UNA CONSTRUCCION DEL "BRANCHING-BROWNIAN-MOTION"

por

Liliana Blanco Castañeda*

Resumen

Blanco Castañeda, L. Una construcción del "Branching-Brownian-Motion". Rev. Acad. Colomb. Cienc. **22**(83): 213-220. 1998. ISSN 0370-3908.

Se presenta una aproximación del "Branching-Brownian-Motion" mediante procesos más simples. El método imita el presentado por Billengsley (1968) en la construcción del movimiento browniano.

Palabras claves: *proceso browniano de ramificación, tensión, distribuciones finito-dimensionales.*

Abstract

A "Branching-Brownian-Motion" approximation is presented by means of simple processes. The employed method imitates one presented by Billingsley (1968) in the construction of Brownian motion.

Key words: "Branching, Brownian motion, tightness, finite dimensional distributions.

Introducción

El movimiento browniano es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ que permite decribir el movimiento de una partícula en un vaso de agua, causado por choques moleculares. Este fenómeno físico fue observado por primera vez por el botánico inglés Brown en el año 1827. Pero la primera descripción matemática de dicho fenómeno es debida a Einstein en el año de 1905. Sin embargo fue Wiener quien presentó por primera vez una formulación matemática completa de dicha teoría en el año 1918.

Es bien conocido el hecho de que el movimiento Browniano se puede aproximar mediante procesos más simples (ver, por ejemplo, **Billingsley**, (1968)). Nosotros nos proponemos imitar el método allí expuesto para dar una aproximación del "Branching-Brownian-Motion".

El "Branching-Brownian-Motion" es un proceso que se desarrolla de la siguiente manera: Una partícula que parte en el tiempo t=0 de la posición x=0 se mueve según un movimiento Browniano estándar $(Bo\ (t))_{t\geq 0}$

* Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad Nacional de Colombia. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

hasta un punto $L_o \in (0, \infty)$ que no depende del movimiento y que se distribuye según la distribución exponencial $Exp(t)$. En el tiempo $T = L_0$ la partícula se divide en un número aleatorio de partículas según una distribución dada $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ donde $p_n := P(\text{"}n\ hijos\text{"})$ con $p_0 + p_1 = 0$. Los descendientes generan procesos independientes del mismo tipo.

Para poder imitar el método presentado por Billingsley es necesario construir un espacio métrico separable que desempeñe el papel del espacio $C[0,1]$ de todas las funciones continuas de valor real definidas sobre el intervalo $[0,1]$ junto con la métrica del "*sup*". El espacio que se considera es el espacio de todos los árboles denotado por $B[0,1]$ cuya construcción se describe detalladamente en **(Blanco, (1991))** : Un árbol continuo $b \in B[0,1]$ puede considerarse como un conjunto finito de funciones de $C[0,1]$, en cuyo caso llamamos ramas del árbol a los elementos de dicho conjunto, o como una función definida sobre $[0,1]$ y con valores en un espacio métrico apropiado, el cual fue denotado por $\mathbf{F}$. Los valores

$$b[t] = \left(b(t), \left((\iota_1(t), \beta_1(t)), \ \ldots \ , \left(\iota_{b(t)}(t), \beta_{b(t)}(t)\right)\right)\right)$$

de dicha función tienen la siguiente interpretación:

$b(t)$:= Número de individuos presentes en el tiempo t

$\iota_n(t)$:= Marca del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, $n = 1, 2, \ldots, b(t)$.

$\beta_n(t)$:= Posición del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, $n = 1, 2, \ldots, b(t)$.

A los individuos presentes en el tiempo $t = 1$ los llamamos individuos finales y la colección de todos los individuos finales de un árbol se denota con $\mathcal{A}$.

Si $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ son árboles continuos, es decir colecciones finitas de funciones de $C[0,1]$, entonces la distancia Δ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se define como sigue:

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := h(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}),$$

siendo h la distancia de Hausdorff sobre

$$\{A \subset C[0,1] : \# A < \infty\}.$$

(ver, **Castaing & Valadier, (1977)**).

