ALGUNOS PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS

por

José F. Escobar

Resumen

Escobar, José F. Algunos problemas isoperimétricos. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **22**(82): 109-115. 1998. ISSN 0370-3908.

Se estudian la desigualdad isoperimétrica clásica, autovalores del Laplaciano y desigualdades de Sobolev en espacios curvilíneos, y las relaciones entre ellas.

Palabras claves: Desigualdades isoperimétricas, espacios curvilíneos.

Abstract

We study the classical isoperimetric inequality, eigenvalues for the Laplacian and Sobolev inequalities on curved spaces and the relationship among them.

Key words: Isoperimetric inequalities, curved spaces.

La desigualdad isoperimétrica clásica relaciona el área A de un dominio Ω en el plano con el perímetro L de su frontera $\partial\Omega$:

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{1}$$

y la igualdad vale solamente si el dominio es un disco. Probablemente éste sea el teorema de geometría diferencial global más antiguo y está relacionado con el siguiente problema: de todas las curvas simples cerradas en el plano de longitud L, ¿cuál encierra mayor área? Desde la antigüedad los matemáticos conocían que el círculo es la respuesta a esta pregunta; Pappus (siglo III D.C.) le atribuye el descubrimiento a Zenodoro.

Si consideramos dominios que están limitados por curvas simples de Jordan entonces es suficiente realizar la prueba de la desigualdad (1) para dominios convexos. Para verlo basta considerar la envoltura convexa del dominio, la cual aumenta el área y decrece el perímetro. Esta propiedad es válida solamente en el plano y hace la demostración de la desigualdad (1) más fácil que sus generalizaciones. Por esta razón a través de los años los matemáticos han elaborado pruebas con ideas y técnicas diferentes.

El primer paso a una demostración matemáticamente rigurosa fué dado por J. Steiner en el año de 1838. Steiner dió varias pruebas diferentes pero incompletas, porque suponía la existencia de una solución al problema. Sus pruebas fueron completadas más tarde por diversos matemáticos. Vale la pena mencionar las de F. Edler (1882) y Carathéodory (1910).

*Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853, e–mail: escobar@math.cornell.edu. La investigación del autor es parcialmente financiada por el premio Presidential Faculty Fellow.

Un avance fundamental en el desarrollo de este problema fué obtenido por H. A. Schwarz en el año de 1884. Influenciado por los trabajos de K. Weierstrass sobre la existencia de minimizantes a problemas variacionales, Schwarz probó en su artículo (Schwarz 1884) la desigualdad isoperimétrica en dimensión 3:

$$A^3 \geq 36\pi V^2,$$

donde A y V representan el área de la frontera y el volumen del sólido, respectivamente.

Finalmente, E. Schmidt (Schmidt 1939) obtuvo la desigualdad isoperimétrica en dimensión n:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \geq c_n[\mathrm{vol}_n(\Omega)]^{\frac{n-1}{n}} \tag{2}$$

para cualquier dominio compacto $\Omega \subseteq R^n$ con frontera $\partial\Omega$ suave, donde $c_n = \mathrm{vol}_{n-1}[S^{n-1}]/\{\mathrm{vol}_n[B^n]\}^{\frac{n-1}{n}}$ y B^n y S^{n-1} representan respectivamente la bola y la esfera unitarias en el espacio euclideano de dimensión n.

El método de Schmidt es una combinación del método de simetrización introducido por Steiner y del cálculo va riacional.

Existen por lo menos una docena de pruebas de la desigualdad isoperimétrica en el plano. Tal vez la más elemental es la siguiente:

Sea $C : [a, b] \to R^2$ una curva cerrada, simple y suave. El perímetro L de la curva puede ser calculado por la si guiente integral

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

Usando el teorema de Green podemos expresar el área A encerrada por la curva C como la integral

$$A = -\int_a^b y\frac{dx}{ds}ds = \int_a^b x\frac{dy}{ds}ds. \tag{3}$$

Supongamos que la curva C está parametrizada por longitud de arco t. Como queremos comparar la curva C con el círculo, hacemos la siguiente construcción. Sean D_1 y D_2 dos rectas paralelas tangentes a la curva C y cuya distancia entre sí es $2r$. Considere un círculo de radio r que tiene las rectas D_1 y D_2 como tangentes y cuya intersección con la curva C es vacía. Tomando coordenadas rectangulares con origen en el centro del círculo, podemos escribir la parametrización de la curva $C(t) = (x_1(t), y_1(t))$ y la del círculo $\alpha(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (x_1(t), y_2(t))$, $t \in [0, L]$.

