

TODOS LOS CAMINOS CONDUCEN A PAUL ERDÖS*

por

Rodrigo De Castro¹, Jerrold W. Grossman²

Resumen

R. D Castro & J. W. Grossman: Todos los caminos conducen a Paul Erdős. Rev. Acad. Colomb. Cienc. 23(89):563-582, 1999. ISSN 0370-3908.

La noción de número de Erdős ha estado presente en la comunidad matemática por más de treinta años como una manera de cuantificar el hecho de que la investigación científica se ha convertido durante el siglo XX en un proceso colaborativo, no siendo ya simplemente una actividad realizada por individuos aislados. En este artículo exploramos algunos caminos de colaboración (relativamente cortos) que pueden seguirse desde Paul Erdős hasta investigadores dentro y fuera de las matemáticas. En particular, hemos determinado que todos los ganadores de la Medalla Fields, hasta el año 1998, tienen un número de Erdős menor que 6 y que más de 60 premios Nobel de física, química, economía o medicina tienen un número de Erdős número que 9.

Palabras clave: Colaboración, número de Erdős, Medalla Fields, premio Nobel, investigación científica.

Abstract

The notion of Erdős number has floated around the mathematical research community for more than thirty years, as a way to quantify the common knowledge that mathematical and scientific research has become a very collaborative process in the twentieth century, not an activity engaged in solely by isolated individuals. In this paper we explore some (fairly short) collaboration paths that one can follow from Paul Erdős to researchers inside and outside of mathematics. In particular, we find that all the Fields Medalists up through 1998 have Erdős numbers less than 6, and that over 60 Nobel prize winners in physics, chemistry, economics, and medicine have Erdős numbers less than 9.

Key words: Collaboration, Erdős number, Fields Medal, Nobel prize, scientific research.

* Este artículo es la versión en español (aumentada y actualizada) del artículo *Famous trails to Paul Erdős* por Rodrigo De Castro y Jerrold W. Grossman, publicado en *The Mathematical Intelligencer* 21 (1999), 51-63. Autorización para la publicación de esta traducción ha sido otorgada por el Editor de *Intelligencer*, Dr. Chandler. Davis.

1 Departamento de Matemáticas y Estadística, universidad Nacional de Colombia, Bogotá. e-mail: rdcastro@matematicas.unal.edu.co. Web: www.matematicas.unal.edu.co/rdcastro/rdc.html/.

2 Department of Mathematics and Statistics, Oakland University, Rochester, Michigan, USA. e-mail: grossman@oakland.edu. Web: www.oakland.edu/~grossman/.

1. Una componente destacada del grafo de colaboración

Los vértices del grafo de colaboración C son todos los investigadores (vivos o muertos) en todas las disciplinas académicas, con una arista entre los vértices u y v si u y v han publicado conjuntamente un artículo o un libro de investigación (posiblemente con más co-autores). Como sucede en cualquier grafo simple (no dirigido), en C hay una noción de *distancia* entre dos vértices u y v : $d(u, v)$ es el número de ejes de la trayectoria más corta entre u y v , si tal trayectoria existe, ∞ en cualquier otro caso (se asume que $d(u, u) = 0$).

Para el presente artículo nos interesa el subgrafo de colaboración centrado en PAUL ERDŐS (1913–1996). Si v es un investigador arbitrario, el número $d(\text{PAUL ERDŐS}, v)$ se llama el *número de Erdős* de v . Esto quiere decir que el propio PAUL ERDŐS tiene número de ERDŐS 0, y sus co-autores tienen número de ERDŐS 1. Quienes no tienen número de ERDŐS 0 o 1, pero han publicado con alguien cuyo número de ERDŐS es 1, tienen número de ERDŐS 2, y así sucesivamente. Quienes no están conectados de esta manera con PAUL ERDŐS tienen número de ERDŐS ∞ . El conjunto de todos los individuos con número de ERDŐS finito constituye la *componente de Erdős* de C .

La componente de ERDŐS de C sobrepasa por su asombroso tamaño y por la manera como sus miembros (vértices) se aglomeran alrededor de ERDŐS. Más de 500 personas tienen número de ERDŐS 1 y más de 5600 tienen número de ERDŐS 2. En la historia de la publicación académica en matemáticas, nadie ha estado cerca de igualar el número de colaboradores que PAUL ERDŐS tuvo en vida, ni el número total de artículos investigativos que publicó (más de 1500, casi el 70% de los cuales fueron trabajos conjuntos). Con su muerte en 1996, el hombre que inspiró tantas ideas matemáticas se “alejó” —para usar su propia terminología— pero su leyenda ha revivido (véanse, como ilustración de este fenómeno, dos biografías recientes [107], [152]). Y parte de esta leyenda, dentro y fuera del mundo matemático, se ha perpetuado con la noción de ‘*número de Erdős*’.

La primera mención explícita en la literatura del ‘número de ERDŐS’ parece ser [85], donde se afirma que este “pasatiempo” fue ajeno al propio ERDŐS durante mucho tiempo. Pero el primer estudio sistemático de la componente de ERDŐS de C fue realizado por el segundo autor en [92] y [94], labor que continúa en la página Web, *The Erdős Number Project*, [89]. Este sitio en Internet contiene la lista de todos los individuos con

número de ERDŐS 1 (actualmente 505) y sus respectivos co-autores con número de ERDŐS 2 (actualmente 5608). Los archivos (disponibles también por vía de anonymous ftp [90]) se actualizan anualmente.

Se ha conjeturado que la mayoría de los científicos tienen un número de ERDŐS finito pero, de hecho, no se ha exhibido evidencia suficiente para apoyar tal aseveración. En [48] el primer autor proporcionó información y nexos adicionales, y el presente artículo pretende indagar más a fondo la cuestión. Consultando numerosas fuentes bibliográficas hemos encontrado que muchos e importantes investigadores en múltiples áreas académicas —diferentes de las matemáticas propiamente dichas— tales como física, química, cristalografía, economía, finanzas, biología, medicina, biofísica, genética, meteorología, astronomía, geología, ingeniería aeronáutica, ingeniería eléctrica, ciencias de la computación, lingüística, psicología y filosofía, tienen en realidad números de ERDŐS finitos. En la sección 2 presentamos esas sugestivas conexiones. No se puede inferir de esto, por supuesto, que todas las personas cuyas áreas de especialización son las mencionadas disciplinas, u otras relacionadas, tienen necesariamente un número de ERDŐS finito. Pero los nombres que primero aparecen cuando se llevan a cabo búsquedas relativamente simples resultan ser algunos de los más conspicuos y prolíficos representantes de sus respectivos campos (incluyendo más de 60 premios Nobel), la mayoría de los cuales han tenido incontables colaboradores a través de los años. Llegamos entonces a la tentadora conclusión de que la gran mayoría de investigadores en esos campos de especialización, excepto quienes trabajan en aislamiento completo, tienen probablemente un número de ERDŐS finito.

La última afirmación es difícil de poner a prueba exhaustivamente cuando se incluyen *todas* las disciplinas académicas o científicas, por lo que debe considerarse como una hipótesis audaz —aunque plausible. Si nos restringimos a los autores que publican investigaciones en *matemáticas* la siguiente conjetura

$$(\mathcal{E}) \left\{ \begin{array}{l} \text{la mayoría de los investigadores del siglo} \\ \text{XX, en matemáticas, tienen un número de} \\ \text{Erdős finito (y relativamente pequeño)} \end{array} \right.$$

parece obvia y ha sido considerada como parte del folklore. Pero la evidencia se reduce a enfatizar el gran número de co-autores (más de 500) de ERDŐS y el abultado número de co-autores de éstos (más de 5600). Puesto que sus áreas de investigación son numerosas y variadas, (\mathcal{E}) debería ser verdadera.