2 Aproximación Propuesta

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos un proceso $(Z_t^n)_{t \in [0,1]}$ con las siguientes propiedades:

1. Partimos de $t = 0$ con un individuo en posición 0.

2. Cada individuo vive un tiempo fijo $\frac{1}{n}$.

3. Sea i un individuo que en $t = \frac{j}{n}$ está en posición x y que vive hasta el tiempo $\frac{j+1}{n}$. En ese intervalo de tiempo el individuo se mueve hasta $x + \xi_{i,n}^j$, donde las $\xi_{i,n}^j$ son variables aleatorias independientes con

$$P\left(\xi_{i,n}^j = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\xi_{i,n}^j = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

En $t = \frac{j+1}{n}$ el individuo va a ser reemplazado bien sea por $N_{i,n}^j$ descendientes según una distribución dada $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_{2,\ldots})$, $p_0 + p_1 = 0$, con probabilidad $\frac{1}{n}$, o bien sea por sí mismo (exactamente un descendiente) con probabilidad $1 - \frac{1}{n}$.

4. Los descendientes se reproducen en la misma forma, independientemente unos de otros e independientemente de las variables aleatorias ξ.

Sea $f(s) := \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k$ la función generadora correspondiente a p.

Vamos a suponer que $f''(1) < \infty$.

Queremos demostrar que las realizaciones del proceso anteriormente descrito, interpoladas linealmente, se asemejan para $n \to \infty$ a las realizaciones del "Branching-Brownian-Motion".

Cuando el individuo sea reemplazado por más de un descendiente diremos que ha tenido lugar una división auténtica del individuo, en caso contrario diremos que tuvo lugar una división falsa del individuo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideraremos las siguientes variables aleatorias:

L_ι^n := Tiempo de espera hasta la primera división auténtica de ι-ésimo individuo.

A_ι^n :=Número de divisiones falsas del ι-ésimo individuo antes de su primera división auténtica.

N_ι :=Número de descendientes que tiene el ι-ésimo individuo en su primera división auténtica.

No es díficil verificar que para cada individuo ι se satisface que:

$$A_\iota^n \stackrel{d}{=} G\left(\frac{1}{n}\right) \ \ y \ \ L_\iota^n \xrightarrow[n\to\infty]{d} T_\iota, \text{ donde } T_\iota \stackrel{d}{=} Exp(1),$$

es decir A_ι^n tiene distribución geométrica con parámetro

$\frac{1}{n}$ y L_ι^n tiende en distribución hacia una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro 1.

Sea $0 \le t \le 1$ fijo. Supongamos que el individuo ι nace en el punto s, con $s > t$, consideraremos al individuo en el intervalo $[0, s]$ como un individuo ficticio que está vivo en dicho intervalo. Igualmente luego de cada división auténtica, el individuo será considerado como un individuo ficticio que vive hasta el tiempo $t = 1$. De esta forma tiene sentido asignarle a cada individuo ι :

1. El proceso $(S_\iota^n(t))_{0\le t\le 1}$ que describe su movimiento, esto es

$$S_\iota^n(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_{\iota,n}^k$$

y

2. La variable aleatoria

$$\begin{aligned} X_\iota^n : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow (C[0,1],\ B(C[0,1])) \\ \omega &\longmapsto X_\iota^n(\omega) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad t \longmapsto X_\iota^n(t,\omega), \end{aligned}$$

donde

$$X_\iota^n(t,\omega) := S_\iota^n(t,\omega) + (nt - [nt])\,\xi_{\iota,n}^{[nt]+1}.$$

Sea $\iota = \langle 0 \rangle$ el individuo inicial. Puesto que las variables aleatorias $\xi_{0,n}^k$ son independientes y tienen la misma distribución, se sigue del teorema de Donsker que

$$X_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W, \text{ siendo } W \text{ la medida de Wiener.}$$

Esto es, se satisface para cada $0 \le t \le 1$ que:

$$X_0^n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} W_t^0,$$

siendo $\{W_t^0\}_{t\in[0,1]}$ el movimiento Browniano estándar.

Como $X_0^n(t)$ no depende ni de L_0^n ni de N_0^n concluimos además que

$$\left(X_0^n(t),\ \hat{L}_0^n,\ N_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(W_t^0,\ \hat{T}_0,\ N_0\right),$$

donde las variables aleatorias $\hat{L}_0^n$, $\hat{T}_0$ se obtienen a partir de L_0^n y T_0 respectivamente, al restringir su rango al intervalo $[0,1]$ de la siguiente manera:

$$\hat{L}_0^n(\omega) := \begin{cases} L_0^n(\omega) & ,\text{si } L_0^n(\omega) \le 1 \\ 1 & ,\text{si } L_0^n(\omega) > 1 \end{cases}.$$

Análogamente se define $\hat{T}_0$.

