EL POSTULADO DE LAS PARALELAS

por

Luis Moreno-Armella*

Resumen

Moreno-Armella, L.: El postulado de las paralelas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **22** (83): 393-405, 1998. ISSN 0370-3908.

Se describe el camino seguido desde Euclides hasta Hilbert en la construcción de la geometría como una ciencia teórica. Se indica la intención filosófica, que se encuentra ya clara en Aristóteles, de construir *ciencias demostrativas*, lo cual condujo necesariamente a la exploración de las proposiciones como elementos constitutivos de un sistema axiomático para la geometría, pasando de lo ontológico a lo lógico. En este proceso tuvieron profunda importancia los intentos de demostración del postulado de las paralelas, que muestran cómo se pasó de la "verdad euclídea" a la "consistencia hilbertiana".

Palabras claves: Matemáticas, historia, filosofía, geometrías no euclídeas, epistemología.

Abstract

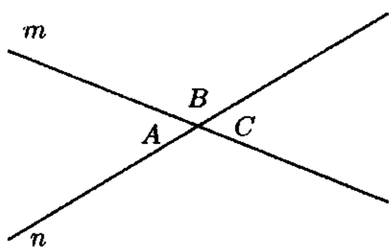
The path followed to construct a theoretical science, from Euclid to Hilbert, is described. The Aristotelian philosophical intentions to build *demostrative sciences*, lead necessarily to the exploration of propositions as building blocks of an axiomatic system for geometry, which in turn allowed mathematicians pass from ontological aspects to logical ones. In this process, the attempts to prove the Fifth Postulate of Euclidean geometry, had a crucial rôle since at the end they lead from "Euclidean truth" to "Hilbertian consistency".

Key words: Mathematics, history, philosophy, non-Euclidean geometries, epistemology.

* Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, Dakota 379, C.P. 03810 Col. Nápoles, México, D.F., tel: (5)5430770, fax: (5)5430713.
El levantamiento de este texto se hizo usando el paquete TEX de la AMS.

§1. De Euclides a Hilbert

La matemática griega introdujo un elemento novedoso en la matemática: el método deductivo. Las culturas matemáticas anteriores hicieron de la verificación empírica (que sólo podía dar resultados aproximados), y la generalización por analogía, sus criterios para establecer los resultados de su matemática. Con el método deductivo de los griegos se pudo ir más lejos. Al comienzo, este novedoso instrumento de verificación se ejercitó en el marco de las *organizaciones locales.* Por ejemplo, la geometría del triángulo, la geometría de la circunferencia, fueron desarrollándose como "pequeños universos" de conocimiento geométrico. TALES DE MILETO demostró que los ángulos opuestos por el vértice (entre dos rectas m y n que se intersecan) son iguales. Lo hizo de la siguiente manera: Se debe demostrar que $A = C$.



Ahora, como $A + B = 180°$ y $C + B = 180°$ entonces $A = C$. Un matemático babilónico quizá habría argumentado que el resultado era claro, pues bastaba *ver el dibujo.* Aquí está la diferencia fundamental con la cultura matemática griega: *la diferencia entre el dibujo y el objeto geométrico.*

La matemática griega sostiene la idea de que la geometría es una representación del espacio físico. Por ello, sus resultados, que iban siendo establecidos dentro de la geometría, se aplicaban a problemas del espacio físico. La geometría se desarrolla como una *representación y organización del conocimiento sobre el espacio físico.* Un ejemplo sobresaliente lo constituye el método ideado por Eratóstenes para estimar el radio de la tierra. Este tipo de ejemplos, en donde no es posible la verificación directa del resultado, fue importante para establecer el método deductivo como un criterio de validación. En efecto, ante la imposibilidad de una comprobación empírica (que necesariamente estaba ausente) el único recurso para validar los resultados obtenidos era el que tales resultados fueran obtenidos dentro de un proceso deductivo.

En la incorporación del método deductivo a la matemática también resultó central la *intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad.* El objetivo del método deductivo era explicar: *explicar era demostrar.* Para explicar, hay que partir, en una ciencia, de *primeros principios.* Esta organización, ya de carácter global, en la geometría, quedó plasmada en los *Elementos* de EUCLIDES -y refleja ampliamente las concepciones aristotélicas sobre la ciencia. Allí tenemos una organización que rebasa las organizaciones locales a las que ya hemos hecho referencia anteriormente. La intención filosófica de construir una ciencia desde sus primeros principios, la podemos hallar en ARISTÓTELES quien se propuso analizar lo que era una *ciencia demostrativa.* El tema central de su libro *Tópicos* es "la demostración y la facultad que la realiza". Allí se encuentran los elementos que componen una ciencia demostrativa:

(i) Las definiciones.
(ii) Los primeros principios, que los hay de dos clases: los específicos de cada ciencia, llamados postulados y los comunes a todas, los axiomas.
(iii) Finalmente, está el cuerpo deductivo, compuesto por las proposiciones demostradas a través de la inferencia.

A grandes rasgos, estos son los antecedentes de la organización axiomática de la geometría griega. Lo que siguió, es decir, *la exploración de las proposiciones como miembros constitutivos de un sistema axiomático de geometría,* fue cambiando, gradualmente, el significado de estas mismas proposiciones. Dejaron de ser vistas como representaciones de alguna propiedad del espacio (físico). Es decir, fueron perdiendo su *valor ontológico,* y fue enfatizado su aspecto lógico. Empero, esto no fue un proceso breve. Duró varios siglos y hubo profundas razones para ello.

La principal fue quizá, el desarrollo impulsado por los intentos de demostrar el quinto Postulado, pues ya desde tiempos de EUCLIDES fue visto como una proposición "muy complicada" para adjudicársele la categoría de postulado: carecía de la evidencia en sí que debía caracterizar las proposiciones dignas de tal nombre. Una comparación de los primeros cuatro postulados con el quinto aclarará este punto. Los primeros cuatro son:

1. *Dos puntos determinan una única recta*
2. *Todo segmento de recta puede extenderse continuamente.*
3. *Con cualquier centro y cualquier radio, puede trazarse una circunferencia.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Y el quinto:

5. *Dadas dos rectas y una transversal a ellas en un*

> *plano, si los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos rectos entonces, al prolongar estas rectas ellas deberán intersectarse del lado de estos ángulos.*

Uno puede preguntarse por qué EUCLIDES no prefirió una formulación más sencilla, como por ejemplo: "Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a dicha recta (en el plano determinado por la recta y el punto exterior)". Basta recordar que tal formulación era imposible para EUCLIDES ya que ella supone postular el comportamiento de una recta "en el infinito", más allá de lo que la experiencia sensible puede hacer pasar como "evidente en sí mismo" que es el carácter que debe tener todo postulado. *La experiencia sensorial es siempre local.*

Debido a esta posición tan particular dentro del sistema euclídeo, desde muy pronto este postulado fue considerado como una proposición que debía ser demostrada, es decir, fue puesto en la categoría de teorema. La historia de los intentos de demostración del postulado de las paralelas cubre una parte sustancial de la historia de la geometría hasta el siglo XIX. Cubre, en particular, parte importante de la evolución de la idea de demostración. Al comienzo, fue claro para quienes buscaron tal prueba, que habría que hacerlo dentro del contexto euclídeo y ello comportaba una hipótesis de profundo valor epistemológico:

La geometría euclídea era una representación verdadera del mundo y además era única.