Nos proponemos exhibir evidencia más concreta y concluyente en favor de (\mathcal{E}) . Para tal propósito, seleccionamos primero una muestra bastante “lujosa” de la comunidad investigativa en matemáticas, a saber, los ganadores de las más prestigiosas distinciones en esta disciplina académica: la Medalla Fields, el premio Steele, el premio Wolf en matemáticas y el premio Nevanlinna. Cruzando múltiples referencias bibliográficas hemos determinado que todos los ganadores de estos premios tienen números de ERDŐS ≤ 5 . En las secciones 3 y 4 aparecen las tablas completas con las cotas superiores de estos números de ERDŐS³. Los correspondientes grafos de colaboración, en los que se conecta a los laureados con PAUL ERDŐS, se encuentran desplegados con todo detalle, para los lectores interesados, en el sitio *Web* [89]. Los individuos que aparecen en estas exclusivas listas de galardonados son matemáticos de primer orden que se caracterizan por ser originales, prolíficos e influyentes; la mayoría han tenido muchos discípulos, colaboradores y estudiantes de doctorado bajo su supervisión. Su impacto o influencia no se ha limitado a una única institución o incluso a un único país o época histórica (el mismo PAUL ERDŐS fue honrado con el premio Wolf en 1983–84). Además, las distinciones citadas se confieren sin exclusión de áreas de investigación (exceptuando el premio Nevanlinna, que está restringido a las ciencias de la computación). No es entonces sorprendente que la red de colaboración alrededor de estos nombres colosales resulte ser muy densa. El hecho de que todos ellos estén incluidos en la componente de ERDŐS de C resulta evidencia decisiva en favor de (\mathcal{E}) .

Daremos luego dos pasos más: en la sección 5 rastreamos los tópicos de artículos publicados por algunos investigadores cuyo número de ERDŐS es pequeño, y buscamos ramificaciones en otras disciplinas académicas. Esto nos dará una idea más concreta sobre la cobertura y el alcance que la “conexión ERDŐS” tiene dentro y fuera de las ciencias matemáticas. Finalmente, en la sección 6 planteamos algunas preguntas abiertas. Obviamente, cualquier empresa de esta envergadura es —y seguirá siendo— incompleta; admitimos, por ejemplo, que no hemos logrado conectar a los más recientes ganadores del premio Nobel de física.

Por brevedad, decimos que una persona es ERDŐS- n si su número de ERDŐS es n . Así, los co-autores de ERDŐS son ERDŐS-1 y los co-autores de éstos (que no

son ERDŐS-1 o ERDŐS-0) son ERDŐS-2. La lista [90], que contiene todos los individuos que son ERDŐS-2 y sus respectivos co-autores ERDŐS-1, es llamada la *lista Erdős-2*.

2. Conexiones interesantes

Sin pretender ser 100% exhaustivos, hemos examinado varias bases de datos bibliográficas y semblanzas históricas ([2], [31], [32], [100], [109], [110], [121], [124], [133], [164], [165]), así como un sinnúmero de sitios en Internet, y hemos descubierto que algunos pensadores y científicos muy notables, provenientes de las más variadas ramas académicas, están conectados con PAUL ERDŐS en el grafo de colaboración C .

Los siguientes ejemplos proporcionan —de paso— una vista panorámica de la colaboración académica, aspecto de la investigación científica esencial en el siglo XX, pero que no ha sido sistemáticamente tratado en la literatura.

• ALBERT EINSTEIN tiene número de ERDŐS 2 en razón de los dos artículos que publicó con el matemático alemán ERNST G. STRAUS quien fue su asistente en Princeton en el periodo 1944–48. STRAUS publicó con ERDŐS 20 artículos (el primero de ellos en 1953)⁴. EINSTEIN publicó trabajos conjuntos con cerca de 25 colaboradores (véase [140]), entre ellos los premios Nobel de física WOLFGANG PAULI y OTTO STERN.

A la temprana edad de 20 años, PAULI había sorprendido al mundo científico con su brillante artículo enciclopédico de 200 páginas sobre la teoría de la relatividad, exposición de la que EINSTEIN escribió una elogiosa reseña. No es por ello sorprendente que el artículo conjunto escrito por estos dos genios en 1943 [64] (su única publicación conjunta, escrita durante la estadía de PAULI en Princeton) se refiera a aspectos técnicos de la teoría general de la relatividad. PAULI recibió en 1945 el premio Nobel por el descubrimiento que hizo en el año 1925 del llamado *principio de exclusión de Pauli*.

Con STERN, EINSTEIN también escribió sólo un artículo conjunto [66], cuando ambos estaban en Praga. STERN fue galardonado con el premio Nobel de 1943 por su descubrimiento del momento magnético del protón.

EINSTEIN también publicó con el ruso BORIS PODOLSKY y con el austriaco PAUL EHRENFEST [61], quien

³Cotas superiores de los números de ERDŐS de todos los ganadores de la Medalla Fields, hasta 1994, ya habían sido presentados por los autores en [48], [89] y [93], pero muchos números se han reducido para el presente artículo.

⁴La bibliografía completa de las publicaciones de ERDŐS's hasta 1996 ha sido preparada por el segundo autor [91], con actualizaciones anuales desplegadas en la página *Web*, *The Erdős Number Project* [89].

fuera uno de sus más cercanos amigos. La conocida paradoja EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN, concebida como un experimento mental contra la concepción de la mecánica cuántica, se originó en su artículo conjunto [65] de 1935. Entre los co-autores de PODOLSKY aparecen por lo menos dos premios Nobel: el gran físico teórico británico PAUL DIRAC [57] y el químico norteamericano LINUS PAULING [142]; por lo tanto, ambos son ERDŐS-4, a lo sumo. PAULING recibió el Nobel de química en 1954 por sus investigaciones sobre los enlaces químicos; su tratado clásico *The Nature of the Chemical Bond* (1939) es considerado por los químicos, casi unánimemente, como la más importante publicación de la química teórica del siglo XX. PAULING fue un entusiasta partidario del control de las armas nucleares; por sus innumerables campañas internacionales recibió en 1962 el premio Nobel de la paz, lo que lo convierte en la única persona, hasta la fecha, que ha recibido dos premios Nobel individuales (no compartidos) en dos categorías diferentes.

Un hecho poco conocido es que EINSTEIN escribió un artículo con un médico: el judío alemán HANS MÜHSAM, amigo personal en sus años de Berlín. En 1923 publicaron en una revista médica un reporte sobre la determinación experimental de la permeabilidad de filtros [63].

Podemos citar además dos curiosas publicaciones conjuntas no-técnicas de EINSTEIN. La primera de ellas es un reporte sobre una oficina internacional de meteorología, escrito en 1927 con MARIE CURIE y HENDRIK A. LORENTZ y publicado en la revista *Science* [44]. La segunda es el folleto titulado *¿Por qué la guerra?* [62], escrito en 1933 con SIGMUND FREUD (a petición de éste; véase [140]). Apareció en alemán, francés e inglés y fue patrocinado por el Instituto Internacional de Cooperación Intelectual de la Liga de las Naciones.

