

LOS ESPEJISMOS DEL ASFALTO ¹

por

Joaquín Pelkowski*

Resumen

Pelkowski, J. Los espejismos del asfalto . Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21**(80): 261-269, 1997. ISSN 0370-3908.

La intención de este ensayo es ilustrar el alcance de un principio variacional en meteorología. Se resuelve, a manera de ejercicio, un problema clásico de la óptica meteorológica, cuya solución cualitativa es fácil de encontrar en muchos libros de texto, tanto físicos como meteorológicos, pero cuya solución cuantitativa no parece merecer un tratamiento matemático explícito en dichos textos. Sin embargo, el problema es susceptible de una solución completa. Presentarla, es el objetivo del ensayo.

Palabras claves: Principio de Fermat, espejismos, meteorología óptica

Abstract

A meteorological illustration of what a variational principle achieves is offered in this essay by solving afresh an old problem in atmospheric optics. Its qualitative solution may be found in many modern accounts, whereas its quantitative solution, seemingly not so widespread, is likely to be found only in older treatises. A derivation of Snell's law of refraction for a medium with continuously varying density is believed to be original. At least it is hoped that the whole treatment shall have some didactic value.

Key words: Fermat's principle, mirages, meteorological optics

Introducción y apuntes históricos

Los espejismos son fenómenos ópticos que se producen cuando la densidad del aire cerca de la superficie terrestre es notablemente alterada por efecto de un fuerte calentamiento o enfriamiento. Los llamados espejismos inferiores son comunes en tierras calientes. Todos hemos visto

“charco” en las carreteras de asfalto caldeadas por un sol inclemente, charcos que no dejan de alejarse a medida que avanzamos hacia ellos. Ofrecer una explicación didáctica de este fenómeno es lo que me propongo en esta breve exposición. Es fácil encontrar la explicación cualitativa en

* Profesor Asociado - Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia.

¹ Trabajo realizado dentro del marco del Grupo de Investigaciones en Meteorología-U.N., con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y el BID. Contrato COLCIENCIAS-Universidad Nacional de Colombia, 539/96.

los manuales de meteorología y física (véase p. ej. Feynman et al., 1963). Mucho más difícil resulta encontrar alguna exposición rigurosa, que presente la solución matemática del problema. Las habrá, especialmente en la literatura especializada del siglo pasado y del presente. En lugar de localizar los documentos pertinentes, me parece ser un ejercicio instructivo el buscar una solución propia, basada en el principio de Fermat e inspirada en la lectura de una introducción a los fenómenos ópticos de dos autores franceses (Léna & Blanchard, 1990).

El valor didáctico de esta exposición reside en la ilustración de cómo conseguir la solución completa de un problema meteorológico, a partir de lo que en física se conoce como un principio variacional. Conseguir una solución analítica es muy raro en una ciencia, por más milenaria que sea, ciencia que trata de explicar todo lo que ocurre en nuestra atmósfera, y que los presocráticos dieron en llamar meteorología, como nos informa Aristóteles, autor del primer tratado coherente que se conozca sobre fenómenos atmosféricos (Aristóteles, 1996), particularmente aquellos en los que intervienen los fenómenos de la reflexión y refracción, siendo ésta la causa de ese curioso fenómeno que, en determinadas circunstancias, nos convierte la arena o el asfalto en un espejo.

La óptica geométrica es una de las ramas más antiguas de la física. Como teoría de la propagación e inflexión de un rayo de luz tiene su origen en el mundo helénico. La ley de la reflexión (ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión) se encuentra expuesta por Euclides (hacia 300 a.C.), en su tratado de óptica. Herón de Alejandría (h. 100 a. C.) expresó la ley como un principio variacional, al descubrir que el trayecto cubierto por un rayo de luz reflejado por una superficie especular es de longitud mínima, comparado con trayectos vecinos que van de un punto A (vela) a un punto B (ojo), tocando en cada caso dicha superficie.

La refracción también era bien conocida en el mundo antiguo, mas no lo era su ley (matemática). Claudio Ptolomeo (h. 100-170) se limitó a elaborar una tabla de valores, en la que relacionaba el ángulo de incidencia con el de refracción. Luego transcurrieron siglos, sin que el interés por estas leyes amainara. En el mundo árabe, los sabios musulmanes se encargaron de desarrollar y perfeccionar la óptica. El más ilustre de los ópticos musulmanes fue Ibn al-Haytam (965-1039), conocido en Occidente por Alhazén, quien contribuyó a sistematizar la óptica geométrica, y quien estudió la forma de los espejos no planos, la visión, la refracción de los rayos luminosos, y distintos fenómenos atmosféricos (Guerrero, 1985). Sus