Por otra parte, puesto que los individuos se reproducen independientemente unos de otros, se tiene que para cada hijo i del individuo $\langle 0 \rangle$ se satisface que

$$\left(X_i^n(t),\ \hat{L}_i^n,\ N_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(W_t^i,\ \hat{T}_i,\ N_i\right), \quad i = 1,2,\ldots N_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la variable aleatoria Y_n dada por:

$$\begin{aligned} Y_n : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\longrightarrow B[0,1] \\ \omega &\longmapsto Y_n(\omega) : [0,1] \longrightarrow \mathbf{F} \\ & \qquad t \longmapsto Y_n[t,\omega], \end{aligned}$$

donde cada elemento de $\mathbf{F}$ está constituido por un número n junto con una lista de n individuos a cada uno de los cuales se le ha asignado una posición en $\mathbb{R}$. Es así que

$$\begin{aligned} Y_n[t,\omega] := (m_t, ((\iota_1^n(t,\omega), Y_1^n(t,\omega)), \ldots, \\ (\iota_{m_t}^n(t,\omega), Y_{m_t}^n(t,\omega)))) \end{aligned}$$

tiene la siguiente interpretación :

$m_t :=$ Número de individuos presentes en el tiempo t.

$\iota_j^n(t,\omega) :=$ "Marca" del j-ésimo individuo presente en t, $j = 1, 2, \ldots, m_t$.

$Y_j^n(t,\omega) = Y_{\iota_j^n(t,\omega)}^n(t,\omega) :=$ Posición del j-ésimo individuo presente en t.

La posición de cada individuo está definida como la suma del incremento en posición del individuo mismo y de sus antepasados.

Nosotros afirmamos que las distribuciones de las variables aleatorias Y_n convergen débilmente hacia las del "Branching-Brownian-Motion".

Puesto que en $B[0,1]$ los conjuntos finito-dimensionales forman una clase determinante (ver, **Blanco, (1991)**) es suficiente probar que:

1. La sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Tensión, es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que $P_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ para todo n.

2. Las distribuciones finito-dimensionales de Y_n convergen a las del "Branching-Brownian-Motion"

Teorema 2.1.
La sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de Tensión.

Idea de la demostración
Es suficiente verificar (ver, **Blanco, (1993)**) que:
1. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $r > 0$ tal que

$$P(\{\omega : Y_n(\omega) \text{ tiene más de } r \text{ ramas}\}) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $\eta > 0$ existe un $0 < \delta < 1$ tal que

$$P\left(\left\{\omega : \hat{W}_{Y_n(\omega)}(\delta) \ \geq \eta\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Recordamos que $\hat{W}_b(\delta) := \max_l \sup_{|s-t|<\delta} |b_l(t) - b_l(s)|$ donde b_l denota la l-ésima rama del árbol b.

Para demostrar 1. se considera para cada $n \in \mathbb{N}$ el proceso $\left(Z^*_{k,n}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donde $Z^*_{k,n}$:= Número de individuos presentes en el tiempo $\frac{k}{n}$, y se demuestra que existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$P\left(Z^*_{n,n} > r\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para verificar 2. se toman $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ fijos. De 1. se sabe que existe un $r > 0$ tal que

$$P\left(\{\omega : Y_n(\omega) \text{ tiene más de } r \text{ ramas}\}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los posibles individuos presentes en $t = 1$ para todas las posibles estructuras familiares con a lo más r individuos finales (es decir individuos presentes en $t = 1$). No tenemos en cuenta las longitudes de vida de los individuos particulares. Es claro que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{A}$ depende de r. Sea $R(r) := \#\mathcal{A}$. No es díficil verificar que para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2R(r)}$ existe un $0 < \delta < 1$ tal que

$$P\left(\left\{\omega : \hat{W}_{Y^n(\omega)}(\delta) \ \geq \eta\right\}\right) \leq \varepsilon' R(r) = \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 2.2.

Las distribuciones finito-dimensionales de Y_n convergen hacia las del "Branching-Brownian-Motion".