• HENDRIK A. KRAMERS, físico holandés, fue uno de los colaboradores de PAULI [114] y también publicó con el premio Nobel danés NIELS BOHR [25], uno de los pilares del pensamiento científico del siglo XX. Por consiguiente, BOHR es, a lo sumo, ERDŐS-5. En 1923 BOHR publicó el trabajo [24] con el físico holandés DIRK COSTER quien, a su vez, fue co-autor en el mismo año de GEORGE C. DE HEVESY [42]⁵, químico húngaro que recibiría el premio Nobel de química en 1943 por su uso de radioisótopos como rastreadores (o indicadores), importante técnica que sirvió para mejorar el entendimiento de los procesos químicos en los seres vivos.

JOHN A. WHEELER fue un distinguido colaborador de BOHR. En 1939 escribieron el estudio seminal *The mechanism of nuclear fission* [26], con el que WHEELER se erigió en el primer norteamericano en contribuir al desarrollo teórico de las armas nucleares; en dicha memoria se señala que el uranio-235 podría usarse en una posible bomba atómica.

Otro de los co-autores de KRAMERS es el holandés LEONARD S. ORNSTEIN [138], a su vez conectado con su compatriota FRITS ZERNIKE [139], laureado con el premio Nobel de física de 1953 (por su invención del microscopio de contraste de fase). En consecuencia, ZERNIKE es ERDŐS-6, como máximo.

• J. ROBERT OPPENHEIMER se encuentra entre los co-autores de EHRENFEST [59], lo que lo convierte en un ERDŐS-4. OPPENHEIMER es principalmente recordado por haber sido director del laboratorio de Los Alamos durante la construcción de la primera bomba atómica (1943-45), y director del *Institute for Advanced Study* de Princeton (1947-66). ROBERT SERBER, quien fue alumno y cercano colaborador suyo [136], está ligado con por lo menos dos premios Nobel, los físicos nucleares estadounidenses ERNEST O. LAWRENCE y EDWIN M. MCMILLAN [33]. SERBER, LAWRENCE, and MCMILLAN fueron miembros destacados del equipo científico en Los Alamos. LAWRENCE recibió el premio Nobel de física en 1939 por su invención del ciclotrón; en su honor fue bautizado el elemento químico 103, lawrencio. MCMILLAN compartió el premio Nobel de química de 1953 por su descubrimiento del elemento 93, neptunio, el primer elemento más pesado que el uranio. Las conexiones anteriores muestran que tanto LAWRENCE como MCMILLAN tienen número de ERDŐS 6, a lo sumo.

El astrofísico HARTLAND SNYDER fue co-autor de OPPENHEIMER; en su artículo conjunto [137] de 1939 se encuentra el primer tratamiento relativista de la noción de agujero negro.

• MAX BORN, premio Nobel de física en 1954, es ERDŐS-3 por su colaboración con NORBERT WIENER, el creador de la cibernética, cuyo número de ERDŐS es 2. Su único artículo conjunto [30] fue escrito durante la visita de BORN al MIT en 1925. Entre los co-autores de BORN encontramos a sus compatriotas alemanes WERNER HEISENBERG y PASCUAL JORDAN [27] —los tres son los fundadores de la mecánica cuántica moderna— y a MAX VON LAUE [29]⁶. Por su prominente papel en la formulación de los fundamentos de la mecánica cuántica,

⁵En ese artículo se reportó el descubrimiento de un nuevo elemento químico, el hafnio.

⁶Esta última "colaboración científica" es, en realidad, el obituario (técnico) del físico MAX ABRAHAM (1875-1922).

| Premios Nobel de física | Año | Número de Erdős | Premios Nobel de física | Año | Número de Erdős |
|-------------------------|------|-----------------|-------------------------|------|-----------------|
| MAX VON LAUE | 1914 | 4 | EMILIO SEGRÈ | 1959 | 4 |
| ALBERT EINSTEIN | 1921 | 2 | OWEN CHAMBERLAIN | 1959 | 5 |
| NIELS BOHR | 1922 | 5 | ROBERT HOFSTADTER | 1961 | 5 |
| LOUIS DE BROGLIE | 1929 | 5 | EUGENE WIGNER | 1963 | 4 |
| WERNER HEISENBERG | 1932 | 4 | RICHARD P. FEYNMAN | 1965 | 4 |
| PAUL A. DIRAC | 1933 | 4 | JULIAN S. SCHWINGER | 1965 | 4 |
| ERWIN SCHRÖDINGER | 1933 | 8 | HANS A. BETHE | 1967 | 4 |
| ENRICO FERMI | 1938 | 3 | LUIS W. ALVAREZ | 1968 | 4 |
| ERNEST O. LAWRENCE | 1939 | 6 | MURRAY GELL-MANN | 1969 | 3 |
| OTTO STERN | 1943 | 3 | JOHN BARDEEN | 1972 | 5 |
| ISIDOR I. RABI | 1944 | 4 | LEON N. COOPER | 1972 | 6 |
| WOLFGANG PAULI | 1945 | 3 | JOHN R. SCHRIEFFER | 1972 | 5 |
| FRITS ZERNIKE | 1953 | 6 | AAGE BOHR | 1975 | 5 |
| MAX BORN | 1954 | 3 | BEN MOTTELSON | 1975 | 5 |
| WILLIS E. LAMB | 1955 | 3 | LEO J. RAINWATER | 1975 | 7 |
| JOHN BARDEEN | 1956 | 5 | STEVEN WEINBERG | 1979 | 4 |
| WALTER H. BRATTAIN | 1956 | 6 | SHELDON LEE GLASHOW | 1979 | 2 |
| WILLIAM B. SHOCKLEY | 1956 | 6 | ABDUS SALAM | 1979 | 3 |
| CHEN NING YANG | 1957 | 4 | S. CHANDRASEKHAR | 1983 | 4 |
| TSUNG-DAO LEE | 1957 | 5 | NORMAN F. RAMSEY | 1989 | 3 |

| Premios Nobel de economía | Año | Número de Erdős | Premios Nobel de química | Año | Número de Erdős |
|---------------------------|------|-----------------|--------------------------|------|-----------------|
| PAUL A. SAMUELSON | 1970 | 5 | PETER J. DEBYE | 1936 | 5 |
| KENNETH J. ARROW | 1972 | 3 | GEORGE DE HEVESY | 1943 | 7 |
| TJALLING C. KOOPMANS | 1975 | 4 | OTTO DIELS | 1950 | 7 |
| GERARD DEBREU | 1983 | 3 | KURT ALDER | 1950 | 6 |
| FRANCO MODIGLIANI | 1985 | 5 | EDWIN M. McMILLAN | 1951 | 6 |
| ROBERT M. SOLOW | 1987 | 4 | GLENN T. SEABORG | 1951 | 5 |
| HARRY M. MARKOWITZ | 1990 | 2 | LINUS PAULING* | 1954 | 4 |
| MERTON H. MILLER | 1990 | 4 | LARS ONSAGER | 1968 | 3 |
| JOHN C. HARSANYI | 1994 | 8 | ILYA PRIGOGINE | 1977 | 6 |
| JOHN F. NASH | 1994 | 4 | WALTER GILBERT | 1980 | 4 |
| REINHARD SELTEN | 1994 | 7 | KENICHI FUKUI | 1981 | 3 |
| ROBERT C. MERTON | 1997 | 6 | JEROME KARLE | 1985 | 4 |
| | | | HERBERT A. HAUPTMAN | 1985 | 3 |

*También recibió el premio Nobel de la paz en 1962

| Premios Nobel de Medicina-Fisiología | Año | Número de Erdős |
|--------------------------------------|------|-----------------|
| FRANCIS H. C. CRICK | 1962 | 7 |
| JAMES D. WATSON | 1962 | 8 |

TABLA 1. Cotas superiores de los números de Erdős de algunos premios Nobel.