La demostración del postulado simplemente haría más ligero el sistema postulacional. No hubo, en general, duda alguna del *isomorfismo* entre el sistema geométrico y el espacio físico. Este estado de cosas se mantuvo casi inalterado hasta el siglo pasado, cuando cambió radicalmente. La geometría sufrió cambios profundos que se reflejaron a través de la obra *Fundamentos de geometría* (1899), de HILBERT (1862-1943). En los *Elementos*, los axiomas son "verdades evidentes" por lo cual no necesitan de una demostración que los justifique como tales. En consecuencia, lo que podamos deducir de ellos, tendrá también el carácter de verdad que tienen los axiomas. Es decir, son verdades necesarias sobre el espacio físico. En cambio, en el trabajo de HILBERT, no se tiene en cuenta el carácter de "verdad" de los axiomas; lo fundamental es que el conjunto de axiomas sea consistente. Es decir, que los axiomas no se contradigan entre sí. Por ejemplo, no debe haber, además del axioma de unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, otro axioma que afirme o del cual pudiera deducirse, la existencia de más de una paralela por un punto exterior a una recta. Los resultados que se deduzcan de los axiomas, tendrán el carácter de teoremas, pero no un valor asociado de verdad.

El esquema siguiente sugiere la transformación que sufrió la axiomatización de EUCLIDES en manos de HILBERT:

$$\text{LA VERDAD} \quad\Longrightarrow\quad \text{LA CONSISTENCIA}$$

Una extracción del significado de los términos y proposiciones de la geometría y su correspondiente sustitución por el criterio lógico de la consistencia. Este proceso de "desustanciación" de la geometría, en el que ya no importa la naturaleza de los objetos de los que se habla sino la coherencia del discurso, corresponde a un movimiento general en la matemática del siglo XIX.

§2. Geometría y desustanciación

La obra de HILBERT sobre los fundamentos de la geometría apareció como consecuencia de un movimiento general de la matemática: la búsqueda de fundamentos de naturaleza analítica para esta disciplina. Se partió de una idea expresada por HILBERT sobre los axiomas de una teoría: lo realmente importante no son los significados (interpretaciones) que podamos asociar a tales axiomas sino la coherencia que ellos mantengan entre sí. Los axiomas juegan el papel de "definiciones implícitas" de los términos de la teoría que vienen mencionados en estos axiomas. Entonces, según HILBERT, no importa lo que "son" los puntos, las líneas y los planos; *lo que importa son las relaciones entre ellos que vienen dadas por los axiomas.* El libro de COURANT & ROBBINS *¿Qué es la matemática?*, expresa este punto de vista de manera espléndida:

A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos –números, puntos, etc.– como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que aquellos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones...la percepción de la necesidad de la desustanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno.

Hay un proceso que puede ser identificado como crucial para desencadenar el programa de desustanciación impulsado por HILBERT: la fundación de las geometrías no–euclídeas. Con el advenimiento de esta geometría, quedó inaugurado un nuevo camino: la geometría como representación de un espacio posible. Para las matemáticas, en general, *este proceso marca el paso hacia la matemática de las estructuras.*

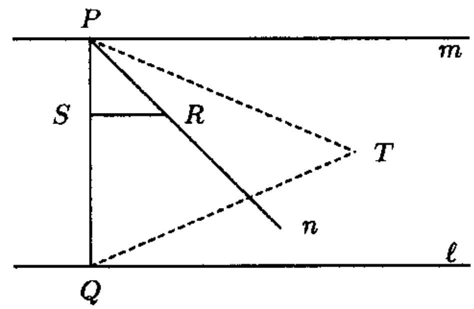
¿Qué hizo posible esta transformación? parte de la respuesta está en el desarrollo de la geometría no–euclídea.

§3. La demostración del quinto Postulado

Hemos visto los extremos de una historia. Digámoslo así: *todo comenzó con* EUCLIDES *y terminó con* HILBERT. De la verdad a la consistencia. La ciencia griega representa el resultado de una actividad cognitiva sobre lo empírico. *Está vinculada prioritariamente a la abstracción empírica.* La ciencia de HILBERT es resultado de una reflexión sobre una ciencia ya constituida, cada concepto es resultado de una reflexión sobre el contexto total del concepto. *Es resultado de una abstracción reflexiva*, en el sentido de la epistemología piagetiana.

La geometría griega trata de descubrir verdades ocultas mediante un *razonamiento deductivo íntimamente vinculado a la ontología.* Esta característica subsiste durante siglos y puede verse *cómo influye en la estructura de los razonamientos* que buscan demostrar el quinto postulado. Aunque la historia de los intentos por demostrar el quinto Postulado comienza casi al tiempo que los *Elementos* mismos, nosotros aquí iniciaremos nuestro estudio en el siglo XVII. Como ejemplo, vamos a considerar la demostración de WALLIS (1616–1703). Su estrategia se apoya en la existencia de triángulos semejantes. Uno de los postulados de EUCLIDES nos dice que con cualquier centro y cualquier radio puede trazarse una circunferencia. En particular, pueden trazarse diferentes circunferencias concéntricas. Dado que los triángulos son figuras aún más simples, esta observación hace plausible suponer la existencia de triángulos semejantes. Esto es parte de la ontología subyacente a la geometría: la *homogeneidad del espacio.*

La demostración de WALLIS es como sigue: dado el punto P exterior a la recta ℓ constrúyase la paralela m a ℓ por P. PQ es perpendicular tanto a ℓ como a m. Sea n otra recta distinta a m y a la recta determinada por PQ. Tómese R sobre n, como indica la figura y S el pie de la perpendicular RS. Considerando el triángulo PSR y el lado PQ debe existir un punto T de modo que el triángulo PQT sea semejante al triángulo PSR. Se concluye que el rayo PR coincide con el rayo PT. Es decir, T está sobre el rayo PR. Por otro lado, el ángulo PQT es recto. Entonces T está en la intersección de ℓ



y n. Es decir, la única paralela a ℓ por P es m.