Usando las igualdades en (3) obtenemos

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L \left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_2\frac{dx_1}{dt}\right) \\ &\leq \int_0^L \sqrt{\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_2\frac{dx_1}{dt}\right)^2} \\ &\leq \int_0^L \sqrt{\left(x_1^2 + y_2^2\right)\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right)} \\ &= \int_0^L \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = Lr. \end{aligned}$$

Observe que la media geométrica de dos números es menor o igual que la media aritmética y la igualdad vale si los números son iguales. Entonces

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr, \tag{4}$$

lo cual implica que

$$4\pi A r^2 \leq L^2 r^2,$$

que a su vez muestra la validez de la desigualdad (1). Si la igualdad se tiene en (1) entonces en las anteriores desigualdades se tiene igualdades; en particular en (4) obtenemos que $A = \pi r^2$ y $L = 2\pi r$. Note que r no depende de la dirección de la recta D_1, así que

$$\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_2\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = (x_1^2 + y_2^2)\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right),$$

o, equivalentemente,

$$\left(x_1\frac{dx_1}{dt} - y_2\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = 0.$$

Es decir

$$\frac{x_1}{\frac{dy_1}{dt}} = \frac{y_2}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_2^2}}{\sqrt{\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2}} = \pm r.$$

Entonces $x_1 = \pm r\frac{dy_1}{dt}$. Como r no depende de la dirección de D_1 podemos intercambiar x_1 con y_1 en la última igualdad y obtener $y_1 = \pm r\frac{dx_1}{dt}$. Entonces

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right] = r^2.$$

Un método bastante directo para probar la desigualdad (2) en el caso de frontera suave es el del cálculo de variaciones. Sea Ω un dominio compacto en R^n con frontera $\partial\Omega$ suave. Sea $f : \partial\Omega \to R$ una función diferenciable. Sea Ω_t el dominio que tiene por frontera la superficie $\partial\Omega_t$ que es obtenida desplazando cada punto de la frontera $\partial\Omega$ por el vector tfN donde N es el campo vectorial normal exterior a la superficie $\partial\Omega$. Sean $A(t)$ el área de $\partial\Omega_t$ y $V(t)$ el volumen de Ω_t, entonces las fórmulas de la primera variación son

$$A'(0) = \int_{\partial\Omega} fH \quad y \quad V'(0) = \int_{\partial\Omega} f,$$

donde H es la curvatura media de $\partial\Omega$. Si la superficie $\partial\Omega$ tiene área mínima entre todas las superficies que limitan el mismo volumen debe tenerse que si $\int_{\partial\Omega} f = 0$ entonces $\int_{\partial\Omega} fH = 0$. Por lo tanto la curvatura media H debe ser constante en $\partial\Omega$. Si H no es constante, entonces existen puntos en la frontera de Ω, x y y, con $H(x) \neq H(y)$ y podemos encontrar una función f que tiene soporte en pequeñas vecindades de los puntos x y y, y que además satisface

$$\int_{\partial\Omega} f = 0 \quad e \quad \int_{\partial\Omega} fH < 0.$$

Usando el argumento anterior es posible mostrar que si $\partial\Omega$ tiene área mínima entre todas las superficies que encierran el mismo volumen, entonces la curvatura media es constante. Una pregunta surge naturalmente: ¿una superficie de curvatura media constante es necesariamente una esfera? La respuesta a esta pregunta tiene una historia interesante y los trabajos elaborados por Alexandrov o Reilly nos permiten asegurar que una superficie que tiene área mínima entre todas las superficies que encierran el mismo volumen tiene curvatura media constante y por lo tanto es una esfera. A primera vista, lo anterior resuelve el problema isoperimétrico. Al estudiar con mayor atención la frase anterior vemos que realmente es un teorema de unicidad: ninguna superficie diferente a la esfera puede tener área mínima entre aquéllas que encierran el mismo volumen. Lo que falta por mostrar para resolver el problema isoperimétrico es que existe alguna superficie que minimiza el área. Esta fué la parte que Steiner no dilucidó en sus "pruebas" de la desigualdad isoperimétrica.

La desigualdad isoperimétrica ha sido considerada en variedades diferenciales. Recordemos que para cualquier punto x en una variedad de dimensión 2, si denotamos por $L(r)$ la longitud del círculo geodésico de radio r y centro x, y por $A(r)$ el área del disco correspondiente entonces tenemos que

$$K(x) = -\lim_{r\to 0} \frac{L(r)^2 - 4\pi A(r)}{\pi^2 r^4},$$

donde $K(x)$ representa la curvatura gaussiana en el punto x.