esfuerzos por entender la ley matemática de la refracción no dejan de ser citados. Pero fue preciso esperar el crepúsculo de la ciencia moderna para ver cómo algunos lectores del estudioso islámico extraían la ley de la refracción, que, sin embargo, no fue descubierta sin más por cualquiera de los genios científicos que comenzaban a descollar. Kepler (1571-1630) hizo uso de los valores de Ptolomeo, sin llegar a indicar la ley subyacente, hazaña que quedó reservada a sus coetáneos Snell (1591-1626) y Descartes (1596-1650). Este la dio a conocer en 1637. Aquél, matemático holandés, no la descubrió antes de 1621. Aunque Snell parece haber sido anticipado por Harriot (h. 1560-1621) en 1601 (cf. Sabra, 1981), la ley de la refracción, o ley de los senos, lleva comúnmente su nombre, salvo en los países francoparlantes, donde se suele designar a Descartes como el epónimo de la misma.

La ley de Snell fue objeto de admiración, mientras que su demostración dio lugar a múltiples controversias. En manos de Fermat (1601-1665), las leyes de reflexión y refracción fueron reducidas a un solo principio (variacional), principio que satisfizo las necesidades teleológicas de algunos de los grandes pensadores del siglo, entre los cuales solo nombro a Leibniz (1646-1716). El principio de Fermat ha desempeñado un papel importante en el desarrollo de principios variacionales (cf. también Sepúlveda, 1995).

El principio de Fermat (1662) se puede enunciar de la siguiente manera: El tiempo que emplea un rayo luminoso en viajar de un punto A a un punto B es mínimo. Hoy sabemos que a veces es máximo, por lo que se habla de principio "extremal" o "variacional" o "estacionario".

En los manuales de física y cálculo diferencial suelen presentarse las consecuencias del principio para el caso ejemplar de dos medios homogéneos distintos, separados por una superficie reflectora y/o refractora. Estos ejemplos son demasiado conocidos como para justificar su repetición aquí. Básteme recordar que el principio de Fermat nos permite explicar el aspecto quebrado de una cuchara en una taza llena de agua, o el que, en "una noche llena de murmullos, de perfumes y de músicas de alas", el reflejo de la luna llena en la superficie de un río llegue a nuestros ojos sin retraso alguno.

La pregunta que deseamos contestar en este ensayo es: ¿Se deben los espejismos del asfalto recalentado a ese afán de los rayos de luz, tras haber sido reflejados (hacia el suelo) por algún objeto (que puede ser el mismo cielo, una palmera, o un ciclista), en llegar lo más rápido posible a nuestros ojos? Habremos respondido a la pregunta si

logramos describir la trayectoria de los rayos a partir del principio de Fermat, de cuya forma matemática nos ocuparemos en el siguiente apartado.

Trayecto de un rayo luminoso

La experiencia cotidiana nos impulsa a pensar que los rayos luminosos se propagan en forma rectilínea. Esa misma experiencia nos enseña que al pasar de un medio menos denso a uno netamente más denso, los rayos cambian de rumbo repentinamente. Esto es lo que se observa en el caso del aire y el agua. Pero si nos limitamos a la descripción de la propagación de la luz en un solo medio como el aire, los cambios de densidad son mucho más paulatinos, de modo que la desviación es menos brusca de una capa a otra. Pero el mismo hecho de que la densidad atmosférica es variable (disminuye con la altura, por lo general), es indicio de que los rayos sufren un encorvamiento, por más leve que sea. Afortunadamente, tal encorvamiento es normalmente suficientemente débil para ser despreciado en la teoría de la transferencia radiativa de energía a través de la atmósfera (Yanovitskij, 1997). Sin embargo, hay situaciones, como la que se quiere explicar aquí, en las que es imprescindible calcular la trayectoria que siguen los rayos luminosos.

¿Cómo calcular tal trayectoria? Pues bien, sencillamente aprovechando el principio de Fermat, que podemos traducir al simbolismo matemático de la siguiente manera:

$$(1) \quad t = \int_{\rho} \frac{dr}{c_{\lambda}} = \frac{1}{c_0} \int_{\rho} n_{\lambda} dr$$

donde t designa el tiempo de viaje, c_0 la velocidad de la luz en el vacío (constante universal), $n_{\lambda} = c_0 / c_{\lambda}$ el índice de refracción del medio en cuestión, y r representa la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria —por determinar aún— del rayo, cuya velocidad c_{λ} es menor en un medio material que en el vacío; λ indica la longitud de onda, de la cual dependen muchas propiedades ópticas, entre ellas el mismo índice de refracción. El símbolo ρ representa la trayectoria en el espacio geométrico donde se propaga la luz. En el caso general, tanto la geometría del espacio como la dependencia del índice de la posición espacial y de ciertos parámetros físicos, como la temperatura, la presión del medio, la frecuencia de la luz, no se prestan para un tratamiento analítico. De ahí la necesidad de simplificar, en lo posible sin tocar la esencia del problema.