Llevando el análisis más lejos podemos demostrar a su vez, que la existencia de triángulos semejantes se sigue del quinto postulado. Como son lógicamente equivalentes, la prueba de WALLIS sufre del mal de "petición de principio". El mal del que sufren todas las demostraciones del quinto postulado cuando se tratan de realizar desde los otros cuatro postulados de EUCLIDES. Esto llevó a LOBACHÉVSKI a declarar en sus *Nuevos Principios de la geometría* (1835):

Es bien conocido que hasta la fecha la teoría de las paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos hechos desde tiempos de EUCLIDES *y a lo largo de un período de más de dos mil años, me han convencido de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se desea demostrar.*

No es quizá exagerado decir que las grandes transformaciones matemáticas han gravitado siempre alrededor de problemas epistemológicos. En EUCLIDES, los objetos de la geometría anteceden a la ciencia misma, existen potencialmente en las cosas sensibles y no pueden ser separados de ellas. El objeto abstracto conserva una dependencia ontológica respecto del objeto material que sirve para generarlo por vía de la abstracción. Este enfoque se hace explícito cuando hablamos de los postulados como de "proposiciones evidentes en sí mismas". La historia de la construcción de las geometrías no–euclídeas es la historia de la lucha contra esta concepción del objeto matemático. En efecto, las proposiciones que se consideran como "absurdas" son aquellas que entran en conflicto con proposiciones que se consideran como intuitivamente verdaderas. Dado que es la "sustancia" la fuente de los obstáculos, los matemáticos, a partir de cierto momento del siglo XIX, decidieron desembarazarse de ella. La cita de COURANT & ROBBINS que presentamos arriba, refleja justamente tal punto de vista.

Continuemos con la historia del quinto postulado. Después de los intentos de WALLIS y de muchos otros, hechos desde la perspectiva de aquél, podemos señalar una nueva etapa que inaugura SACCHERI (1667-1733). Se trata de intentar una demostración por el absurdo. SACCHERI supone como válidos todos los postulados de EUCLIDES excepto el quinto y en su lugar coloca una de las dos formas de su negación. Es decir,

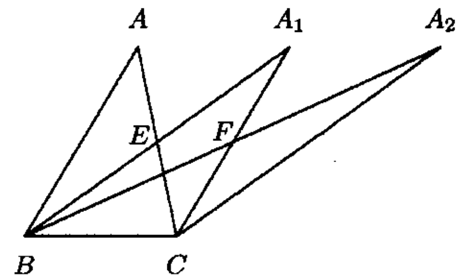
por un punto exterior a una recta dada en un plano, no pasa ninguna paralela a dicha recta,

o bien,

por un punto exterior a una recta dada, en un plano, pasa más de una paralela a dicha recta.

La primera hipótesis equivale a que la suma de los ángulos de cualquier triángulo sea mayor que dos rectos. La segunda, equivale a que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que dos rectos. A partir de cualesquiera de estas hipótesis, SACCHERI intenta arribar a una contradicción. Por ejemplo, suponiendo válidos los primeros cuatro postulados de EUCLIDES, el principio de continuidad de ARQUÍMEDES y la existencia de segmentos de longitud arbitraria –hipótesis aceptadas dentro del marco euclídeo– es posible demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo debe ser menor o igual a dos rectos. En consecuencia, no puede suponerse, dentro de este marco axiomático la validez de la primera hipótesis: la hipótesis del ángulo obtuso. Para descartar la otra hipótesis, la del ángulo agudo (la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a dos rectos) SACCHERI se ve envuelto en un complicado proceso deductivo que no parece arribar a ninguna contradicción. En cierto momento, empieza a gravitar su posición epistemológica, a saber, que la única geometría posible es la euclídea. Tenemos así la proposición XXXIII de su libro *Euclides liberado de todo error* (*Euclides ab omni naevo vindicatus*, 1733, año de su muerte): "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta". Ésta ya no es la actitud del lógico, sino la del hombre dogmático que sostiene, contra su propio razonamiento, la fe en el carácter absoluto de la geometría euclídea. Con razón LOMBARDO-RADICE ha dicho de esta actitud de SACCHERI: *el dogma vence a la lógica.*

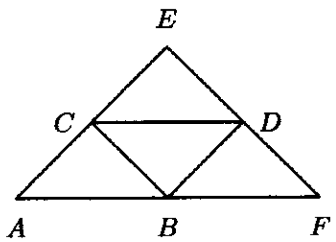
LEGENDRE (1752-1833) adoptó el enfoque seguido por SACCHERI. Sus intentos de demostración del quinto postulado, fueron publicados en sucesivas ediciones de su texto de geometría. En la geometría euclídea se demuestra que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos. La demostración tradicional emplea el quinto postulado. Recíprocamente, tomando como base tal teorema euclídeo, se puede demostrar el quinto postulado. Es decir, son proposiciones equivalentes desde un punto de vista lógico. Uno de los intentos más interesantes de LEGENDRE consistió en demostrar la imposibilidad de las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo. Como en el caso de SACCHERI, se requiere del auxilio del principio de continuidad de ARQUÍMEDES y de la posibilidad de construir un segmento de recta de longitud arbitrariamente grande. Veamos cómo se descarta la hipótesis del ángulo obtuso:



Sea E el punto medio del lado AC. Se traza BA_1 de suerte que $BE = EA_1$. Los triángulos ABE y ECA_1 son congruentes y, en consecuencia, la suma de los ángulos del triángulo original ABC y la del triángulo BCA_1 son iguales. Denotemos tal suma por $180°+\epsilon$, donde $\epsilon > 0$. Puede observarse que uno de los ángulos del triángulo BCA_1 es menor que la mitad del ángulo ABC (vértice en B), si este es el menor ángulo agudo del triángulo ABC. Partiendo ahora del triángulo BCA_1 tomanos el punto medio F del lado CA_1 y construimos el triángulo BCA_2. De nueva cuenta este triángulo tiene un ángulo agudo que es menor o igual que la mitad del ángulo CBA_1 (vértice en B), y, por lo tanto, menor o igual que la cuarta parte del ángulo CBA. Si realizamos esta construcción n veces, habremos construido un triángulo que tiene un ángulo agudo menor o igual que $ABC/(2n)$. Para n suficientemente grande, el número $ABC/(2n)$ es menor que ϵ. Por lo tanto, habremos llegado a un triángulo en el cual la suma de dos de sus ángulos es mayor que dos rectos. Esto es una contradicción.