De la fórmula anterior claramente obtenemos que si $K(x) > 0$ entonces la desigualdad isoperimétrica (1) no es satisfecha en bolas geodésicas de radio pequeño. En general, para cualquier variedad compacta M sin frontera, la desigualdad (1) no es satisfecha. Basta considerar dominios de la forma $M - B_r(x)$ donde $B_r(x)$ es una bola geodésica de radio r (r pequeño) y centro x. Sin embargo existen otros tipos de desigualdades isoperimétricas que muestran el efecto de la curvatura del espacio. Por ejemplo en la esfera S^2 de curvatura gaussiana igual a 1 vale que

$$L^2 \geq 4\pi A^2 - A^2,$$

mientras que en el espacio hiperbólico H^2 de curvatura gaussiana -1 se tiene que

$$L^2 \geq 4\pi A^2 + A^2.$$

Los analistas y geómetras se han ocupado de estudiar la influencia de la curvatura en la desigualdades isoperimétricas en general (Burago-Zalgaller 1988).

De la anterior discusión aparece naturalmente la siguiente pregunta: ¿en una variedad completa, no compacta y con curvatura no positiva vale la desigualdad (1)?

En los últimos 20 años los espacios con singularidades han sido estudiados con gran intensidad por la escuela rusa de Alexandrov. M. Gromov los hizo populares entre los geómetras en los Estados Unidos. En un trabajo reciente con J. Cao hemos probado que la desigualdad isoperimétrica vale en espacios lineales a trozos de curvatura no positiva. En estos espacios, que pueden contener singularidades (en cuyo caso la métrica no es suave), se puede definir la noción de curvatura usando comparación de triángulos. En una variedad diferenciable y de curvatura seccional $K \leq 0$ vale que la suma de los ángulos interiores en cualquier triángulo geodésico es menor o igual que π. La anterior propiedad la tomamos como definición de curvatura $K \leq 0$ en cualquier espacio geodésicamente completo. Nuestra demostración usa técnicas desarrolla das en trabajos anteriores e introduce varias ideas nuevas debido a la consideración de singularidades del espacio.

En el caso de variedades riemannianas con métricas suaves y de curvatura no positiva, la desigualdad isoperimétrica (2) es conocida sólo en dimensiones 2, 3 y 4 por los trabajos (Weil 1926), (Kleiner 1992) y (Croke 1984), respectivamente.

Otra direccioń importante de la desigualdad isoperimétrica es la relación con el problema de autovalores del Laplaciano (Osserman 1978), los cuales pueden ser caracterizados por problemas variacionales. Si consideramos el funcional

$$F(y) = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\int_0^{2\pi} y^2}$$

entre todas las funciones diferenciables que satisfacen la condición $\int_0^{2\pi} y(x)dx = 0$, entonces la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional (5) es

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda_1 y = 0 \quad \text{en} \quad [0, 2\pi],$$
$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(2\pi) = 0,$$

donde λ_1 es el mínimo del funcional F. La ecuación anterior corresponde al primer autovalor del operador $L = \frac{d^2}{dx^2}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ con respecto a la condición de frontera tipo Neumann. En una variedad riemanniana (M^n, g) con frontera y de dimensión n, el problema análogo es el siguiente: minimizar el funcional

$$F(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv}{\int_M u^2 dv}$$

entre todas las funciones no nulas, diferenciables hasta la frontera y que satisfacen la condición

$$\int_M u dv = 0,$$

donde dv representa la medida riemanniana inducida por la métrica.

La ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional anterior es:

$$\Delta u + \lambda_1 u = 0 \quad \text{en} \quad M,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial M,$$

donde λ_1 es el mínimo del funcional F entre todas las funciones que satisfacen la condición integral anterior.

Hay muchos trabajos estimando el valor de la constante λ_1 (el primer autovalor no nulo del Laplaciano con respecto a la condición de frontera de tipo Neumann) en términos de la geometría de la variedad M. En esta dirección una de mis contribuciones es el siguiente teorema (Escobar 1990).