HEISENBERG fue el único laureado con el premio Nobel de física de 1932. A VON LAUE se le había otorgado el premio Nobel de 1914 por sus investigaciones sobre difracción de rayos X en cristales, que es el origen de la física del estado sólido. Sus investigaciones también sirvieron para demostrar que los rayos X son radiaciones electromagnéticas similares a la luz.

Además, HEISENBERG publicó con el director de su tesis doctoral, el alemán ARNOLD SOMMERFELD [102] (también tutor de PAULI en Munich), quien es recordado por sus modificaciones existosas del modelo atómico de BOHR. Uno de los muchos co-autores de SOMMERFELD fue PETER J. DEBYE (a veces escrito DEBIJE) [52], científico holandés, premio Nobel de química en 1936. Sin embargo, el número de ERDŐS de DEBYE es menor que el que se obtendría mediante dicha colaboración ya que escribió un artículo conjunto con PAULING [53].

No podríamos olvidar otro famoso co-autor de BORN, THEODORE VON KÁRMÁN [28], el ingeniero húngaro-estadounidense que fue uno de los fundadores de la ingeniería aeronáutica.

• JOHN VON NEUMANN y ERDŐS nunca escribieron un trabajo conjunto aunque ambos eran húngaros de nacimiento y su diferencia de edades era de apenas 10 años. En realidad, VON NEUMANN nunca escribió con ninguno de los más de 500 co-autores de ERDŐS; su número de ERDŐS es 3 por sus abundantes colaboraciones con individuos de la lista ERDŐS-2, tales como SALOMON BOCHNER, PAUL HALMOS y HERMAN H. GOLDSTINE.

Por lo demás, VON NEUMANN tuvo co-autores ilustres entre los que se destacan DAVID HILBERT, OSWALD VEBLEN, GEORGE D. BIRKHOFF, PASCUAL JORDAN y los premios Nobel de física EUGENE WIGNER y SUBRAHMANYAM CHANDRASEKHAR, (véase [161]). Con HILBERT, VON NEUMANN escribió sobre los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica [103] poco después de que HEISENBERG propusiera su concepción cuántica, conocida como mecánica matricial. HILBERT, VON NEUMANN y HEISENBERG estaban en Gotinga en esa época. WIGNER era también húngaro y amigo de VON NEUMANN desde la infancia; la mayoría de sus artículos conjuntos tratan igualmente problemas en mecánica cuántica. Pasando por WIGNER encontramos una trayectoria hasta uno de los más grandes nombres de la física cuántica, el austriaco ERWIN SCHRÖDINGER, quien compartió el premio Nobel de 1933 con DIRAC por

su introducción de las ecuaciones de onda. Esta es la ruta: WIGNER con R. F. O'CONNELL [104] con JOHN TREVOR LEWIS [75] con JAMES MCCONNELL [120] con SCHRÖDINGER [128]. De esta manera, SCHRÖDINGER resulta ser un ERDŐS-8, como máximo.

Otro conocido colaborador de VON NEUMANN fue el economista austriaco OSKAR MORGENSTERN, con quien escribió en 1944 el influyente volumen *Theory of Games and Economic Behaviour* [162]. Este libro, del que se tiraron varias ediciones, estimuló a nivel mundial el desarrollo de las matemáticas de la teoría de juegos y sus aplicaciones en áreas tan disímiles como economía, política, ciencias militares, investigación de operaciones, negocios, derecho, deporte y biología (véase [159]). La teoría de juegos ha llegado a ser muy relevante en economía; basta mencionar que por lo menos tres premios Nobel de economía han sido otorgados a especialistas de la teoría de juegos. Todos ellos están en la componente de ERDŐS de C (como lo mostraremos más adelante), aun cuando ninguno está directamente relacionado ni con VON NEUMANN ni con MORGENSTERN.

De otro lado, MORGENSTERN escribió conjuntamente con JOHN G. KEMENY [112], el creador (junto con THOMAS E. KURTZ) en la década de los sesenta del muy popular lenguaje de programación BASIC.

En la década de los cincuenta se realizaron en el *Institute for Advanced Study* de Princeton los primeros intentos a nivel mundial para utilizar computadores digitales al problema de la predicción del tiempo. Allí, VON NEUMANN trabajó en estrecha colaboración con el líder del equipo, el meteorólogo norteamericano JULE G. CHARNEY. De esta cooperación surgió el artículo conjunto [39].

• GEORGE UHLENBECK, el destacado físico holandés nacionalizado estadounidense, tiene número de ERDŐS 2. Se le conoce principalmente por haber postulado, junto con SAMUEL GOUDSMIT, el concepto de *spin* del electrón, que condujo a cambios sustanciales en la teoría atómica y en la mecánica cuántica. Su muy famoso artículo conjunto [160] fue publicado en 1925, cuando eran aún estudiantes de posgrado en la universidad holandesa de Leiden (ambos fueron discípulos de EHRENFEST).

Entre los co-autores de UHLENBECK encontramos por lo menos dos premios Nobel de física: el norteamericano WILLIS E. LAMB (Nobel 1955) [135], cuyos experimentos sugirieron drásticos refinamientos en las teorías cuánticas del electromagnetismo, y el italiano ENRICO

FERMI (Nobel 1938) [70], uno de los principales arquitectos de la era nuclear. FERMI tuvo toda una pléyade de co-autores y colaboradores en Europa y en los Estados Unidos; uno de ellos fue su exalumno en Roma, EMILIO SEGRÈ [68], quien también llegaría a recibir el premio Nobel. SEGRÈ y su colega de la Universidad de California en Berkeley, el norteamericano OWEN CHAMBERLAIN, descubrieron el antiprotón en 1955, hazaña por la cual se les concedió el premio Nobel de física de 1959 (también publicaron conjuntamente [36]). Los nexos anteriores muestran que los números de ERDŐS (máximos) de FERMI, SEGRÈ y CHAMBERLAIN son 3, 4 y 5, respectivamente⁷. Otro co-autor de SEGRÈ fue el químico nuclear estadounidense GLENN T. SEABORG [154], quien recibió la mitad del premio Nobel de 1951 por sus investigaciones en elementos transuránidos (la otra mitad del premio la recibió MCMILLAN, a quien mencionamos en relación con OPPENHEIMER).

EDWARD TELLER, el físico nuclear húngaro-estadounidense que dirigió el equipo que construyó la primera bomba termonuclear, es otro co-autor de FERMI [69]. Uno de los estudiantes de doctorado que TELLER tuvo en Chicago fue el físico chino CHEN NING YANG (posteriormente asistente de FERMI), con quien publicó trabajos de investigación [71]. YANG y su compatriota TSUNG-DAO LEE recibieron el premio Nobel de física en 1957 por su descubrimiento [117], [118] de las violaciones del principio de conservación de la paridad en las interacciones débiles, hallazgo trascendental en la física de partículas. De las colaboraciones que acabamos de citar, concluimos que YANG es ERDŐS-4 y LEE es ERDŐS-5, a lo sumo.