Idea de la demostración

Sea $0 \leq t \leq 1$ fijo. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathbf{F})$, donde $\mathcal{B}(\mathbf{F})$ denota la σ-álgebra de Borel correspondiente al espacio métrico $\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned} &P_{Y_n} \prod\nolimits_t^{-1}(\mathbf{A}) = P\left(Y_n[t,\omega] \in \mathbf{A}\right) \\ &= P((m_t, ((\iota_1^n(t,\omega), Y_1^n(t,\omega)), \ldots, \\ &\quad \iota_{m_t}^n(t,\omega), Y_{m_t}^n(t,\omega)))) \in \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Ahora bien, hay solamente un número finito de posibles estructuras familiares de manera tal que en el tiempo t haya m_t individuos, es decir necesitamos saber cuáles individuos se reproducen antes del tiempo t y cuántos hijos tienen, para que en el tiempo t haya m_t individuos. En otras palabras, necesitamos información acerca de un número finito de variables N. Para que una de dichas estructuras familiares se realice, las longitudes de vida de los individuos involucrados deben satisfacer determinadas desigualdades, es decir requerimos información acerca de un número finito de variables $\hat{L}^n$.

Si se desea que el vector de posiciones

$$\left(Y_1^n(t,\omega), \ldots, Y_{m_t}^n(t,\omega)\right)$$

pertenezca a un determinado conjunto Borel de $\mathbf{R}^{m_t}$ (que evidentemente depende de $\mathbf{A}$) necesitamos que se satisfagan ciertas condiciones sobre un número finito de variables X^n. Es decir, se llega a que $P_{Y_n} \prod_t^{-1}$ se puede expresar con ayuda de un número finito de variables $X^n, \hat{L}^n$ y N. Puesto que

$$\left(X^n(t),\, \hat{L}^n,\, N\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(W_t,\, \hat{T},\, N\right),$$

donde $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$ es el movimiento Browniano estándar $T \stackrel{d}{=} Exp(1)$ y N es una variable aleatoria con función generadora f, se sigue que las distribuciones finito-dimensionales de Y_n convergen. En el caso de que tengamos un número finito de puntos $0 \leq t_1 < t_{2<\ldots} t_k \leq 1$ se obtiene la convergencia deseada haciendo un razonamiento similar.

Con el fin de aclarar las ideas anteriores vamos a hacer la demostración detallada para una situación particular del caso unidimensional □

3 Convergencia de las distribuciones finito-dimensionales de Y_n (caso especial).

Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t \leq 1$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ fijos.

Tenemos que

$m_t = 2$, $Y_1^n(t,.) \leq y_1$ y $Y_2^n(t,.) \leq y_2$ si y sólo si existen $x < t$ y $u \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{gathered} \hat{L}_0^n = x,\ \ X_0^n(x,.) = u,\ \ \hat{L}_1^n > t - x,\quad \hat{L}_2^n > t - x, \\ \left[X_1^n(t,.) - X_1^n(x,.)\right] \leq y_1 - u \\ \text{y } \left[X_2^n(t,.) - X_2^n(x,.)\right] \leq y_2 - u. \end{gathered}$$

Por lo tanto,

$$P(\{\omega : m_t = 2,\ Y_1^n(t,\omega) \le y_1\ ,\ \ Y_2^n(t,\omega) \le y_2\}) = \int_{\substack{x<t\\ u\in\mathbb{R}}} P(\hat{L}_1^n > t-x, \hat{L}_2^n > t-x, [X_1^n(t,.) - X_1^n(x,.)] \le y_1 - u, [X_2^n(t,.) - X_2^n(x,.)] \le y_2 - u) d\mu_n$$

donde μ_n es la distribución de $\left(\hat{L}_0^n,\ X_0^n\left(\hat{L}_0^n\right)\right)$ siendo

$$\left(\hat{L}_0^n, X_0^n\left(\hat{L}_0^n\right)\right) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to ([0,1]\times\mathbb{R}, \mathcal{B}([0,1]\times\mathbb{R}))$$
$$\omega \longmapsto \left(\hat{L}_0^n(\omega),\ X_0^n\left(\hat{L}_0^n(\omega), \omega\right)\right).$$

Dado $\hat{L}_0^n = x$ se tiene que las variables aleatorias

$$\hat{L}_1^n\ ,\ \hat{L}_2^n\ , [X_1^n(t,.) - X_1^n(x,.)]\ ,\ \ [X_2^n(t,.) - X_2^n(x,.)]$$

son independientes.