Nos limitaremos a la geometría de una sección vertical de la atmósfera, considerada plana y paralela, sección que definirá nuestro plano $x - z$, en el cual se encuentra la fuente de nuestro rayo ejemplar y el observador (una palmera y un beduino en su mercedes, por ejemplo, proyectados sobre dicho plano). Supondremos un calentamiento homogéneo y fuerte de la carretera, de manera que las capas inmediatamente adyacentes a la misma se dilaten hasta que su densidad sea menor que la de las capas más alejadas de la superficie caliente. Supondremos además que el gradiente de temperatura sea superadiabático y constante en la capa refractora.

El índice de refracción es proporcional a la densidad del medio. Para la atmósfera podemos escribir (Léna & Blanchard, 1990):

$$n_{\lambda} = 1 + \alpha_{\lambda} \rho$$

siendo ρ la densidad del aire. Para un gas ideal, al cual se puede asimilar el aire húmedo, se tiene que $\rho = p / RT$, donde R es la constante específica del aire húmedo, T la temperatura absoluta del mismo, y p su presión. Así obtenemos la expresión

$$n_{\lambda} \equiv 1 + \beta_{\lambda} \frac{p_0}{T_0}$$

con una nueva constante β_{λ} . Suponiendo una disminución lineal de la temperatura con la altura z a partir de la temperatura de superficie, T_0 , esto es, $T(z) = T_0 - \gamma_0 z$, con $\gamma_0 \equiv -\partial T / \partial z = \text{const.}$, y una presión atmosférica constante en la capa más fuertemente calentada desde el suelo, o igual a la presión en superficie p_0 , podemos reescribir el índice de la siguiente forma:

$$(2) \quad n_{\lambda}(z) = 1 + \beta_{\lambda} \frac{p_0}{T_0 - \gamma_0 z} \approx 1 + \beta_{\lambda} \frac{p_0}{T_0} \left(1 + \frac{\gamma_0 z}{T_0} \right) = n_0 + a_{\lambda} z$$

donde la aproximación está plenamente justificada en virtud de la pequeñez, frente a la unidad, del cociente entre paréntesis. Con esta aproximación se logra definir un índice de refracción como una función lineal de la altura sobre el suelo, lo cual acarrea una gran simplificación del tratamiento matemático. En esta última ecuación hemos definido:

$$n_0(\lambda) \equiv 1 + \beta_{\lambda} \frac{p_0}{T_0} \quad y$$

$$a_\lambda \equiv \beta_\lambda \frac{P_0}{T_0} \gamma_0$$

El elemento de arco dr se expresa, gracias al teorema de Pitágoras, como:

$$(3) \quad dr = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

dz/dx admite la interpretación natural como derivada de una función altura, que depende de la distancia horizontal a algún punto fijo:

$$z = f(x)$$

Insertando el elemento de arco en (1), se obtiene una expresión más explícita del principio de Fermat:

$$(4) \quad t = \int_{x_0}^{x_1} n_\lambda(z) [1 + f'^2(x)]^{1/2} dx$$

donde $f'(x)$ designa la derivada de $f(x)$ respecto a x . La función $z = f(x)$ representa una fingida trayectoria del rayo luminoso entre dos puntos en el plano $x-z$. La tarea es determinar la trayectoria que minimice esta integral. Pero antes de emprenderla, veamos qué se obtiene en dos casos tan simples como clásicos.

Si n_λ es constante ($a_\lambda \equiv 0$), la solución del problema es inmediata: las trayectorias son líneas rectas (las geodésicas del espacio euclídeo) que unen sendos pares de puntos. Si complicamos la situación un poco, exigiendo que el rayo choque con un espejo antes de llegar al observador, obtenemos la ley de la reflexión (principio de Herón). En ambos casos, el decir que el tiempo de viaje es mínimo equivale a decir que la longitud de la trayectoria es la más corta posible.

Una generalización inmediata es suponer que n_λ es constante en cada uno de dos medios físicamente distinguibles (aire y agua, p. ej.). En ese caso, es fácil demostrar por medio del cálculo diferencial, que en el punto del plano de separación, donde las trayectorias —rectilíneas en cada uno de los dos medios— se unen bajo un ángulo no nulo, la refracción tiene lugar según la ley

$$(5) \quad n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r$$

donde el subíndice “ i ” se refiere al rayo incidente, y “ r ” al rayo refractado, los ángulos siendo referidos a la perpendicular a la superficie (ver la figura 1).