De esta forma queda descartada la hipótesis del ángulo obtuso. En consecuencia, la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor o igual que dos rectos. LEGENDRE se propone entonces demostrar que la suma no puede ser menor, estrictamente, que dos rectos.

Supongamos que la suma de los ángulos del triángulo ABC es $180° - \epsilon$, donde $\epsilon > 0$.

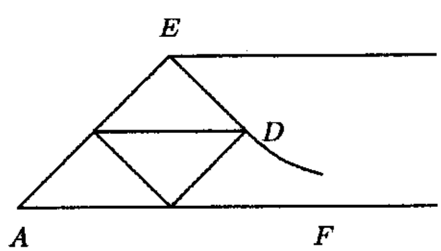


Construimos el punto D simétrico de A respecto la recta BC. Entonces el triángulo ABC es congruente al triángulo DBC. En tales triángulos, el ángulo en A es igual al ángulo en D, el ángulo en F es igual al ángulo en C, respectivamente. Por el punto D se traza la recta EF. Entonces:

Suma de los ángulos del triángulo $ABC = 180° - \epsilon$
Suma de los ángulos del triángulo $BCD = 180° - \epsilon$
Suma de los ángulos del triángulo $DBF \leq 180°$
Suma de los ángulos del triángulo $ECD \leq 180°$

Por lo tanto, la suma de los ángulos del triángulo EAF es menor o igual que $180° - 2\epsilon$. Si repetimos n veces esta construcción llegaremos a un triángulo (como EAF) en el cual la suma de los ángulos es $180° - 2^n\epsilon$. Por la propiedad arquimediana, este número será negativo si n es suficientemente grande. Hemos llegado entonces a una contradicción: tenemos un triángulo cuya suma de ángulos es negativa.

Si la demostración fuese correcta LEGENDRE habría probado que la suma de ángulos de cualquier triángulo es 180° y con ello, el postulado de las paralelas. El error de su demostración consiste en suponer que por el punto D se puede trazar, siempre, una recta que intersecte a las prolongaciones de los lados AB y AC. ¿Por qué es esto un error? Porque estaríamos descartando injustificadamente una situación como la siguiente:



Es decir, en donde exista la posibilidad de que la recta que trazamos por D sea paralela a AF. El dibujo ilustra una situación posible en una geometría en donde pueda haber más de una paralela a AF por el punto E. Nada hay que impida que el comportamiento de la recta ED no sea como el de la figura. Que la línea ED intersecta a la base en un punto F, sería afirmar que la paralela a AF, por el punto E es única. He allí el error de LEGENDRE: usar en su demostración una hipótesis implícita equivalente a lo que se pretende demostrar.

Los esfuerzos de LEGENDRE para intentar producir una demostración del quinto postulado son admirables: durante 29 años y doce ediciones de su libro de geometría, estuvo presentando demostraciones cada vez "corregidas", de la unicidad de la paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.

Los trabajos de SACCHERI y LEGENDRE pertenecen a una segunda etapa del desarrollo de las geometrías no–euclídeas –quizá sea más apropiado decir de los "antecedentes". Corresponden a los intentos de demostrar el quinto postulado mediante la verificación de la inconsistencia de los sistemas alternativos: los correspondientes a las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo.

Ubicado entre los trabajos de SACCHERI y LEGENDRE, hallamos los del matemático alemán LAMBERT (1728–1777), quien produjo un trabajo notable sobre el problema de las paralelas. LAMBERT leyó el trabajo de SACCHERI y en muchos aspectos lo mejoró. Articuló la primera fase de su trabajo alrededor de una figura reminiscente del cuadrilátero de SACCHERI: el cuadrilátero de LAMBERT que posee tres ángulos rectos y un cuarto ángulo al que se pueden adjudicar valores obtusos, recto y agudos. Desde luego, bajo la hipótesis del ángulo recto la geometría resultante es la euclídea. La hipótesis del ángulo obtuso es relativamente fácil de descartar, como antes, explicitando tanto el postulado arquimediano como la longitud infinita de la recta. (Vale la pena dar aquí la noticia: DEHN demostró, en 1900, la imposibilidad de demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es menor o igual que 180°, *en ausencia del postulado de continuidad arquimediano.*)

A diferencia de SACCHERI, LAMBERT no llegó a conclusiones sobre lo absurdo de la existencia de una geometría en donde fuese válida la hipótesis del ángulo agudo. Por ejemplo, leamos la cita siguiente de LAMBERT:

Se pueden desarrollar demostraciones del postulado euclídeo que dan la impresión de que sólo requieren un pequeño arreglo para hacerlas rigurosas. Sin embargo, bajo un escrutinio más detenido aquello que parecía sólo requerir un pequeño arreglo se convierte en el punto cru-

cial; usualmente allí se esconde la proposición que se quiere demostrar o alguna otra equivalente.

La opinión que aquí expresa LAMBERT ya empezaba a ser compartida en su tiempo por los estudiosos del problema: no importa cuán duro se trabaje en la búsqueda de una demostración del postulado de las paralelas, siempre se llega a un callejón sin salida. Esto llevó al mismo LAMBERT a opinar así:

Estoy inclinado a creer que la geometría correspondiente al ángulo agudo es válida sobre una esfera de radio imaginario. Debe haber una poderosa razón para que no la podamos descartar sobre el plano, como sí podemos fácilmente cuando se trata de la hipótesis del ángulo obtuso.

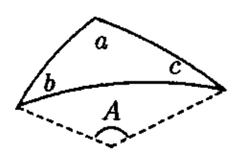
La alusión a la esfera de radio imaginario se debe a que la geometría del ángulo obtuso (más otras modificaciones) corresponde a la geometría de la esfera. La trigonometría esférica se transforma en la trigonometría hiperbólica si realizamos la sustitución formal del radio r de la esfera por ir (donde i representa la raíz cuadrada de -1). Debe enfatizarse que LAMBERT se está moviendo en un terreno especulativo (aunque con una intuición correcta, como se verá después). Establece la siguiente analogía: así como en la esfera (donde vale la hipótesis del ángulo obtuso) los triángulos tienen un área proporcional al exceso: (suma de los ángulos)-180°, entonces, ya que la trigonometría hiperbólica implica que el área de un triángulo es proporcional al defecto: $180^{\circ}-$(suma de ángulos del triángulo) entonces, dado que ésta es la trigonometría que corresponde a la esfera de radio imaginario, la geometría de esta esfera imaginaria es la geometría de la hipótesis del ángulo agudo. Las analogías de LAMBERT estuvieron acompañadas de sus reflexiones sobre la naturaleza del espacio físico. Entre 1765 y 1770 sostuvo correspondencia sobre estos asuntos con KANT. LAMBERT no logra dar un paso crucial, a saber, ver la geometría euclídea como *la geometría de otra superficie*: el plano euclídeo. No, para él la geometría euclídea tiene un papel protagónico que la sitúa aparte. Es la geometría del espacio físico.