Por lo tanto,

$$\begin{gathered} f_n(x,u) := P(\hat{L}_1^n > t-x,\ \hat{L}_2^n > t-x, \\ [X_1^n(t,.) - X_1^n(x,.)] \le y_1 - u, \\ [X_2^n(t,.) - X_2^n(x,.)] \le y_2 - u) = \\ P(\hat{L}_1^n > t-x) P(\hat{L}_2^n > t-x) \cdot \\ P([X_1^n(t,.) - X_1^n(x,.)] \le y_1 - u) \cdot \\ P(\ [X_2^n(t,.) - X_2^n(x,.)] \le y_2 - u). \end{gathered}$$

Es claro que

$$f_n(x,u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x,u)$$

donde

$$f(x,u) := \mathrm{e}^{-2(t-x)} \frac{1}{2\pi(t-x)} \int_{-\infty}^{y_1-u} \mathrm{e}^{\frac{-v^2}{2(t-x)}} dv \int_{-\infty}^{y_2-u} \mathrm{e}^{\frac{-v^2}{2(t-x)}} dv.$$

Nuestro objetivo es demostrar que $\int f_n d\mu_n$ converge. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Demostraremos que la sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente convergente.
2. Verificaremos que las f_n son funciones medibles.
3. Luego se prueba que para todo $\varepsilon > 0$ se satisface que:

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mu(\partial_{\delta,\varepsilon}, f_n) = 0$$

siendo $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ y

$$\partial_{\delta,\varepsilon}, f_n := \begin{Bmatrix} (x,u) \in [0,t) \times \mathbb{R}: \\ \exists (x',u'), (x'',u'') \in S((x,u),\delta) \\ \textit{con } |f_n(x',u') - f_n(x'',u'')| > \varepsilon \end{Bmatrix}$$

donde $S((x,u),\delta)$ denota la bola abierta de centro en x y radio δ.

Para poder concluir de 1., 2. y 3. la convergencia propuesta haremos uso de los teoremas siguientes:

Teorema 3.1.

Sea $\mathcal{S}$ un espacio métrico arbitrario y $B(\mathcal{S})$ la colección de todas las funciones acotadas, medibles, de valor real definidas sobre $\mathcal{S}$.

Sea M un conjunto de $B(\mathcal{S})$ y P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{S}$. Entonces

$$\limsup_{n\to\infty, F\in M} \left| \int f dP_n - \int f dP \right| = 0$$

para todas las sucesiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad que convergen débilmente a P (Notación: $P_n \Rightarrow P$) si y sólo si

1. $\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathcal{S},\ f \in M\} < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in M} P(\{x : \omega_f S(x,\delta) > \varepsilon\}) = 0,$

donde $S(x,\delta)$ denota la bola de centro en x y radio δ, y

$\omega_f S(x,\delta) := \sup\{|f(u) - f(y)| : u, y \in S(x,\delta)\}.$

Demostración

Ver **(P.Billingsley, F.Topsøe (1967))** □

Teorema 3.2.

Sea P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{S}$, $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $B(\mathcal{S})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$\int \psi_n dP_n \longrightarrow \alpha$ para todas las sucesiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad sobre $\mathcal{S}$ con $P_n \Rightarrow P$

si y sólo si

1. La sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada.
2. $\int \psi_n dP \longrightarrow \alpha.$
3. Para todo $\varepsilon > 0$ se satisface

$$\limsup_{\delta\to 0, n\to\infty} P(\partial_{\delta,\varepsilon}, \psi_n) = 0$$

donde

$$\partial_{\delta,\varepsilon}, \psi_n := \begin{Bmatrix} x \in S : \exists x', x'' \in S(x,\delta) \\ \text{tales que } |\psi_n(x') - \psi_n(x'')| > \varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Demostración

Ver **(F.Topsøe (1967))** □

Teorema 3.3.

$\mu_n \Rightarrow \mu$, donde μ posee la siguiente densidad

$$g(x,u) := e^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{\frac{-u^2}{2x}}, \quad o < x < 1, \; u \in \mathbb{R}$$

la masa restante e^{-1} se distribuye con la densidad condicionada $\frac{e^{\frac{-u^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi}}$ sobre $\{1\} \times \mathbb{R}$.