• FREEMAN J. DYSON, el físico británico-norteamericano conocido por el público profano por sus escritos sobre civilizaciones extraterrestres y por su defensa de la exploración espacial, es un miembro notable de la lista ERDŐS 2. Está conectado, por intermedio de RICHARD H. DALITZ [45], con el físico alemán-estadounidense HANS A. BETHE [47], una de las figuras centrales de la física cuántica y atómica del siglo XX. BETHE fue director de la División de Física Teórica del Proyecto Manhattan y fue honrado con el premio Nobel en 1967 por su explicación de la producción de energía en las estrellas. El conocido astrofísico austriaco EDWIN E. SALPETER está incluido en el extenso grupo de co-autores y colaboradores de BETHE [150].

BETHE es uno de los protagonistas de una publicación conjunta bastante peculiar [3], que llama la atención por la singular combinación de apellidos de sus autores: ALPHER, BETHE, GAMOW. El tercer autor es GEORGE GAMOW, físico nuclear y cosmólogo nacido en Ucrania que también hizo contribuciones a la teoría genética moderna; el primer autor es RALPH ALPHER, uno de sus estudiantes. El artículo mismo, *The origin of chemical elements*, tiene de hecho, considerable importancia histórica: en él los autores defendieron la idea de que los elementos químicos se sintetizaron en reacciones termonucleares durante la explosión primigenia, y predijeron la radiación cósmica de fondo. Se dice que BETHE no contribuyó realmente con la elaboración del trabajo y que fue GAMOW quien le solicitó la inclusión de su nombre para lograr la combinación 'alfa-beta-gama'. Fue también GAMOW quien acuñó la expresión "big-bang" (el "gran pum"); la versión moderna de esta teoría, modificada por él y sus colaboradores, es el postulado más aceptado de la cosmología.

Por intermedio de DALITZ podemos enlazar otro premio Nobel de física, el norteamericano ROBERT HOFSTADTER, quien compartió el premio de 1961 por sus investigaciones sobre protones y neutrones. La siguiente ruta hace de él un ERDŐS-5: DALITZ con D. G. RAVENHALL [46] con R. HOFSTADTER [97].

• SHELDON LEE GLASHOW, físico teórico norteamericano y premio Nobel en 1979, tiene número de ERDŐS 2 por su colaboración [82] con el especialista en combinatoria DANIEL KLEITMAN, quien es ERDŐS-1 (y también cuñado suyo). GLASHOW y EINSTEIN comparten la siguiente distinción: son los únicos premios Nobel de física (hasta la fecha) con número de ERDŐS ≤ 2 .

MURRAY GELL-MANN, premio Nobel de física en 1969, es compatriota y co-autor de GLASHOW [81]; es conocido por haber introducido el concepto y la palabra *quark* para referirse a una partícula subatómica básica. GELL-MANN también colaboró con el brillante físico norteamericano y premio Nobel, RICHARD FEYNMAN [73]. FEYNMAN participó en el proyecto Manhattan (tenía sólo 25 años de edad cuando fue reclutado) y publicó con BETHE [13]. Los dos concibieron la fórmula para predecir la energía liberada por un explosivo nuclear.

FEYNMAN, quien había sido alumno de WHEELER en Princeton y había publicado con él [163], llegó a ser una figura sobresaliente de la física de posguerra; recibió

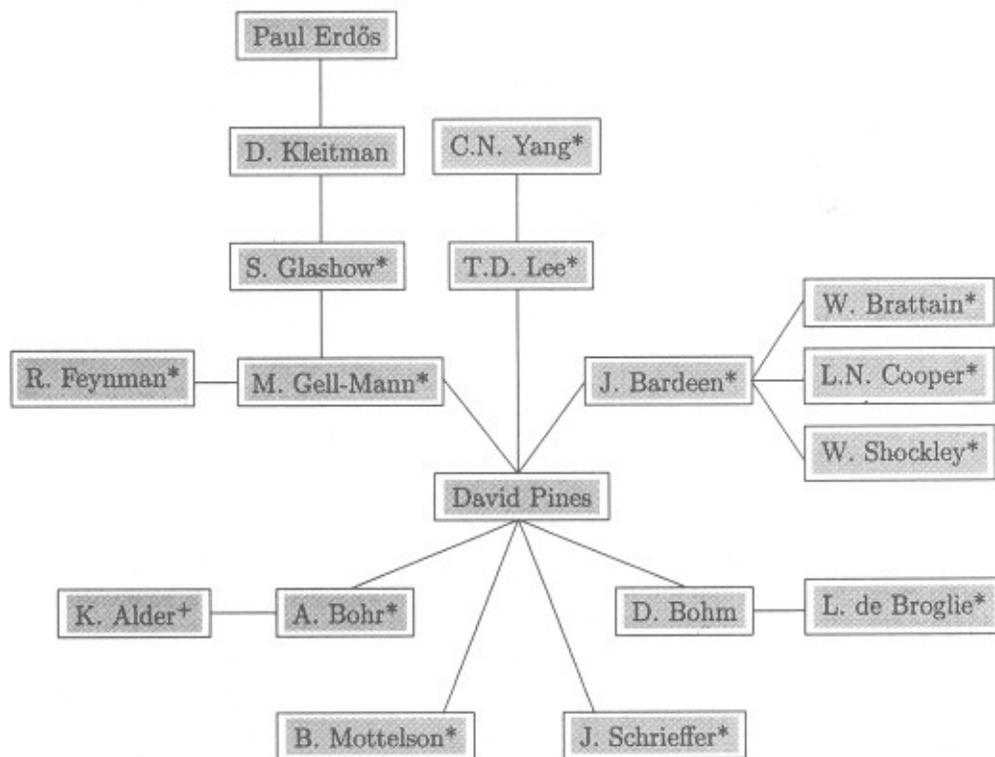
⁷Si aceptáramos los reportes técnicos como colaboraciones válidas para la determinación de números de ERDŐS, podríamos reducir el número de ERDŐS de FERMI a 2, por el reporte técnico que escribió en Los Alamos con STANISLAW ULAM, reputado co-autor de ERDŐS.

el premio Nobel en 1965 por su original teoría de la electrodinámica cuántica. Compartió el premio Nobel con JULIAN S. SCHWINGER, quien independientemente formuló una teoría de la electrodinámica cuántica, sin saber que FEYNMAN en los Estados Unidos y SIN-ITIRO TOMONAGA en el Japón estaban trabajando en el mismo problema. Sus teorías son esencialmente equivalentes y reconcilian la mecánica cuántica con la teoría especial de la relatividad. Podemos conectar a SCHWINGER con ERDŐS siguiendo este camino: SCHWINGER con NORMAN F. RAMSEY [144] con W. H. FURRY [78], siendo este último un ERDŐS-2. Por lo tanto, SCHWINGER es a lo más ERDŐS-4. Algo por demás curioso es que FEYNMAN y SCHWINGER nacieron en el mismo año, 1918, en la misma ciudad, New York, recibieron el premio Nobel el mismo año y por el mismo logro, y —de acuerdo con las rutas más cortas que hemos podido encontrar— tienen también el mismo número de ERDŐS, 4.