Debe observarse que la introducción de consideraciones de carácter analítico –como son las fórmulas trigonométricas– marca el inicio de una nueva etapa en la investigación del quinto postulado. El enfoque analítico del problema fue explorado por TAURINUS y el propio GAUSS. En el trabajo del primero, el estudio de las fórmulas hiperbólicas, la reiterada vinculación a la geometría de una esfera de radio imaginario y, principalmente, la proposición que vincula el área de un triángulo hiperbólico con su defecto, fueron abriendo paso a una forma distinta de conceptualizar el problema. En efecto, las fórmulas de la trigonometría hiperbólica expresaban relaciones matemáticas coherentes; si había una superficie cuya geometría tuviese asociada tal trigonometría, aquella coherencia sería reflejo de la posibilidad de existencia de dicha geometría. Faltaba poco para que se diera el paso en firme que faltó a LAMBERT.

En 1825 y 1826 aparecieron dos libros de geometría de TAURINUS. El primero se oponía a la posibilidad de una geometría no–euclídea debido que "repugna a la intuición", argumento que nos recuerda a los de SACCHERI. En el segundo, empero, su posición cambia y nos habla entonces de una geometría logarítmico-esférica que, sin embargo, añade, no puede corresponder a un plano aunque sí a otra posible superficie –pero no dice a cual superficie. Describamos brevemente el trabajo analítico de TAURINUS. Partiendo de la fórmula que vincula los lados con los ángulos de un triángulo esférico:

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{k}\right)\cos A,$$

donde k es el radio de la esfera, a, b, c son los ángulos del triángulo esférico y A el ángulo central subtendido por el arco en cuyos extremos se escuentran los ángulos b y c.



Si como radio usamos ik, se obtiene, de la fórmula anterior, la siguiente:

$$\cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} - \operatorname{senh}\frac{b}{k}\operatorname{senh}\frac{c}{k}\cos A$$

Esta relación vale entonces para los triángulos de la esfera de radio imaginario. Desde luego, el problema es entender a qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de esferas de radio imaginario. TAURINUS no aclaró este punto crucial, aunque consideró de importancia capital su esclarecimiento. Su trabajo tiene un aura de misterio. La última fórmula, empero, permite concluir que en tal "geometría" la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180 grados.

§4. Gauss

GAUSS (1777–1755), uno de los mayores matemáticos de la historia, fue quizás quien primero comprendió las implicaciones de una geometría no–euclídea. Por razones muy diversas, nunca publicó sus trabajos sobre el tema. Para conocer su trabajo hay que recurrir a la correspondencia que sostuvo con sus allegados a quienes confió parte de sus reflexiones. Parece que desde muy joven GAUSS se interesó por el problema; al comienzo, tal como hicieron SACCHERI y LAMBERT, GAUSS trató de demostrar el quinto postulado mediante reducción al absurdo. Creía entonces que la geometría del espacio físico era euclídea. Gradualmente se fue convenciendo de la posibilidad de existencia de otras geometrías lógicamente consistentes, sin calibrar todavía (algo que haría después) las conexiones entre tales geometrías posibles y la naturaleza del espacio. Hacia 1799 escribió a su amigo Farkas BOLYAI (padre de Janos BOLYAI, considerado como uno de los creadores de las geometrías no–euclídeas):

En cuanto a mí, he hecho algún progreso en mi trabajo. Sin embargo, el camino que he elegido me ha conducido a lugares distintos a los esperados... que me hacen dudar de la veracidad misma de la geometría. Ciertamente he encontrado resultados que muchos considerarían demostrados, pero que a mis ojos no lo están. Por ejemplo, si uno pudiera hallar un triángulo de área arbitrariamente grande, entonces estaría preparado para demostrar que la geometría es totalmente rigurosa. Para muchos, esto puede parecer un axioma, pero no para mí ... podría ocurrir que hubiese un límite al área de cualquier triángulo, sin importar que tan separados estuvieran sus vértices entre sí.

Fue WALLIS quien utilizó la existencia de triángulos de área arbitrariamente grande como un postulado. Hoy sabemos que esta afirmación es lógicamente equivalente al quinto postulado, de manera que los comentarios de GAUSS señalan que estaba al tanto de esta situación y que no había que confundir lo intuitivamente claro con las verdades necesarias de la geometría. Está implícita ya, en el trabajo de LAMBERT y TAURINUS, la existencia de una cota superior para las áreas de los triángulos: el área de un triángulo es proporcional a su defecto.

En 1817 GAUSS escribe a su amigo el astrónomo (aficionado) OLBERS:

Cada vez estoy más convencido que la verdad necesaria de nuestra geometría no puede ser demostrada... hasta entonces, deberemos colocar la geometría sobre las mismas bases... que la mecánica.

Esta cita ya no deja lugar a dudas: las dificultades para demostrar el quinto postulado, lo han llevado a dudar de la naturaleza euclídea del espacio físico. De alguna manera, la demostrabilidad del postulado y la naturaleza del espacio empiezan a aparecer como problemas desvinculados. En este punto es obligatoria la referencia a la carta que envió a TAURINUS en 1824:

La hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que 180 grados da lugar a una geometría curiosa, muy diferente a la nuestra (la euclídea) que he desarrollado a mi entera satisfacción, tanto que puedo, en ella, resolver cualquier problema excepto la determinación de una constante que no puede ser determinada a priori ... los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y hasta absurdos ... pero calma, una reflexión sostenida revela que no contienen nada imposible. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo se hacen arbitrariamente pequeños si tomamos los lados suficientemente grandes, a pesar de lo cual el área permanece siempre acotada... No encuentro contradicciones en esta geometría no–euclídea a pesar de todos mis esfuerzos...varias veces he expresado mi deseo de que la geometra euclídea no fuera verdadera (en el mundo físico) porque entonces tendríamos una unidad absoluta de longitud...

Si la geometría no–euclídea (la versión hiperbólica, para mayor claridad) fuera "la verdadera" con relación al espacio físico, entonces las áreas de los triángulos tendrían un límite superior en términos de la suma de los ángulos del triángulo en cuestión. Dado que el radián puede ser tomado como unidad absoluta de medida angular, quedaría determinada también una unidad absoluta de medida para la longitud. Este comentario de GAUSS nos muestra ya que las reflexiones de casi 33 años habían dado sus frutos.