Teorema. *Sea (M^n, g) una variedad con frontera de dimensión n. Si la curvatura de Ricci satisface $Ric(g) \geq (n-1)g$ y la frontera es convexa, entonces $\lambda_1 \geq n$. Si $\lambda_1 = n$ entonces (M, g) es isométrica al hemisferio superior $S^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1, x_n \geq 0\}$.*

El anterior teorema nos dice que para cualquier función no nula u tal que $\int_M u dv = 0$, se tiene que

$$\int_M u^2 \leq \frac{1}{n} \int_M |\nabla u|^2 dv$$

y si existe una función que verifique la igualdad entonces (M^n, g) es isométrica a S^n_+. Esto nos permite identificar el hemisferio norte entre todas las variedades con frontera convexa y con curvatura de Ricci mayor que la curvatura de la esfera unitaria. La desigualdad anterior hace parte de la familia de desigualdades tipo Poincaré y es fundamental en el estudio de muchos problemas en ecuaciones en derivadas parciales, ya que nos asegura que si la norma del gradiente de una función en L^2 es acotada entonces la norma de la función en L^2 también es acotada.

En problemas de frontera en ecuaciones diferenciales parciales es necesario estimar la norma en L^2 de una fun ción en la frontera de la variedad, en términos de la norma L^2 del gradiente en el interior. Esto nos lleva a estudiar el siguiente problema isoperimétrico: minimizar el funcional

$$S(u) = \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv}{\int_{\partial M} u^2 d\sigma}$$

entre todas las funciones no nulas, diferenciables hasta la frontera y que satisfacen la condición

$$\int_{\partial M} u d\sigma = 0,$$

donde $d\sigma$ representa la medida riemanniana inducida por la métrica en la frontera ∂M de M. La ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional anterior es:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \quad && \text{en} \quad M, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \nu \varphi \quad && \text{sobre} \quad \partial M. \end{aligned} \tag{6}$$

donde ν es el míinimo del funcional S.

(6) es conocido como el problema de Steklov porque fué introducido por él en su trabajo (Stekloff 1902). Steklov estaba interesado en el problema (6) por su aplicación a la física. En este caso la función u representa la temperatura del cuerpo M cuando se estabiliza (es decir no depende mas del tiempo) y el flujo en la frontera es proporcional a la temperatura. Mi contribución al problema de Steklov es el siguiente teorema.

Teorema. *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana con frontera y de curvatura de Ricci no negativa. Si $n \geq 3$ y la segunda forma fundamental π satisface $\pi \geq c$ entonces $\nu > c/2$. Si $n = 2$ y la curvatura geodésica k_g de la frontera satisface que $k_g \geq k_0$ entonces $\nu \geq k_0$ y la igualdad vale sólo en la bola euclideana de radio k_0^{-1}.*

Retomando de nuevo la desigualdad isoperimétrica (2) observe que la constante c_n puede ser caracterizada variacionalmente como

$$I_\alpha(R^n) = \inf_{\Omega \in C} \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{[\text{vol}_n(\Omega)]^\alpha},$$

donde C es el conjunto de todos los subdominios compactos de R^n con frontera suave y $\alpha = \frac{n-1}{n}$. Es posible dar una caracterización funcional de la constante isoperimétrica $I_\alpha(R^n)$. De hecho, usando la fórmula de co-área es posible mostrar

$$I_\alpha(R^n) = \hat{I}_\alpha(R^n) \tag{7}$$

donde

$$\hat{I}_\alpha(R^n) = \inf_{u \in C_0^\infty - \{0\}} \frac{\int_{R^n} |\nabla u| dx}{\left(\int_{R^n} |u|^{\frac{1}{\alpha}} dx\right)^\alpha}.$$

Observe que para cualquier función diferenciable y de soporte compacto

$$\hat{I}_\alpha(R^n)\Big(\int_{R^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{R^n} |\nabla u| dx.$$

Aplicando la desigualdad anterior a la función $|u|^s$ y usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\hat{I}_\alpha(R^n)\Big(\int_{R^n} |u|^{s\frac{n}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq s\int_{R^n} |u|^{s-1}|\nabla u| dx$$
$$\leq s\Big(\int_{R^n} |u|^{\frac{(s-1)p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{R^n} |\nabla f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Escogiendo s tal que $\frac{sn}{n-1} = \frac{(s-1)p}{p-1}$, es decir $s = \frac{p(n-1)}{n-p}$ se tiene que para $1 \leq p < n$

$$\Big(\int_{R^n} |u|^{\frac{pn}{n-p}} dx\Big)^{\frac{n-p}{pn}}$$
$$\leq \Big(\hat{I}_\alpha(R^n)\Big)^{-1} \frac{pn}{n-p}\Big(\int_{R^n} |\nabla f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} dx.$$