Los dos co-autores de SCHWINGER en el artículo citado arriba [144], los norteamericanos ISIDOR I. RABI y

NORMAN RAMSEY, son también premios Nobel. RABI recibió el premio de física en 1944 por su invención de 1937 del método de la resonancia magnética, técnica que ha hecho posible aplicaciones tales como el láser y la llamada medicina nuclear. RAMSEY fue galardonado con el premio Nobel de física de 1989 por su método de los campos oscilatorios en el que se basa el funcionamiento del reloj atómico de cesio, con el cual se determina actualmente el estándar del tiempo. Según estos nexos, RAMSEY es ERDŐS-3 y RABI ERDŐS-4.

• DAVID PINES, físico norteamericano que publica sobre astrofísica y sobre la teoría de la materia condensada, es una personalidad preponderante del grafo de colaboración. Como co-autor de GELL-MANN [67], es a lo más ERDŐS-4. PINES ha escrito artículos investigativos en co-autoría con seis premios Nobel y está a distancia 2 de ocho más. De suerte que, en el grafo de colaboración, PINES está a una distancia no mayor que 2 de 14 premios Nobel diferentes (véase la Figura 1). Ninguno de los científicos mencionados en el presente artículo



* Premio Nobel de física

† Premio Nobel de química

FIGURA 1. Aglomeración de premios Nobel alrededor de David Pines.

(incluyendo al mismo ERDŐS) está tan cerca de tantos ganadores del premio Nobel.

Dos de los co-autores de PINES son JOHN BARDEEN [17] y JOHN ROBERT SCHRIEFFER [141], quienes recibieron el premio Nobel de física en 1972, junto con su compatriota estadounidense LEON N. COOPER, por su teoría [15], [16] (conocida como teoría BCS, por las iniciales de sus apellidos), la primera teoría microscópica de la superconductividad realmente exitosa. Cuando hizo su contribución a la teoría BCS, SCHRIEFFER era un estudiante de posgrado de 26 años en la Universidad de Illinois de la cual BARDEEN era profesor en los departamentos de física e ingeniería eléctrica.

Debe recordarse que BARDEEN había recibido otro premio Nobel de física, en 1956, en compañía de WALTER H. BRATTAIN y WILLIAM B. SHOCKLEY. Fueron laureados por sus investigaciones en semiconductores y por su invención del transistor⁸. Teniendo en cuenta sus artículos con BARDEEN ([14], [18]), BRATTAIN y SHOCKLEY resultan ser ERDŐS-6, como máximo.

Dos co-autores más de PINES son el danés AAGE BOHR (hijo de NIELS BOHR) y el danés-estadounidense BEN MOTTELSON [22] quienes compartieron el premio Nobel de física de 1975 por las investigaciones que realizaron a comienzos de los cincuenta en las que determinaron la forma asimétrica de ciertos núcleos atómicos. Sus experimentos se habían inspirado en las teorías del físico norteamericano LEO JAMES RAINWATER, quien también recibió el premio Nobel ese año. El número de Erdős de RAINWATER es finito, 7 a lo sumo, por vía de TSUNG-DAO LEE, quien, como vimos antes, es ERDŐS-5: LEE con C. S. WU [119] con RAINWATER [145]. A propósito, PINES también ha escrito con LEE [116] (véase la Figura 1).

Un co-autor de AAGE BOHR es KURT ALDER [1], químico alemán, discípulo y asistente de OTTO DIELS, con quien compartió el premio Nobel de química en 1950 por su método para preparar compuestos orgánicos cíclicos. Dicha técnica (conocida como la *reacción Diels-Alder*) resultó especialmente útil en la producción de plásticos sintéticos. El primero de muchos artículos que escribieron sobre el tópico apareció en 1928 [56]. Los números de ERDŐS máximos de ALDER y DIELS son, por tanto, 6 y 7, respectivamente.

Además del padre NIELS y el hijo AAGE, hay otro miembro de la familia BOHR en la componente de ERDŐS de C ; se trata del hermano menor de NIELS, HARALD, que fue un prominente matemático. Fue él quien concibió la teoría de las funciones casi-periódicas y su nombre se recuerda en el *teorema de Bohr-Landau* sobre la función zeta. El número de ERDŐS de HARALD es 3 por su artículo conjunto [23] con BORGE JESSEN, cuyo número de ERDŐS es 2. Como una curiosidad, podemos determinar qué tan lejos están los BOHR, unos de otros, en el grafo de colaboración C . Usando a PAUL ERDŐS como pivote, observamos que los hermanos NIELS y HARALD están a distancia 8, mientras que la distancia entre los dos premios Nobel, NIELS y su hijo AAGE, es de 10. Lo más probable es que estas distancias se puedan reducir detectando nodos y referencias bibliográficas adicionales.

- ABDUS SALAM y STEVEN WEINBERG compartieron con el ya citado GLASHOW el premio Nobel de física de 1979 por sus contribuciones, realizadas de manera independiente, a la teoría unificada de las interacciones electromagnética y nuclear débil. SALAM, quien fue el primer paquistaní en recibir un premio Nobel, en categoría alguna, es a lo más ERDŐS-3 por su publicación conjunta [149] con J. C. WARD quien es Erdős-2. Esta última publicación (de 1959) es históricamente significativa ya que fue uno de los primeros intentos (no satisfactorios) hacia una teoría unificada electro-débil.

WEINBERG resulta ser ERDŐS-4 en vista de sus muchas publicaciones con SALAM; por ejemplo, [86].

Entre los muchos co-autores de SALAM encontramos a otro ganador del premio Nobel, el biólogo molecular estadounidense WALTER GILBERT⁹ [148], quien compartió (con PAUL BERG y FREDERICK SANGER) el galardón de química de 1980 por sus análisis químicos y biológicos del DNA.

- EDWARD WITTEN, el destacado físico teórico norteamericano y Medalla Fields en 1990, es a lo sumo ERDŐS-3, como se mostrará más adelante. Entre sus co-autores encontramos al físico norteamericano LUIS W. ALVAREZ [5], premio Nobel en 1968 por sus investigaciones sobre partículas subatómicas. En 1980, un equipo integrado, entre otros, por ALVAREZ y su hijo geólogo, WALTER, propuso una controversial y ampliamente publicitada

⁸Por sus contribuciones fundamentales a la ciencia, JOHN BARDEEN fue escogido por la revista *Life* como uno de los 100 individuos más influyentes del siglo XX.