Demostración
Sea

$$\left(\hat{L}_0^n, X_0^n\right) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow [0,1] \times C[0,1]$$
$$\omega \longmapsto \left(\hat{L}_0^n(\omega), X_0^n(\omega)\right).$$

Puesto que $\hat{L}_0^n$, X_0^n son independientes entonces

$$\left(\hat{L}_0^n, X_0^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\hat{L}, X\right)$$

con $L \stackrel{d}{=} Exp(1)$ y $X \stackrel{d}{=} \mathbf{W}$, siendo $\mathbf{W}$ la medida de Wiener.

Consideremos la función $\mathbf{h}$ definida por

$$\mathbf{h} : [0,1] \times C[0,1] \longrightarrow [0,1] \times \mathbb{R}$$
$$(x,g) \longmapsto (x, g(x)).$$

No es díficil verificar que $\mathbf{h}$ es una función continua. Por lo tanto (ver, **Billingsley (1968)**) se tiene que:

$$\mathbf{h}\left(\hat{L}_0^n, X_0^n\right) \xrightarrow{d} \mathbf{h}(L, X)$$

es decir

$$\left(\hat{L}_0^n(.), X_0^n\left(\hat{L}_0^n(.), .\right)\right) \xrightarrow{d} \mu$$

donde μ tiene la densidad dada en $(*)$ □

Teorema 3.4.
Las funciones f_n son medibles

Idea de la demostración
Para la demostración se siguen los siguientes pasos:
1. Se demuestra que si T es un espacio medible y si

$$\varphi : T \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x) \longmapsto \varphi(t,x)$$

es continua a derecha en x y medible en t entonces $\varphi(\,.\,,\,.)$ es medible.

2. Para cada $n \in \mathbb{R}$ consideraremos

$$X_n(z) := \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k + (nt - [nt])\,\xi_{[nt]+1}, \quad z \in \mathbb{R},$$

donde $\xi_k : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias independientes con

$$P\left(\xi_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\xi_k = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$$

y se demuestra que para cada y fijo la función

$$G_n(\,.\,,y) := P(X_n(.) \leq y)$$

es medible

3. Haciendo uso de 1. y 2. se demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$\tilde{g}_n^{(i)} : [0,t) \times \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$(x,y) \mapsto P\left(X_i^n(t-x,\,.) \leq y\right),$$

$i = 1,2$ son medibles

4. Utilizando 3. se demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$g_n^{(i)} : [0,t) \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto P\left(X_i^n(t,\,.) - X_i^n(x,\,.) \leq y\right),$$

$i = 1,2$ son medibles

5. Se verifica que para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones

$$l_n^{(i)} : [0,t) \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$(x,y) \longmapsto P\left(L_i^n \geq t - x\right), \quad i = 1,2$$

son medibles

6. Usando 4. y 5. se concluye que las funciones f_n son medibles □

Para una demostración detallada de lo anterior ver **(Blanco (1991))**.

Teorema 3.5.

Sea $M := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int f dQ_k - \int f_n d\mu \right| = 0$$

para todas las sucesiones $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad definidas sobre $S := [0,t) \times \mathbb{R}$ con $Q_k \Rightarrow \mu$.

Demostración

Es claro que M es un subconjunto del conjunto de funciones acotadas, medibles, de valor real definidas sobre $S := [0,t) \times \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo pero arbitrario.

Tomemos $S_\varepsilon := [0, t-\varepsilon) \times \mathbb{R}$ y sea $\eta > 0$ fijo pero arbitrario.

Como

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu(S_\varepsilon^c) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t-\varepsilon}^{t} \mathrm{e}^{-x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2x}} du \right] dx = 0$$

se tiene que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu(S_\varepsilon^c) < \eta$ si $\varepsilon \le \varepsilon_0$.

Por otra parte se tiene que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en $S_{\varepsilon_0} := [0, t-\varepsilon_0) \times \mathbb{R}$ (ver **Blanco, (1991)).**

Por lo tanto existe un $n_0(\eta)$ tal que:

$|f_n(x,u) - f(x,u)| < \eta$, para todo $n \ge n_0(\eta)$ y para todo $(x,u) \in S_{\varepsilon_0}$.

Sea $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre S con $Q_k \Rightarrow \mu$.