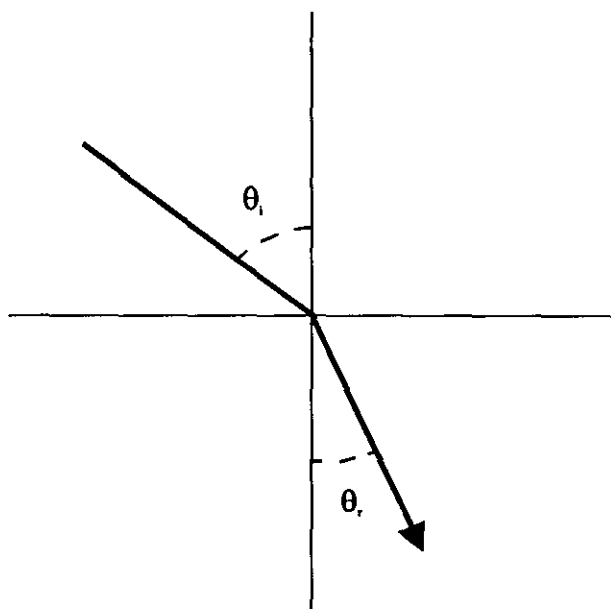


Figura 1. Refracción de un rayo luminoso al pasar de un medio (p. ej. aire) con determinado valor del índice de refracción a uno con un valor más alto (agua). La figura define los ángulos de incidencia (θ_i) y de refracción (θ_r).

Volviendo al caso más general, el de un índice de refracción función de la altura, ¿cómo encontrar la función $f(x)$ que minimice la integral (1)? Ya no se trata de minimizar una función de una variable independiente, como en el caso anterior de la ley de Snell clásica, sino que la “variable” independiente es a su vez una función. A cada función —trayectoria— le corresponde un tiempo t de viaje entre dos puntos fijos cualesquiera, y se trata de seleccionar aquella, que, al ser llevada a la integral (4), resulte en un valor menor que otras funciones (cercanas), “admitidas a la competición”. Designemos a la función distinguida por $f_{ex}(x)$, y definamos las demás como desviaciones, o “variaciones” de la misma:

$$f(x) = f_{ex}(x) + \varepsilon \eta_{ex}(x)$$

$\eta(x)$ ha de coincidir en sus extremos con la función extremal $f_{ex}(x)$: $\eta(0) = \eta(d) = 0$, siendo $d = x_1 - x_0$; ε es un parámetro que nos permite acercarnos o alejarnos

de f_{ex} . El método a seguir (método de Lagrange) compara las trayectorias ópticas y selecciona aquella que resulte en un valor mínimo de la integral. Esto se logra mediante la diferenciación de la funcional (4) con respecto al parámetro ε , e igualando la variación resultante a cero, procedimiento conocido como la variación δt de la funcional t , equivalente a la derivación ordinaria en la minimización de una función con respecto a una variable. Al igual que en este último caso, se obtiene así una condición necesaria, que desemboca ya no en una ecuación algebraica, sino en una ecuación diferencial ordinaria (previa invocación del lema de Du Bois-Reymond, véase cualquier texto sobre cálculo variacional). La condición matemática $\delta t = 0$ es, pues, equivalente a la siguiente ecuación:

$$(6) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{n_\lambda f_{ex}''}{(1 + f_{ex}'^2)^{1/2}} \right] - (1 + f_{ex}'^2)^{1/2} \frac{dn_\lambda}{dz} = 0.$$

Esta ecuación diferencial se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange para la función extremal $f_{ex}(x)$. Para comprobar si se trata realmente de un mínimo, es preciso formar la segunda variación:

$$\delta^2 t = \int_0^x \frac{1}{(1 + f_{ex}'^2)^{1/2}} \left(n_\lambda'' \eta^2 + \frac{n_\lambda \eta'^2 - n_\lambda' f_{ex}''(x) \eta^2}{(1 + f_{ex}'^2)^{1/2}} \right) dx \quad (7)$$

El signo de esta variación ha de ser positivo, si se trata de un mínimo, y negativo, si la función distinguida maximiza el valor de la integral.

La condición necesaria (6) se puede reescribir en términos del ángulo $|\psi| = \pi - \phi$, donde ϕ denota el ángulo de la tangente a la función $f_{ex}(x)$ en el punto x :

$$(8) \quad \frac{d}{dr} (n_\lambda \sin \psi) = \frac{dn_\lambda}{dz}$$

Esta forma no concuerda con la ley de Snell, entendida como generalización de la ecuación (5) al caso de una multitud de capas cada vez más delgadas, hasta convertirse en un medio con índice de refracción de variación continua. Se plantea el problema de si existe una forma de establecer la equivalencia entre la consecuencia inmediata del principio de Fermat y la ley de Snell generalizada.