⁹GILBERT obtuvo realmente el título de Ph.D. en matemáticas (de la universidad de Cambridge).

| Científicos Notables | Áreas de Investigación | # de Erdős |
|-----------------------|-------------------------|------------|
| WALTER ALVAREZ | Geología | 5 |
| RUDOLF CARNAP | Filosofía | 4 |
| JULE G. CHARNEY | Meteorología | 4 |
| NOAM CHOMSKY | Lingüística | 4 |
| FREEMAN J. DYSON | Física cuántica | 2 |
| GEORGE GAMOW | Física Nuclear | 5 |
| STEPHEN HAWKING | Relatividad, cosmología | 5 |
| PASCUAL JORDAN | Física cuántica | 4 |
| THEODORE VON KÁRMÁN | Ingeniería Aeronáutica | 4 |
| JOHN MAYNARD SMITH | Biología | 4 |
| OSKAR MORGENSTERN | Economía | 4 |
| J. ROBERT OPPENHEIMER | Física Nuclear | 4 |
| ROGER PENROSE | Relatividad, cosmología | 6 |
| JEAN PIAGET | Psicología | 3 |
| KARL POPPER | Filosofía | 5 |
| EDWIN E. SALPETER | Astrofísica | 5 |
| CLAUDE E. SHANNON | Ingeniería Eléctrica | 3 |
| ARNOLD SOMMERFELD | Física Atómica | 5 |
| EDWARD TELLER | Física Nuclear | 4 |
| GEORGE UHLENBECK | Física Atómica | 2 |
| JOHN A. WHEELER | Física Nuclear | 5 |

TABLA 2. Cotas superiores de los números de Erdős de algunos distinguidos investigadores.

teoría para explicar —por medio de consideraciones geológicas— que los dinosaurios se extinguieron como consecuencia del impacto de un asteroide sobre la Tierra. Se publicó en la revista británica *Science* [4].

Otro co-autor de WITTEN es GARY HOROWITZ [35], quien, a su vez, ha colaborado con STEPHEN HAWKING [80], el físico teórico inglés que es casi un ícono de la ciencia actual y cuyo libro de 1988 *A Brief History of Time* fue un *best-seller* internacional. HAWKING ha publicado también con su compatriota, el matemático y físico SIR ROGER PENROSE [101], conocido por sus investigaciones prolifas sobre agujeros negros.

• LARS ONSAGER, químico noruego, discípulo de DEBYE y premio Nobel en 1968, tiene número de ERDŐS 3, como máximo, por ser co-autor de B. KAUFMAN [111], quien está en la lista ERDŐS-2. El premio Nobel se le concedió por su teoría termodinámica general de los procesos químicos irreversibles. A tres pasos de distancia de ONSAGER ([58], [132], [143]) encontramos a otro Nobel de química, el ruso-belga ILYA PRIGOGINE, quien precisamente se hizo acreedor del premio Nobel (en 1977) por extender considerablemente los estudios termodinámicos de ONSAGER; éstos han encontrado aplicaciones incluso en economía y sociología. Siguiendo dicho trayecto, PRIGOGINE es entonces ERDŐS-6.

• KENICHI FUKUI, químico japonés, recibió el premio Nobel de química de 1981 (junto con ROALD HOFFMANN) por sus investigaciones, iniciadas en la década de los cincuenta, sobre los mecanismos de las reacciones químicas. El número de ERDŐS de FUKUI no excede 3, por su artículo [8] con PAUL G. MEZEY, quien es ERDŐS-2. Puesto que FUKUI es un científico prolífico, esta conexión seguramente conduce a otros químicos notables.

• JEAN PIERRE VIGIER, distinguido físico francés, puede ser conectado con algunos nombres importantes; su número de ERDŐS no es mayor que 4 como se deduce de las siguientes publicaciones: VIGIER con CONSTANTIN PIRON [74] con STANLEY P. GUDDER [96] (el último citado es un ERDŐS-2).

Entre los co-autores de VIGIER sobresale su compatriota, el Príncipe LOUIS DE BROGLIE [34], quien en los años veinte desarrolló, en su tesis doctoral, una revolucionaria teoría de ondas de electrones (¡para la aprobación de la tesis se pidió la opinión de EINSTEIN!). Cuando la confirmación experimental se obtuvo años más tarde, se le concedió el premio Nobel (1929). Otro co-autor del trabajo que acabamos de citar [34] es el físico y filósofo norteamericano DAVID BOHM, el último discípulo de OPPENHEIMER en Berkeley y el originador de la interpretación causal en la teoría cuántica. Su libro de 1951 *Quantum Theory* es considerado un clásico. A BOHM se le conoce también por las investigaciones realizadas en los cincuenta con DAVID PINES (véase la Figura 1); sus artículos conjuntos [21], publicados bajo el título *A collective description of electron interactions*, señalaron el comienzo de todas las investigaciones actuales en la física del plasma.

SIR KARL R. POPPER, el eminente filósofo austriaco-británico, es un co-autor más de VIGIER [122]. La contribución filosófica más reconocida de POPPER es su rechazo del método inductivo en las ciencias empíricas. Irónicamente, su concepción apareció en 1934 en el libro *The Logic of Scientific Discovery*, publicado por el *Círculo de Viena*, grupo de filósofos positivistas que preconizaban vehementemente el empirismo inductivo.

• CLAUDE E. SHANNON, ingeniero eléctrico norteamericano, se hizo famoso por su modelo matemático elegante y general de la "comunicación", hoy conocido como *Teoría de la Información*. Sus ideas iniciales aparecieron en 1948 en el artículo *A mathematical theory of communication* [155], al que le siguió en 1949 un libro del mismo título, con la co-autoría de WARREN WEAVER [157]. El enfoque SHANNON-WEAVER

se desarrolló rápidamente llegando a formar parte vital de la cibernética, con aplicaciones en ingeniería eléctrica, óptica, termodinámica, análisis químico, biología, economía, bibliotecología e incluso psicología y lingüística.

El número de ERDŐS de SHANNON no pasa de 3 en razón de su colaboración [156] con ELWYN R. BERLEKAMP, que es un ERDŐS-2.

- FRANCIS H. C. CRICK, biofísico británico, y JAMES D. WATSON, genetista y biofísico estadounidense, hicieron un descubrimiento histórico al determinar la estructura molecular del ácido desoxirribonucleico (ADN) —como un polímero de doble hélice— gesta por la cual se les confirió el premio Nobel de Medicina/Fisiología en 1962. Su hallazgo fue publicado en dos célebres artículos en la revista británica *Nature*, en abril-mayo de 1953.

En 1957 CRICK publicó una corta nota conjunta [43] sobre la teoría de la información y de esa manera ingresó a la componente de ERDŐS de *C*. En efecto, a partir de dicha colaboración podemos mostrar que el número de ERDŐS de CRICK no es mayor que 7: CRICK con J. S. GRIFFITH [43] con I. W. ROXBURGH [146] con P. G. SAFFMAN [147] con H. B. KELLER [41] con K. O. FRIEDRICHS [76]. El último citado es ERDŐS-2.

JAMES WATSON sería entonces ERDŐS-8; de esta conexión podemos inferir que muchos otros investigadores activos en genética, biofísica, bioquímica y campos relacionados tienen también números de ERDŐS finitos.

- HERBERT A. HAUPTMAN, matemático, y JEROME KARLE, químico y cristalógrafo (ambos norteamericanos), compartieron el premio Nobel de química en 1985 por sus métodos matemáticos para deducir rápidamente la estructura de moléculas biológicas a partir de los patrones formados cuando rayos X son difractados por sus cristales.

El número de ERDŐS de HAUPTMAN es a lo sumo 3 por su publicación conjunta [95] con FRED GROSS, quien está en la lista ERDŐS-2. Esto hace de KARLE un investigador ERDŐS-4 ya que tiene varios artículos conjuntos con HAUPTMAN (p. ej. [99]).

- JOHN MAYNARD SMITH, biólogo británico, inició toda una nueva área de investigación con sus inusuales aplicaciones de la teoría de juegos al comportamiento animal y a la teoría de la evolución, con memorias como *Evolution and the Theory of Games* [125] y *The theory*

of games and the evolution of animal conflict [126]. Resulta que MAYNARD SMITH tiene un número de ERDŐS pequeño, no mayor que 4, si tenemos en cuenta su publicación [127] con JOSEF HOFBAUER y la de éste [105] con HAL L. SMITH, quien es ERDŐS-2.

