclidean, non-Euclidean, and Relativistic*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
26. Gray, Jeremy, *Non-Euclidean Geometry. A Reinterpretation*, Hist. Math. **6** (1979), 236–258.
27. Isely, L., *Histoire des mathématiques dans la Suisse Française*, Neuchâtel, 1901.
28. Legendre, Adrien Marie, *Éléments de Géométrie*, Paris, 1794[1] –1823[12].
29. Legendre, Adrien Marie, *Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie de parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*, Mémoires, T. XIII, Academie de Sciences de Paris, 1833.
30. Legendre, Adrien Marie, *Elementos de Geometria*, Impressão Regia, Rio de Janeiro, 1809.
31. Legendre, Adrien Marie, *Tratado de Geometría*, traducción de Antonio Gillemán, Madrid, 1849.
32. Legendre, Adrien Marie, *Elementos de Jeometría*, Traducidos de la décima edición de París por Luis M. Lleras, Imprenta de Gaitán, Bogotá, 1866.
33. Legendre, Adrien Marie, *Elementos de Geometría*, Traducidos de la décima quinta edición por Jesús Muñoz Tebar, Alfred Rothe, Caracas, 1879.
34. Legendre, Adrien Marie, *Elementos de Geometria*, Traduzidos sôbre a 25a. edição de M. A. Blanchet, por B. Alves Carneiro. 2a. edição, Garnier, Rio de Janeiro, 1886[2].
35. Lie, S., *Über die Grundlagen der Geometrie*, Leipziger Berichte, 1890.
36. Liévano, Indalecio, *Investigaciones científicas*, Foción Mantilla, Bogotá, 1871.
37. Liévano, Indalecio, El Bien Público (1871), Bogotá.
38. Liévano, Indalecio, *Apéndice a las Investigaciones científicas*, Foción Mantilla, Bogotá, 1875.
39. Liévano, Indalecio, *Teoría de las paralelas para demostrar el Postulado de Euclides*, Anales de Ingeniería **11** (1899), 158–167.
40. Lista y Aragón, Alberto, *Elementos de matemáticas puras y mixtas*, Tomo III, Geometría y trigonometría, 2a. edición, Madrid, 1825.
41. Lobachéski, N. I., *Sobre los principios de la geometría* [en ruso], Bull. Kasan Univ. (1829–1830).
42. Lobachéski, N. I., *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*, Existe versión inglesa, incluida en Bonola [9], Berlín, 1840.
43. Lobachéski, N. I., *Études géométriques sur la theórie des parallèles*, Traducción del alemán por J. Hoüel, Gauthiers Villars, París, 1866.
44. Martínez-Chavanz, R. (1990).
45. Martins, Roberto de A., *Comunicación personal sobre la existencia de [smc Legendre 1886]*.
46. Proclo de Licia, *Comentarios sobre el primer libro de Euclides (fragmentos). IN: Francisco Vera (editor y traductor), Científicos griegos, Vol. I*, Aguilar, Madrid, 1970.
47. Rojas Garrido, José María, El Tiempo No. **502** (1871).
48. Rouché, Eugéne & de Comberousse, Charles, *Tratado de geometría elemental*, traducción de A. & J. Portuondo, Madrid, 1878-79.
49. Rouché, Eugéne & de Comberousse, Charles, *Traité de géometrie*, Paris, 1891.
50. Rouché, Eugéne & de Comberousse, Charles, *Traité de géometrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
51. Saccherio, Hieronymo (Saccheri, Girolamo), *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus prima ipsa universae Geometriae Principia*, Edición latina con traducción inglesa de G. B. Haslted. New York: Chelsea, 1986, Ex Typographia Pauli Antonii Montani, Mediolani (Milán), 1733.
52. Sánchez Botero, Clara Helena, *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*, Epistemología, Historia y Didáctica de la Matemática, No. 7, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá, 1994.
53. Taurinus, Franz Adolf, *Geometriae Prima Elementa*, Colonia, 1826.
54. Toth, I., *Das Parallelenproblem in Corpus Aristotelicus*, Arch. Hist. Exact Sci. **3** (1969), 249–422.
55. Toth, I., *Non-Euclidean Geometry before Euclid*, Sci. Amer. (1969).
56. Toth, I, *La revolution non-éuclidienne*, La Recherche **75** (Feb 1977), 143–151.
57. Vincent, A. J. H., *Curso de geometría elemental*, Traducido de la última edición francesa por Lope Gisbert, Librería de D. M. Alonso, Madrid, 1862.
58. Wilson, Hermógenes, *El postulado de Euclides*, Anales de Ingeniería 1 (1887-88), 171–172.
59. Wilson, Hermógenes, *Carta al Director*, Revista Militar **I** (**12**, diciembre) (1887), 115-117.