Para ello, nos serviremos de un artificio, a saber, derivamos primero la unidad, que expresamos aprovechando la conocida relación trigonométrica:

$$\frac{d1}{dr} = \frac{d}{dr} (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = 0$$

Derivando externamente, obtenemos:

$$0 = \sin \psi \frac{d \sin \psi}{dr} + \cos \psi \frac{d \cos \psi}{dr}$$

Siguiendo la prestidigitación, podemos escribir las derivadas en esta expresión como:

$$\frac{d}{dr} \sin \psi = \frac{d}{dr} \left(\frac{n_\lambda \sin \psi}{n_\lambda} \right) = \frac{1}{n_\lambda} \frac{d}{dr} (n_\lambda \sin \psi) - \frac{\sin \psi}{n_\lambda} \frac{dn_\lambda}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \cos \psi = \frac{d}{dr} \left(\frac{n_\lambda \cos \psi}{n_\lambda} \right) = \frac{1}{n_\lambda} \frac{d}{dr} (n_\lambda \cos \psi) - \frac{\cos \psi}{n_\lambda} \frac{dn_\lambda}{dr}$$

obteniendo de esta manera

$$\sin \psi \frac{d}{dr} (n_\lambda \sin \psi) + \cos \psi \frac{d}{dr} (n_\lambda \cos \psi) = \frac{dn_\lambda}{dr}$$

En virtud de (8), y reconociendo además que $\sin \psi = dz / dr$, la última ecuación se reduce a la expresión:

$$\cos \psi \frac{d}{dr} (n_\lambda \cos \psi) = 0$$

la cual es equivalente, siempre y cuando $\psi \neq \pm \pi / 2$ (rayos verticales, que de todas formas no se refractan), a la ley de Snell:

$$(9) \quad \frac{d}{dr} (n_\lambda \cos \psi) = 0$$

(Para ver la equivalencia exacta, no hace falta sino reemplazar a Ψ por el ángulo cenital $\theta = \pi/2 + |\Psi|$, como se definirá más adelante.)

Concluimos que del principio de Fermat podemos extraer lo que ya habíamos adivinado: la generalización de la ley de Snell al caso de un medio de índice de refracción continuamente variable. Con esta consecuencia derivada de un principio variacional, como el de Fermat, podemos pasar a resolver el problema de encontrar la trayectoria real del rayo luminoso. No obstante, empezaremos por demostrar un método de aproximación a la solución, método que se basa en el conocimiento de un principio variacional subyacente.

El método de Rayleigh-Ritz

El problema que estamos investigando se presta a la ilustración de un método de resolución aproximada de una ecuación a la cual va asociada un principio variacional (ver p. ej. **Porter & Stirling**, 1990). Quizá el paso más difícil del método atañe la selección de las funciones aproximativas. Aquí vamos a escoger la parábola como la curva que ha de aproximar la trayectoria verdadera de los rayos luminosos. El método nos permite escoger la mejor parábola entre la infinita variedad de parábolas que unen dos puntos a la misma altura. A cada parábola corresponde un tiempo de viaje de un punto al otro. Como el rayo ha de cubrir su trayectoria en el tiempo más corto posible, y como estamos forzándolo (mentalmente) a seguir una parábola, lo más conveniente es seleccionar aquella parábola que le permita alcanzar el destino en un tiempo mínimo.

Veamos cómo realizar los pasos del método. Primero definimos la clase de parábolas como las funciones (**Léna & Blanchard**, 1990)

$$f_{ap}(x) = z_0 + \alpha x(x - d)$$

donde d representa la distancia horizontal entre los dos puntos fijos del problema. α regula la apertura de la parábola, y z_0 es la altura de ambos puntos. El único parámetro que no está predeterminado es α , y queda por determinar, que es precisamente lo que el método nos permite hacer.

Si se introduce este tipo de función en la expresión (4) del principio de Fermat, y se integra, el resultado es una función del parámetro α . Luego se busca el valor del

parámetro α_{\min} que minimice el tiempo de viaje a lo largo de la parábola.