La sugerencia sobre la naturaleza no–euclídea del espacio físico, iba en sentido contrario a las tesis kantianas expresadas por el filósofo de Koenisberg (1724–1804) en su *Crítica de la razón pura* (1781) cuando GAUSS tenía cuatro años de edad. Como sabemos, KANT señala que el conocimiento del espacio no es empírico sino proveniente de las estructuras apriorísticas del intelecto. Las percepciones sensoriales son organizadas y moldeadas por nuestras estructuras mentales de la misma manera que un recipiente da forma al líquido que se vierte en él. Dado que nuestras percepciones, siempre según KANT, se estructuran de acuerdo a un marco euclídeo, se concluye que sólo esta geometría es posible. Debemos mencionar que, por ejemplo, la teoría de la relatividad ha invalidado estas tesis kantianas al mostrar que la geometría del espacio está determinada por la distribución de masa en el espacio. En su momento, empero, las concepciones epistemológicas de KANT fueron responsables, en gran medida, de la resistencia que encontraron las ideas sobre la posibilidad de una geometría no–euclídea. Además, no podemos olvidar que durante más de dos mil años los geómetras estuvieron empeñados en demostrar la validez del quinto postulado, como consecuencia de una postura ontológica: el espacio físico está descrito fielmente por la geometría euclídea. GAUSS fue consciente de que esta tradición tan añeja representaba una resistencia formidable a sus ideas; sobre todo con el apoyo que ahora recibía del espléndido sistema kantiano. Quizá esto explique su reticencia, que repetidamente aparece en su correspondencia, a hacer públicos los resultados de sus reflexiones. GAUSS no era hombre de polémicas; seguramente conoció las consecuencias de las disputas entre NEWTON y LEIBNIZ.

Cuando, finalmente, GAUSS parecía disponerse a escribir sobre el tema, según consta en carta dirigida en 1831 a SCHUMACHER, recibió de su viejo amigo Farkas BOLYAI su libro *Tentamen inventutem studiosam in elementa matheseos purae introducendi* que contenía el ya célebre apéndice escrito por su hijo Janos BOLYAI sobre la geometría que "había creado de la nada". La respuesta a F. BOLYAI es un documento polémico. Queremos tan sólo rescatar, para beneficio de este escrito, que en esa carta GAUSS presenta su bella demostración de la relación entre el área y el defecto de un triángulo:

$$\text{área} = k^2(180^\circ - \text{suma de los ángulos})$$

Esta fórmula puede ser interpretada como una espléndida síntesis de las reflexiones de GAUSS. Nos señala la perfecta correspondencia con la fórmula conocida de la geometría esférica, para el cálculo del área de un triángulo esférico:

$$\text{área } (\triangle \text{ esférico}) = R^2(\text{suma de los ángulos } - 180^\circ)$$

donde R es el radio de la esfera. Desde nuestra perspectiva privilegiada podemos decir que uno de los puntos débiles de los geómetras de aquel entonces, fue no haber dado a la constante k (que vimos aparecer en el trabajo de TAURINUS, por ejemplo) una interpretación geométrica. Hoy en día sabemos que, así como el cuadrado del radio R es el recíproco de la curvatura de la esfera, también la constante k es el recíproco del valor absoluto de la curvatura de una superficie de curvatura constante negativa, que realiza la geometría no–euclídea estudiada por GAUSS y tantos otros geómetras.

§5. Lobachévsky

En 1829 se publicó el primer trabajo sobre las geometrías no–euclídeas. Su autor: Nicolai I. LOBACHÉVSKY (1792–1856), quien desarrolló de manera considerable la teoría de las paralelas. En 1840 publicó una versión en alemán de su trabajo, el cual fue leído y apreciado por GAUSS. Para los geómetras que desarrollaron las ideas no–euclídeas, fue inevitable su enfrentamiento con las ideas kantianas. LOBACHÉVSKY aceptó este reto y en 1835 escribió:

Es bien conocido que hasta la fecha, la teoría de las paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos realizados desde los tiempos de EUCLIDES *hasta la fecha, a lo largo de más de dos mil años, me han llevado a la convicción de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se deseaba demostrar... convencido de mi conjetura escribí mis argumentos en 1826.*

Es importante señalar la frase "los conceptos involucrados no contienen la verdad de lo que se desea demostrar"; ella es clave para entender lo que LOBACHÉVSKY está tratando de comunicar en este párrafo. En primera instancia, entendemos de su lectura, el postulado no puede ser deducido –como una verdad necesaria– de los restantes postulados de la geometría euclídea. Yendo un poco más lejos, entendemos que LOBACHÉVSKY está tratando de decirnos que la forma (axiomática) como ha sido desarrollada la geometría es defectuosa al extremo que no permite dilucidar una cuestión tan central como el postulado de las paralelas. Por eso, él propone un enfoque diferente de desarrollo de la geometría que expone, de manera por demás brillante, en su libro *Principios de geometría*, en donde toma como punto de partida la noción de *contacto entre los cuerpos*. Es decir, la geometría empieza con un estudio de los sólidos, luego se pasa las superficies como fronteras de sólidos y finalmente aparece la línea recta. Un orden inverso al que sigue EUCLIDES, y que no fue cuestionado por los geómetras durante todo el largo período de exploración del quinto postulado.

LOBACHÉVSKY no aceptó de manera acrítica la hipótesis del ángulo agudo para desarrollar su geometría; primero, desarrolla su concepción de la geometría del espacio; nos dice:

Las superficies, las líneas, los puntos así como se definen en la geometría sólo existen en nuestra imagina-

ción; para medir superficies y líneas hacemos uso de los cuerpos...

El concepto de *contacto* equivale a la posibilidad de dividir un cuerpo en secciones de diferentes tipos y de recomponerlas nuevamente. Los diferentes tipos de contacto definen las superficies, las líneas y los puntos. Sólo después de desarrollar mediante este acercamiento la llamada *geometría neutra*, es decir, la parte que no depende de un postulado sobre las paralelas, es cuando él nos presenta su teoría sobre la posibilidad de una geometría con más de una paralela a una recta por un punto exterior a ella. En palabras de LOBACHÉVSKY, la geometría neutra es:

El complejo de deducciones derivadas de aquellos conceptos que son concebidos de inmediato en nuestra mente a través de la representación de los cuerpos, representación a la que está atenta nuestra imaginación; deducciones que podemos extraer de la naturaleza directamente sin recurrir a nociones artificiales y extrañas.