En particular para $n \geq 3$ y $p = 2$, cualquier función dife renciable definida en R^n y con soporte compacto satisface que

$$\Big(\int_{R^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}$$
$$\leq \Big(\hat{I}_\alpha(R^n)\Big)^{-1} \frac{2n}{n-2}\Big(\int_{R^n} |\nabla f|^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx. \tag{8}$$

Análogamente se pueden definir en cualquier variedad riemanniana los números $I_\alpha(M)$ y $\hat{I}_\alpha(M)$, α real, y la igualdad (7) también vale. La desigualdad (8) puede generali zarse a cualquier variedad riemanniana compacta con o sin frontera. Usando una partición de la unidad se obtiene que para cualquier función suave y que se anula en la frontera se cumple que

$$\Big(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv\Big)^{\frac{n-2}{n}} \leq C\Big[\int_M |\nabla u|^2 dv + \int_M u^2\Big].$$

La anterior desigualdad es muy útil en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo hemos perdido una propiedad fundamental de la desigualdad (8). La desigualdad (8) es invariante bajo translaciones y dilataciones y más generalmente, es invariante bajo transformaciones conformes del espacio euclideano. Es natural considerar una desigualdad en cualquier variedad riemanniana que generalice (8), que posea la propiedad de ser invariante bajo deformaciones conformes de la métrica y para cualquier función en general (no sólo para aquéllas que se anulen en la frontera). Consideremos el problema isoperimétrico siguiente. Sea (M^n, g) una variedad riemanniana de dimensión $n \geq 3$. Defina la energía de la función u, $E(u)$, como

$$E(u) = \int_M (|\nabla u|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R u^2)\, dv + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} h u^2\, d\sigma,$$

donde las funciones R y h representan la curvatura escalar en M y la curvatura media de ∂M respectivamente, calculadas con respecto a la métrica g. Considere el número real $Q(M)$ definido como

$$Q(M) = \inf\{Q(u) \mid u \in C^1(\overline{M}), \quad u \neq 0 \text{ en } M\}, \tag{9}$$

donde

$$Q(u) = \frac{E(u)}{\left(\int_{\partial M} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

En el trabajo (Escobar 1992) mostramos el siguiente

Teorema. *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana con frontera de dimensión $n \geq 3$. Entonces*

$$Q(M) \leq Q(S^n_+) \tag{10}$$

La igualdad vale sólo si (M^n, g) es conformemente equivalente a S^n_+.

La demostración de la desigualdad estricta en una variedad que no sea conformemente equivalente a S^n_+ involucra el uso del Teorema de la Masa Positiva en Teoría de Relatividad, para espacios con frontera probado en mi artículo (Escobar 1992).

La consecuencia más importante del teorema anterior es que cuando se tiene la desigualdad estricta en (10) entonces el problema variacional (9) posee un mínimo u. Tal función u satisface la ecuación de Euler–Lagrange

$$\begin{aligned} &\Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)} Ru + \frac{n-2}{4(n-1)} \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \text{ en } M, \\ &\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} hu = 0 \text{ sobre } \partial M, \end{aligned} \tag{11}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Usando el principio del máximo se muestra que la función u es estrictamente positiva. Entonces las ecuaciones en (11) significan geométricamente que la métrica riemanniana $u^{\frac{4}{n-2}} g$ posee curvatura escalar constante λ y la frontera tiene curvatura media nula. Lo anterior implica el siguiente resultado (Escobar 1992).

Teorema. *Toda variedad compacta de dimensión $n \geq 3$, es conformemente equivalente a una de curvatura escalar constante con frontera mínima.*

Análoga a la desigualdad (8) existe otra desigualdad en el espacio $R^n_+ = \{(x,t) \mid x \in R^{n-1}, t > 0\}$, $n \geq 3$, que es conformemente invariante y relaciona la integral de la función en la frontera con la norma del gradiente en el interior. Más precisamente, para cualquier función suave y de soporte compacto se tiene que

$$\left(\int_{\partial R^n_+} |u|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq c(n) \int_{R^n_+} |\nabla u|^2 dx dt. \tag{12}$$