La integración que se acaba de mencionar nos lleva a la expresión:

$$(10) \quad t_{ap}(\alpha) = \frac{\alpha d}{2} \sqrt{1 + \alpha^2 d^2} \left(\frac{n_\lambda(z_0)}{\alpha} - \frac{a_\lambda d^2}{8} + \frac{a_\lambda}{16\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} \ln(\alpha d + \sqrt{1 + \alpha^2 d^2}) \left(\frac{n_\lambda(z_0)}{\alpha} - \frac{a_\lambda d^2}{4} - \frac{a_\lambda}{16\alpha^2} \right)$$

Se deriva ahora esta expresión con respecto a α , y al igualarse a cero, la(s) solución(es) define(n) los puntos críticos, aquellos que corresponden a valores extremos de la función. Está claro que no se puede esperar que anulando la derivada se pueda despejar a α , de modo que habría que buscar, ya sea una solución numérica o, suponiendo que términos de orden superior al segundo sean completamente despreciables, simplificar la expresión de tal forma que el resultado sea una función cuadrática en α . Ambas cosas haremos, en un esfuerzo por resolver lo mejor posible nuestro ejemplo de ilustración.

Para despreciar términos del orden de α^3 , se desarrollan en serie de potencias las funciones $\sqrt{1 + \alpha^2 d^2}$ y $\ln(\alpha d + \sqrt{1 + \alpha^2 d^2})$, lo cual nos permite escribir, para la primera $1 + \alpha^2 d^2 / 2$, y αd para la segunda. Encontramos así la aproximación:

$$t_{ap}(\alpha) \approx \tilde{t}_{ap}(\alpha) = \frac{d}{2} \left(2n_\lambda(z_0) + \frac{1}{2} n_\lambda(z_0) d^2 \alpha^2 - \frac{11}{32} a_\lambda d^2 \alpha \right)$$

Derivando esta expresión y anulando el resultado nos brinda el valor:

$$\alpha_{ap} = \frac{11}{32} \frac{a_\lambda}{n_\lambda(z_0)}$$

Otra posibilidad es derivar la expresión (10) con respecto a α y despreciar términos de orden mayor que el cúbico, puesto que los cúbicos resultan dominantes. Al igualar a cero el resultado, y despejar a α , se obtiene:

$$\alpha'_{ap} = \frac{3}{8} \frac{a_\lambda}{n_\lambda(z_0)}$$

Una posibilidad más (ver Léna & Blanchard, 1990) sería desprestigiar términos del orden de α^3 antes de integrar la ecuación (4). En tal caso, al derivar la integral aproximada con respecto a α , e integrar enseguida, el resultado es una función lineal de α , cuya intersección con el eje de los α es fácil de calcular:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{a_\lambda}{n_\lambda(z_0)}$$

Vemos pues, que las tres posibilidades nos conducen a una parábola cuya apertura α es proporcional a

$$\alpha = \frac{\frac{a_\lambda}{n_\lambda(z_0)}}{k n_\lambda(z_0)}$$

con distintos valores de k . La solución numérica es

$$\alpha_{\min} = 4.13492 \cdot 10^{-7} m^{-1}$$

y corresponde a $k \approx 2$. De modo que utilizar el parámetro α_0 con $k = 2$ debería representar una buena aproximación parabólica a la solución del problema matemático. Más adelante veremos que, efectivamente, la parábola correspondiente es una excelente aproximación a la solución exacta.

Este método es obviamente superfluo cuando se conoce la solución exacta, siendo este el caso en nuestro ejemplo. Pero en la mayoría de los problemas reales no se dispone de la solución analítica, y el método de Rayleigh-Ritz nos permite a menudo encontrar soluciones aproximadas de buena calidad. Claro está que se necesita un criterio para decidir cuándo esa calidad es buena. En nuestro caso, el criterio es dictado por la solución analítica.

Solución analítica

La solución analítica de la ecuación (6), o de su equivalente (9) se puede obtener de la siguiente manera.

Primero, integramos la ecuación (9):

$$n_\lambda(z) \cos\psi = C$$

y le damos a esta ley de la refracción generalizada una forma analítica, teniendo en cuenta que $\tan\psi = f'_\alpha(x)$, de donde se sigue que $\cos\psi = 1/\sqrt{1+f'^2_\alpha}$, y, por consiguiente:

$$(11) \quad \frac{n_\lambda(z)}{\sqrt{1+f'^2_\alpha(x)}} = C.$$

Despejando $f'_\alpha(x) = dz/dx$:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{n_\lambda^2(z)}{C^2} - 1}$$

En el caso particular que deseamos resolver cabalmente, es decir, para $n_\lambda(z) = n_0 + a_\lambda z$, se integra esta ecuación de (x_0, z_0) a (x, z) . Con el fin de reconocer más fácilmente la función primitiva que resulta de la integración, introducimos la nueva variable $\xi = n_\lambda(z)/C$, obteniendo así

$$x - x_0 = \frac{C}{a_\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

El integrando es igual, en el dominio de valores pertinente, a la derivada de la inversa del coseno hiperbólico. La integración puede efectuarse ahora fácilmente, y un reordenamiento resulta finalmente en la expresión

$$z = \frac{1}{\alpha_\lambda} \left\{ C \cosh \left[\frac{a_\lambda}{C} (x - x_0) - \cosh^{-1} \xi_0 \right] - n_0 \right\}.$$