En otros términos, para él, la geometría neutra es la que elaboramos a partir de conceptos geométricos fundamentales derivados del movimiento de los sólidos ordinarios. El recurso metodológico que emplea LOBACHÉVSKI consiste en ir presentando resultados de la geometría del plano (neutro) y luego compararlos con los correspondientes resultados de la geometría esférica. Esto cumple con el propósito de ir abriendo camino a las ideas no–euclídeas que nos presentará más adelante a propósito de la hipótesis del ángulo agudo. Algunas de las diferencias fundamentales entre la geometría de la esfera y la geometría neutra del plano, son:

1. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados (*diferente* de 180 grados).
2. Las "rectas" de la geometría esférica tienen longitud finita (son los círculos máximos), mientras que la recta plana tiene longitud infinita.
3. Sobre la esfera es posible definir, además de una unidad absoluta de medida angular, una unidad absoluta de medida de longitud. Por ejemplo, podemos tomar como tal la longitud de un círculo máximo.
4. Sobre la esfera, dos triángulos semejantes son necesariamente congruentes; es decir, la igualdad de ángulos implica la igualdad de lados correspondientes.

A esta forma de geometría no–euclídea no podía LOBACHÉVSKY dedicar sus esfuerzos, ya que él incluía entre los conceptos primitivos de su geometría, la infinitud de la recta. Sin embargo, la esfera era algo así como un "objeto de reflexión" que mostraba también las diferencias y analogías entre los resultados de la geometría basada en la hipótesis del ángulo obtuso y la del ángulo agudo. Por ejemplo, lo que en la esfera es el exceso del triángulo, en la geometría de la hipótesis del ángulo agudo es el defecto del triángulo.

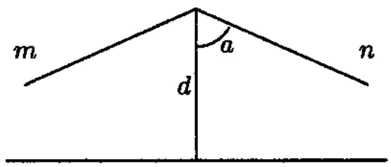
Como bien escribe LOMBARDO–RADICE, LOBACHÉVSKY no es sólo un lógico, también es un físico, un experimentador. El hecho que la "medición real" nos lleve a concluir la veracidad del teorema de PITÁGORAS y que la suma de los ángulos del triángulo es 180 grados, tan sólo es una prueba de la concordancia de la geometría ordinaria con la experiencia ordinaria, dentro de los límites de la observación ordinaria, y no más allá de éstas. Por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo puede diferir de 180 grados por una cantidad muy pequeña, insensible a las mediciones prácticas por precisas que éstas sean. Pero las diferencias pueden hacerse ostensibles a medida que abandonamos la esfera de nuestra experiencia ordinaria. Esta reflexión llevó a LOBACHÉVSKY a intentar la exploración empírica de la naturaleza del espacio físico mediante el cálculo de la suma de los ángulos del triángulo formado por la tierra, el sol y la estrella Sirio. Desafortunadamente para sus propósitos, todavía a esta escala, las diferencias con respecto a los clásicos 180 grados resultaba despreciable.

Para LOBACHÉVSKY, los principios geométricos no se derivan exclusivamente de la razón, con independencia de los objetos materiales. Los principios de una ciencia son el resultado último de la investigación, son resultado de un delicado proceso de abstracción. Todo su trabajo puede verse como inmerso dentro de un programa de sistematización de la investigación matemática. El elemento dialéctico de su obra se manifiesta en la toma de conciencia de la existencia de diferentes esferas de validez de las "leyes geométricas". La geometría euclídea era, en este enfoque, la geometría práctica.

LOBACHÉVSKY utilizó las fórmulas de la trigonometría hiperbólica como soporte de la coherencia lógica de su sistema geométrico. Bajo la hipótesis del ángulo agudo, pudo demostrar que en la figura anexa, si las rectas m y n son las paralelas a derecha e izquierda (en la geometría euclídea el ángulo de paralelismo es recto y, por lo tanto, las rectas coinciden) entonces se cumple la siguiente relación fundamental:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \exp(-d)$$

que muestra, analíticamente, la relación entre la unidad de medida angular y la unidad de medida de longitud.



Mediante el recurso de los métodos analíticos, se pudieron establecer las bases de una geometría no–euclídea recurriendo a figuras que, podríamos considerar como "metáforas" de los objetos geométricos de tal sistema. Coincidimos con GRAY, en que no ha sido suficientemente valorado el papel que jugó en el trabajo estrictamente técnico de la geometría de LOBACHÉVSKI (también en la versión de BOLYAI, que no vamos a considerar aquí) el recurso a los métodos analíticos.

Intentemos una síntesis de lo expuesto hasta ahora:

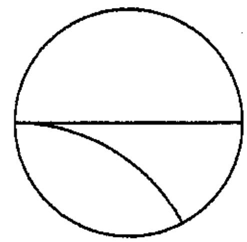
(i) La casi totalidad de geómetras anteriores a GAUSS, vieron el problema de las paralelas como la oportunidad de corregir una deficiencia en los *Elementos* de EUCLIDES. No tuvieron duda alguna sobre la naturaleza euclídea del espacio. Tampoco sobre la coherencia del sistema euclídeo, pues lo suponían un fiel reflejo del espacio. En esencia, era un problema ubicado dentro del terreno deductivo. No había preocupaciones ontológicas derivadas de una reflexión sobre la naturaleza del espacio.

(ii) GAUSS y LOBACHÉVSKY (también J. BOLYAI) plantearon el problema de modo distinto. En la imposibilidad de hallar una demostración del quinto postulado no vieron la incapacidad de los geómetras, sino la incapacidad del sistema geométrico para reflejar, por un lado, la naturaleza del espacio y, por otro lado, para suministrar los elementos necesarios para producir una demostración del postulado.

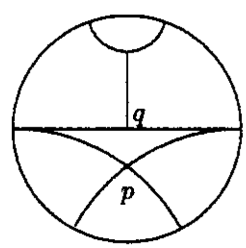
Ninguno de ellos logró, empero, pasar de la convicción a la verificación de la consistencia de la geometría. Desde luego, esto es natural ya que, en gran medida, fue a raíz de la investigación sobre el quinto postulado como se dió la toma de conciencia sobre la construcción de modelos de un sistema axiomático con el propósito de verificar su consistencia. Fue el trabajo posterior de BELTRAMI, KLEIN, POINCARÉ y otros investigadores, lo que permitió esclarecer el problema de la consistencia y fijar, para siempre, a la geometría no–euclídea de GAUSS, LOBACHÉVSKY y BOLYAI, en el mapa de las matemáticas.