En algunos problemas geométricos o analíticos es importante saber cuál es la menor constante $c(n)$ que satisface (12). En (Escobar 88) e independientemente Beckner en (Beckner 1993), mostré que la mejor constante es $c(n) = \frac{2}{(n-2)} \sigma^{-\frac{1}{n-1}}$ y la igualdad es obtenida sólo por las funciones

$$u(x,t) = \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon + t)^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{(n-2)}{2}}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Es natural extender tal desigualdad a una variedad riemanniana manteniendo la propiedad de la invarianza bajo deformaciones conformes de la métrica. En el artículo (Escobar 92) estudié el siguiente cociente de tipo Sobolev

$$Q(M, \partial M) = \inf\{Q_2(u) \mid u \in C^1(\overline{M}), \quad u \neq 0 \text{ en } \partial M\},$$

donde

$$Q_2(u) = \frac{E(u)}{\left(\int_{\partial M} |u|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dv \right)^{\frac{n-2}{n-1}}}.$$

En (Escobar 1992) mostré el siguiente

Teorema. *Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio acotado y con frontera suave entonces*

$$Q(\Omega, \partial\Omega) \leq Q(B, \partial B)$$

donde B es la bola en R^n. La igualdad se obtiene sólo si $\Omega = B$.

Una consecuencia del teorema anterior es:

Teorema. *Cualquier dominio acotado en R^n es conformemente equivalente a uno de curvatura escalar cero y con frontera de curvatura media constante.*

El anterior teorema puede entenderse como una generalización del Teorema de la Aplicación de Riemann que dice que para cualquier dominio simplemente conexo en el plano existe una aplicación conforme del dominio en la bola. En dimensiones mayores a dos tal resultado no es posible debido a que las aplicaciones conformes están determinadas localmente (Teorema de Liouville). Sin embargo sí existen métricas que tienen dos propiedades de la métrica euclideana en la bola: curvatura escalar cero y curvatura media de la frontera constante.

Recientemente he mostrado que las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)} Ru + \frac{n-2}{4(n-1)} \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \text{ en } M, \\ &\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} hu = \frac{n-2}{2} \mu u^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \partial M, \end{aligned}$$

admiten una solución positiva y suave en una variedad compacta de dimensión $n \geq 3$. Tal solución u define la métrica riemanniana $u^{\frac{4}{n-2}} g$ que tiene curvatura escalar constante λ y la curvatura media de la frontera es constante e igual μ.

Bibilografía

Beckner, W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser–Trudinger inequality, Annals of Math. No. 138, 1993, 213–242

Burago, Y. and Zalgaller, V. Geometric Inequalities Springer–Verlag 1988.

Carathéordory, C. and Study, E.. Zwei Beweise des Satzes, dass der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfanges den grösten Inhalt hat Math. Ann. Vol. 58, 1910, 133-140.

Cao J. and Escobar, J. F. An isoperimetric comparison theorem for PL-manifolds of non-positive curvature Manuscrito.

Croke, C. A sharp four dimensional isoperimetric inequality Comm. Math. Helv. 59, 1984, 419–435.

Edler, F. Vervollständigung der Steinersche elementargeometrischen Beweise für des Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt als jede andere Figur gleich grossen Umfanges Gött. Nachr. 1882 p. 73.

Escobar, J. F. Sharp Constant in a Sobolev Trace Inequality, Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 37, No. 3, 1988, 687–698.

Escobar, J. F. Uniqueness theorems on conformal deformations of metrics, Sobolev inequalities and an eigenvalue estimate, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.. 43, No. 7, 1990, 857–883.

Escobar, J. F. The Yamabe problem on manifolds with boundary, Jour. of Diff. Geom., Vol. 25, 1992, 21–84.

Escobar, J. F. Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary, Annals of Mathematics, Vol. 136, 1992, 1–50.

Escobar, J. F. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature and constant mean curvature on the boundary, Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 45, No. 4, 1996, 917–943.

Escobar, J. F. The Geometry of First Non-zero Stekloff Eigenvalue, aparecerá en Jour. of Funcional Analysis.

Kleiner, B. An isoperimetric Comparison Theorem, Inventiones Mathematicae, Vol. 108, 1992, 37–47.

Osserman, R. The isoperimetric inequality Bulletin of the AMS, Vol. 84, No.6, 1978, 1181–1238.

Schmidt, E. Ueber das isoperimetrische Problem in Raum von n Dimensionen Math. Z. 44, 1939, 689–788.

Schwarz, H. A. Beweise des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Köper gleichen Volumens, Gött. Nachr. 1884 pp 1–13.

Steiner, J. Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze J. reine ang. Math. 18 (1838) 281–296.

Weil, A. Sur les surfaces on curboure negative C. R. Acad. Sci., Paris 182, 1926, 1069–1071.