Para incorporar las condiciones iniciales, expresaremos de ahora en adelante el ángulo del rayo luminoso refiriéndolo a la normal o vertical, con ésta apuntando hacia el cenit (ángulo cenital θ en lugar de ψ). La ley de Snell toma la forma:

$$(12) \quad n_\lambda(z) \sin\theta = C$$

donde C viene a ser una constante determinada por la altura y el ángulo cenital iniciales:

$$C(z_0, \theta_0) = n_\lambda(z_0) \sin\theta_0.$$

Vemos además que $\xi_0 = n_\lambda(z_0) / C = \csc\theta_0$. Introduciendo a δ como el valor (positivo o negativo), cuyo coseno hiperbólico es igual a ξ_0 , nos permite escribir finalmente la solución analítica de nuestro problema:

(13)

$$f_{ex}(x) = \frac{1}{a_\lambda} \left[C(z_0, \theta_0) \cosh\left(\frac{a_\lambda}{C} x - \delta\right) - n_0 \right] \text{ donde}$$

$$\delta = \cosh^{-1}(\csc\theta_0),$$

siendo θ_0 el ángulo cenital bajo el cual se emite o refleja el rayo que parte del punto inicial. a_λ depende del declive vertical de temperatura (gradiente vertical negativo de la misma).

La función (13) es, pues, la solución exacta de nuestro problema: representa el camino tomado por un rayo que arranca del punto $(x_0 = 0, z_0)$ bajo un ángulo cenital θ_0 , para llegar de la manera más rápida al punto (d, z_0) (u otro), después de sufrir un encombamiento por efecto de la refracción continua al pasar de una capa más fría por una recalentada. Aunque tengamos la solución en nuestras manos, ¿se tratará de la trayectoria recorrida en un tiempo mínimo? ¿O más bien máximo? Para decidir la cuestión, el criterio analítico sería investigar el signo de la segunda variación de t_{ex} . Esta variación se obtiene a partir de la primera, según vimos anteriormente, de modo que (7) se convierte, en nuestro caso particular de un índice de refracción función lineal de z , en la integral:

$$\delta^2 t = \int_0^d \frac{C\eta'^2 - \frac{a_\lambda^2}{C}\eta^2}{\cosh^2\left(\frac{a_\lambda}{C} x - \delta\right)} dx$$

Desafortunadamente, no es fácil decidir cuál es el signo de esta variación, sin prescribir a η . Otra posibilidad relativamente sencilla es comparar el tiempo que toma el rayo luminoso usando la trayectoria real, con el que gastaría al propagarse a lo largo de la mejor aproximación parabólica, la cual, por buena que sea, corresponde a un mayor tiempo de viaje, según la interpretación común del principio de Fermat.

Podemos calcular los tiempos de viaje en ambos casos, pues conocemos las funciones involucradas. Los

resultados son los siguientes: para la solución parabólica óptima se obtiene:

$$t_{\varphi} = \frac{1}{c_0} \left\{ \frac{n_\lambda(z_0)d}{16} \left(9 - \frac{m}{2}\right) \left(1 + \frac{m}{4}\right)^{1/2} + \frac{n_\lambda^2(z_0)}{8a_\lambda} (7-m) \ln\left(\frac{\sqrt{m}}{2} + \sqrt{1 + \frac{m}{4}}\right) \right\},$$

donde $m \equiv (a_\lambda d / n_\lambda(z_0))^2$, mientras que la solución exacta (real) implica un tiempo de viaje igual a

$$t_{ex} = \frac{1}{c_0} \left\{ \frac{Cd}{2} + \frac{C^2}{4} a_\lambda \left[\sinh\left(\frac{2a_\lambda d}{C} - 2\delta\right) + \sinh(2\delta) \right] \right\}$$

Estas ecuaciones pueden ser evaluadas para valores iniciales dados, permitiendo así la comparación directa de los tiempos en cuestión.

Ejemplo numérico

En esta sección nos proponemos presentar un ejemplo numérico de todo lo expuesto anteriormente.