Como $\mu(\partial S_{\varepsilon_0}) = 0$ entonces se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} Q_k(S_{\varepsilon_0}) = \mu(S_{\varepsilon_0})$$

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S_{\varepsilon_0}} f\, dQ_k = \int_{S_{\varepsilon_0}} f\, d\mu,$$

ya que f es continua y acotada en S_{ε_0}.

Por otra parte tenemos que para todo $n \ge n_0(\eta)$ se satisface:

$$\left| \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n d\mu \right| < 2\eta + \left| \int_{S_{\varepsilon_0}} f\, dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}} f\, d\mu \right|.$$

De donde se tiene que existe un $k_0(\eta) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \ge k_0(\eta)$ se satisface que

$$\left| \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n d\mu \right| < 3\eta,$$

para todo $n \ge n_0(\eta)$.

Vamos a demostrar que

$$\lim_{k\to 0} \left| \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}} f_n d\mu \right| = 0,$$

para todo $n < n_0(\eta)$.

Sea $n < n_0(\eta)$ fijo. Tenemos que $f_n Q_k \Rightarrow f_n \mu$, ya que $\mu(D_{f_n}) = 0$ siendo

$D_{f_n} :=$ Conjunto de puntos de discontinuidad de f_n (ver, **Billingsley (1968)**).

Por lo tanto existe un $m_0(\mu) \in \mathbf{N}$ tal que

$$\left| \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n d\mu \right| \le 3\eta,$$

para todo $k \ge m_0(\eta)$y para todo $n = 1, 2. \ldots, n_0(\eta)$.

Tomando $N_0(\eta) := \max\{k_0(\eta), m_0(\eta)\}$ se sigue que

$$\left| \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n d\mu \right| \le 3\eta,$$

para todo $k \ge N_0(\eta)$y para todo $n. (*)$.

A continuación demostraremos que existe un $m(\eta) \in \mathbb{N}$ con

$$\left| \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n d\mu \right| \le 3\eta,$$

para todo $k \ge m(\eta)$y para todo $n. (**)$.

Para ello tomamos $n \in \mathbb{N}$ fijo. Puesto que $|f_n| \le 1$ se sigue que para todo k

$$\begin{aligned} \left| \textstyle\int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n dQ_k - \int_{S_{\varepsilon_0}^c} f_n d\mu \right| &\le \mu(S_{\varepsilon_0}^c) + Q_k(S_{\varepsilon_0}^c) \\ &< \eta + Q_k(S_{\varepsilon_0}^c). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k\to\infty} Q_k(S_{\varepsilon_0}^c) = \mu(S_{\varepsilon_0}^c)$$

se tiene que existe un $m(\eta) \in \mathbb{N}$ con $Q_k(S_{\varepsilon_0}^c) < 2\eta$ para todo $k > m(\eta)$, de donde se sigue $(**)$.

De $(*)$ y $(**)$ concluimos que

$$\left| \int f_n dQ_k - \int f_n d\mu \right| \le 6\eta$$

para todo $k \ge N(\eta) := \max\{m(\eta), N_0(\eta)\}$ y para todo n.

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int f_n dQ_k - \int f_n d\mu \right| = 0 \quad \square$$

Finalmente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.6

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_n = \int f d\mu$$

Demostración

Del teorema anterior y del teorema 2.1 se sigue que

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\partial_{\delta,\varepsilon}, f_n) = 0, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

esto implica que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mu\left(\partial_{\delta,\varepsilon},f_n\right)=0,\quad \text{para todo } \varepsilon>0.$$

Puesto que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada y

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu_n=\int f d\mu$$

se sigue entonces por el teorema 3.2 el resultado □

Bibliografía

Billengsley, P. 1968. Convergence of Probability Measures, Wiley, New York.

Billengsley, P. & Topsφe 1967. Uniformity in weak convergence, Z. Wahrschein. verw. geb. **7**, 1-16.

Blanco, L. 1991, Approximation der "branching-Brownian-Motion". Tesis doctoral, Johannes-Gutenberg- Universität in Mainz.

________. 1993, Compacidad relativa y "Tightness" en el espacio B [0, 1], Revista Colombiana de Estadística, Número **27**.

Castaing, C. & M. Valadier, 1997, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Springer Verlag.

Topsφe 1967, Preservation of weak convergence under mappings, Ann. Math. Statistic., **38,** 1661-1665.