§6. Modelo de Poincaré

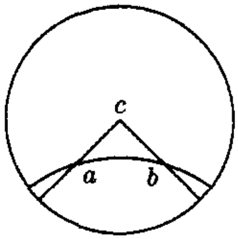
Daremos ahora una pequeña introducción a un modelo, debido a POINCARÉ, de la geometría hiperbólica. Para ello hay que diseñar primero un diccionario. Tomaremos como "plano" de nuestro modelo el interior de un círculo. Los "puntos" serán los puntos del interior de tal círculo y las "rectas" los arcos de circunferencia interiores al círculo y que sean ortogonales al borde del mencionado círculo.



Este dibujo ilustra lo que hemos dicho sobre el modelo. Las rectas pueden ser los diámetros o cualquier otro segmento de circunferencia ortogonal al disco fijo. ¿Cómo podemos ilustrar en el modelo que se cumple el postulado de LOBACHÉVSKY, es decir, que por un punto exterior a una recta pasan al menos dos paralelas? De la

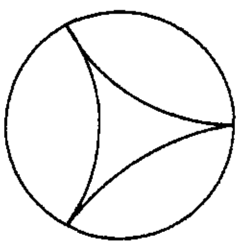


siguiente forma: por el punto p (véase la figura adjunta), exterior a la recta representada por el diámetro, pasan al menos dos paralelas; por el punto q, pasa una "hiperparalela" a la recta representada por el diámetro. Nótese que se ilustra el teorema "dos hiperparalelas tienen una perpendicular común". Los ángulos se miden, en el modelo, de manera euclídea. La siguiente figura ilustra el teorema central "la suma de los ángulos de un triángulo siempre es menor que 180 grados": esto "se ve" en el triángulo abc. Por último ilustremos lo que sería un triángulo de área máxima: sabemos que debe ser un



triángulo con defecto máximo, es decir, cuya suma de ángulos sea cero.

Para que el área sea máxima los tres vértices deben estar en el infinito, representado por el borde del círculo del modelo. Estas ilustraciones del modelo de POINCARÉ nos señalan, además, el gran esfuerzo de imaginación que debieron hacer los geómetras que incursionaron en el estudio de esta geometría. Guiados por una intuición extraordinaria y un coraje intelectual que no se detuvo ni ante la epistemología dominante, la de KANT, ni ante cualquier otro obstáculo.



Ante el lector, queda el siguiente reto: articular esta investigación con los desarrollos de la geometría diferencial, en donde la constante intrínseca adquiere su real dimensión: la curvatura del espacio. Entender que el sello característico de la geometría intrínseca de una superficie es la curvatura, abrió posibilidades inéditas a la geometría.

§7. Hacia la estructura

Hasta el siglo XIX la matemática podía apoyarse tanto en la geometría como en el álgebra para buscar sustentación para sus afirmaciones. La toma de conciencia de que el contenido de verdad quedaba sustituído por la consistencia del modelo, volcó los esfuerzos hacia la aritmética. ¿Estaría allí la fuente de verdad que parecía necesaria para continuar el trabajo matemático? Veamos la situación que prevalecía en el cálculo. Desde GALILEO y NEWTON, una de las tradiciones generadoras del cálculo extrajo, del contexto geométrico del estudio dinámico del movimiento, las reglas de operación del nuevo cálculo. El libro de POLYA, *Matemáticas y razonamiento plausible* reproduce varios ejemplos de esto. Aquí, sin embargo, no puede hablarse de una actitud totalmente anclada en el pensamiento empirista pues en el estudio del movimiento aparece un concepto que no pudo ser extraído de allí: el *concepto de velocidad instantánea*.

El desarrollo del cálculo, del cálculo *infinitesimal*, siguió las líneas que le eran posibles con este sustento conceptual. Desde luego hubo momentos de crisis como el que se dió alrededor del problema de la cuerda vibrante y que en el fondo reflejó una incapacidad del cálculo, hasta ese momento, para modelar el movimiento de un continuo. Pero el momento de crisis que nos interesa registrar se dió durante el siglo XIX. Es cuando WEIERSTRASS publica (1872), gracias a los buenos oficios de su discípulo Paul DU BOIS–REYMOND, su teorema sobre *la existencia de funciones continuas que en ningún punto tienen derivada*. Las consecuencias de este resultado son profundas. Hasta entonces, para hablar de una función continua se decía que era "aquella cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel". Aún hoy en día usamos esta expresión cuando queremos dar una idea "informal" sobre la continuidad de una función. Pero el resultado de WEIERSTRASS mostró que se podía hablar de la continuidad en un lenguaje totalmente analítico. Es decir, no era necesario recurrir a las imágenes geométricas, a lo que los dibujos sugerían para poder hablar "con precisión" sobre la continuidad. La existencia de funciones continuas sin derivadas así lo mostraban, pues tales funciones *no se pueden graficar*. Aparecieron desde entonces advertencias sobre lo "peligroso" que resultaba confiar demasiado en las conclusiones extraídas de un dibujo. Se dieron "demostraciones falsas" basadas en dibujos de triángulos, que llevaban a la conclusión de que "todos los triángulos son equiláteros", por ejemplo. *El ojo era digno de desconfianza*, como ha dicho P. DAVIS.

La crisis no era sólo de carácter metodológico. Las estructuras conceptuales, la continuidad, por ejemplo, debieron entonces ser revisadas. Esto nos habla de un cambio en la naturaleza misma del conocimiento. Una vez más el problema de la desustanciación. La toma de conciencia sobre la estructura. Desde luego, en esta perspectiva se quedan muchas cosas por fuera: unas por la presión del tiempo, otras por mi desconocimiento. Pero creo que lo que sí puede verse, desde los ojos de nuestra teoría –parafraseando a HANSON– es que la idea de demostración está vinculada orgánicamente a la concepción de los objetos de la matemática y que ambos son resultado de una historia.

Bibliografía

1. **Euclides**, *Elementos de Euclides*, Gredos, Madrid, 1991.
2. **Hilbert, D.**,*Fundamentos de la geometría*, C.S.I.C., Madrid, 1952.
3. **Courant, R. , Robbins,H.**, *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, Madrid, 1962.
4. **Whiteside, T.**, it Mathematical Papers of I. Newton, Cambridge University Press, 1967.
5. **Bonola, R.**, *Non-Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1955.
6. **Lobachévsky**, *Nuovi Principii della Geometria*, Lombardo-Radice (ed), Boringheri, 1974.
7. **Torreti, R.**, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel, 1978.
8. **Piaget, J y García**, *Psicogénesis e historia de la ciencia*,Siglo XXI, 1982.