Para los valores de los distintos parámetros y variables iniciales seleccionamos los siguientes: $\beta_\lambda = 8 \cdot 10^{-5}$ K Pa⁻¹ (valor apropiado para el verde, ver Léna & Blanchard, 1990); $P_0 = 1013$ hPa; $T_0 = 313$ K; $\gamma_0 = 1$ K/m (valor bastante modesto que puede llegar a ser 30 veces más grande, ver Blackadar (1997)); $z_0 = 3$ m; $\theta_0 = 90.1^\circ$. La distancia entre los dos puntos de la trayectoria luminosa de igual altura z_0 se calcula mediante (13):

$$d = \frac{2\delta(\theta_0)C(z_0, \theta_0)}{a_\lambda}$$

Para $z_0 = 3$ m (altura de una joven palmera) obtenemos $d = 4.22$ km. La figura 2 muestra la trayectoria del rayo que parte de un objeto a una altura de 3 m, bajo un ángulo de $\psi = -0.1^\circ$ con respecto a la horizontal. La figura de la parábola aproximativa no se puede distinguir de la de la solución exacta, a menos que se agrande lo suficiente la escala de la ordenada (ver figura 3). Los tiempos que emplea la luz en ir del punto (0,3) al punto (4220.1, 3) (en metros) son:

$$t_{ex} = 0.7 \quad 10^{-5} \text{ s}$$

y

$$t_{\varphi} = 1.4 \quad 10^{-5} \text{ s}$$

demostrando que la trayectoria real requiere la mitad del tiempo que una trayectoria parabólica vecina, por más cercana que se encuentre de la real. Lo cual nos permite concluir que estamos en presencia de un verdadero principio de mínimo.

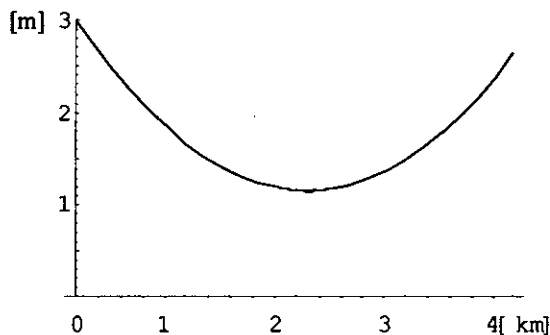


Figura 2. Solución analítica (ecuación (13) con los valores indicados en esta sección), que representa la trayectoria de un rayo luminoso reflejado a una altura de 3 m bajo un ángulo cenital de 90.1° . La parábola aproximativa no es discernible con la resolución de la ordenada elegida aquí (para ello, véase la figura 3).

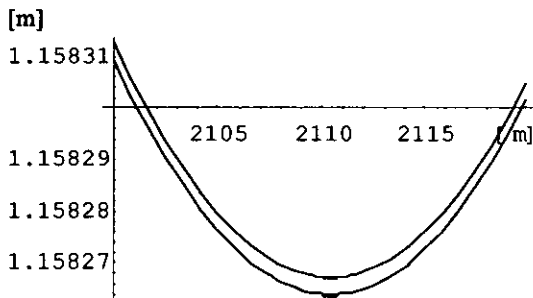


Figura 3. Solución analítica y parábola aproximativa, comparadas alrededor del mínimo, donde las diferencias son más grandes.

Para finalizar, agreguemos que el lector fácilmente puede experimentar con distintos valores iniciales, con distintos gradientes de temperatura etc., para calcular por ejemplo la distancia a la que él se debería apostar, según su propia altura, para poder ver la “palmera cabeza abajo”. En resumen, podemos afirmar que hemos reducido los misteriosos espejismos del asfalto (y de otras superficies recalentadas) al simple principio centenario de Fermat, colmando así las aspiraciones que se puedan tener en una investigación matemática de un problema meteorológico.

Bibliografía

- Aristóteles**, 1996. Los meteorológicos. Alianza Universidad, Madrid. Ver también: Acerca del cielo. Meteorológicos. Biblioteca Clásica Gredos, Editorial Gredos, Madrid.
- Blackadar, A.K.**, 1997. Turbulence and Diffusion in the Atmosphere. Springer-Verlag, Berlín, etc.
- Feynman, R.P., Leighton, R.B. & M.L. Sands**, 1963. The Feynman Lectures on Physics. Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Massachusetts.
- Guerrero, R.R.**, 1985. El pensamiento filosófico árabe. Editorial Cincel, Bogotá.
- Léna, P. & A. Blanchard**, 1990. Lumières. Une introduction aux phénomènes optiques. InterEditions, Paris.
- Porter, D. & D.S.G. Stirling**, 1990. Integral Equations. A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications. Cambridge University Press, Cambridge.
- Sabra, A.I.**, 1981. Theories of Light. Cambridge University Press, Canadá.
- Sepúlveda, A.**, 1995. Historia de la Física. Desde los griegos hasta nuestros días. Fondo Editorial Cooperativo, Medellín.
- Yanovitskij, E.G.**, 1997. Light Scattering in Inhomogeneous Atmospheres. Springer-Verlag, Berlín, etc.