- HARRY M. MARKOWITZ, experto en finanzas norteamericano, es premio Nobel de economía y está en la lista ERDŐS-2, erigiéndose en la única persona, hasta la fecha, que posee esta doble distinción. MARKOWITZ compartió el Nobel de 1990 con MERTON H. MILLER y WILLIAM F. SHARPE por sus estudios sobre los mercados financieros y las estrategias de inversión.

MILLER es como máximo ERDŐS-4, a través de ABRAHAM CHARNES [37] y FRED GLOVER [38], quien es ERDŐS-2. MILLER está también conectado [130], [131] con otro premio Nobel, el economista italiano FRANCO MODIGLIANI, enaltecido en 1985 por su análisis matemático de los ahorros familiares y la dinámica de los mercados financieros.

- HERBERT SCARF, economista estadounidense con número de ERDŐS 2, ha publicado artículos de análisis económico con muchos renombrados economistas, tales como KENNETH J. ARROW [9] y GERARD DEBREU [51], ganadores ambos del premio Nobel de economía (en 1972 y 1983, respectivamente). ARROW (norteamericano) recibió el galardón por sus teorías del equilibrio económico, mientras que DEBREU (francés) fue honrado por su tratamiento matemático de la teoría de la oferta y la demanda. En su ya clásica monografía de 1959 [49], DEBREU formalizó matemáticamente la teoría del valor y dió, por primera vez, un significado preciso a la célebre “mano invisible que rige los mercados” con la que ADAM SMITH había especulado casi doscientos años antes. Un co-autor de DEBREU es el economista holandés TJALLING C. KOOPMANS [50], también premio Nobel (1975).

Además, SCARF ha publicado con LLOYD S. SHAPLEY [158], especialista en teoría de juegos y co-autor del matemático estadounidense JOHN F. NASH [134], uno de los ganadores del premio Nobel de economía de 1994. Ese año también recibieron el premio el economista húngaro JOHN C. HARSANYI y el matemático alemán REINHARD SELTEN, por sus aplicaciones de la teoría de juegos a la economía (más precisamente, por “su análisis pionero del equilibrio en la teoría de juegos no-cooperativos”). Como es de esperarse, HARSANYI y SELTEN también tienen números de ERDŐS finitos,

tal como lo muestran las siguientes trayectorias: KOOPMANS con BECKMAN [113] con MARSCHAK [19] con SELTEN [123] con HARSANYI [98]. Con estos enlaces, SELTEN es ERDŐS-7 y HARSANYI, ERDŐS-8.

Desde ARROW encontramos un camino que nos conduce a dos premios Nobel de economía adicionales, los estadounidenses PAUL A. SAMUELSON y ROBERT M. SOLOW: [10], [151]. Tanto SAMUELSON como SOLOW utilizaron técnicas matemáticas innovadoras en economía; SAMUELSON (premio Nobel en 1970) en la teoría general del equilibrio y SOLOW (premio Nobel en 1987) en modelos de crecimiento económico.

Nos referimos ahora a una conexión Nobel más reciente: por su colaboración con SAMUELSON [129], el economista norteamericano ROBERT C. MERTON, uno de los laureados con el premio Nobel de economía en 1997, es a lo sumo ERDŐS-6. MERTON extendió el trabajo de MYRON S. SCHOLES y FISHER BLACK, quienes habían presentado en 1973 una fórmula novedosa y práctica para la valoración de opciones financieras. SCHOLES compartió el Nobel con MERTON, no así BLACK, debido a su prematura muerte en 1995¹⁰.

Algo digno de resaltar, al considerar las anteriores conexiones, es que HERBERT SCARF está, en el grafo de colaboración, a una distancia menor o igual que 6 de nueve premios Nobel de economía.

• NOAM CHOMSKY, lingüista y activista político estadounidense, es una de las personalidades más influyentes de la lingüística del siglo XX. En el periodo 1956-59 introdujo y elaboró la noción de gramática generativa, que cobija tanto los lenguajes naturales como los artificiales, y que ha sido de fundamental importancia en la teoría de la computación.

Las siguientes publicaciones revelan que CHOMSKY es ERDŐS-4, como máximo: CHOMSKY con M. P. SCHUTZENBERGER [40] con S. EILENBERG [60]; este último (el "prodigio polaco") es ERDŐS-2.

• JEAN PIAGET, el sicólogo suizo que realizó trascendentales descubrimientos sobre la adquisición del entendimiento en niños, también publicó extensamente sobre zoología, filosofía y epistemología. De hecho, posee algún tipo de record, si consideramos que antes de cumplir quince años había publicado varios artículos, sobre golondrinas y moluscos, ¡incluyendo uno que firmó cuando tenía 10 años de edad! (véase [32]). Entre sus abundantes publicaciones encontramos el tratado

Mathematical Epistemology and Psychology [20], escrito en cointoría con el lógico holandés EVERT W. BETH. Puesto que el número de ERDŐS de BETH es 2, el de PIAGET es a lo sumo 3.

• RUDOLF CARNAP, filósofo alemán y cabeza visible del Círculo de Viena, es a lo sumo ERDŐS-4, como lo demuestra esta ruta: CARNAP con YEHOSHUA BARRIL HILLEL [11] con M. PERLES [12]; el último citado aparece en la lista ERDŐS-2.

El lógico y filósofo norteamericano WILLARD V. QUINE, alumno de CARNAP en Praga, es conocido por haber emprendido un análisis constructivista sistemático de la filosofía. Su número de ERDŐS no excede 3, a raíz de su colaboración [115] con J. C. C. MCKINSEY, quien es ERDŐS-2 (MCKINSEY mismo fue un renombrado filósofo). Otro co-autor de QUINE, de relativa notoriedad, es el filósofo estadounidense NELSON GOODMAN [87], cuyas indagaciones sobre la filosofía y la ontología del arte han tenido considerable influencia.

• BILL GATES (WILLIAM H. GATES), fundador y presidente de *Microsoft*, y el hombre más rico del mundo en la actualidad, ha adquirido un número de ERDŐS finito, ¡sin usar su dinero! Esto se debe al artículo [79] que escribió en 1979 con el griego CHRISTOS H. PAPANIMITRIOU, en ese entonces profesor de computación del MIT. Cuando el artículo apareció, GATES tenía 24 años y *Microsoft* era una pequeña y desconocida compañía fundada 3 años antes.

Puesto que PAPANIMITRIOU publicó en 1991 con XIAO TIE DENG [54], quien es ERDŐS-2, BILL GATES es ERDŐS-4 a lo sumo.

3. Números de Erdős de los ganadores de la Medalla Fields

La *Medalla Fields* fue establecida por el matemático canadiense JOHN CHARLES FIELDS (1863-1932) para enaltecer tanto logros notables como potencial investigativo en las diferentes áreas de la matemática. Se ha concedido siempre a matemáticos no mayores de 40 años, aunque el límite de edad no fue ni sugerido ni exigido por FIELDS mismo (véase [108]). Se conceden un mínimo de dos y un máximo de cuatro medallas cada cuatro años, durante el Congreso Internacional de Matemáticos. La primera premiación se hizo en el Congreso de Oslo de

¹⁰ Los lectores interesados en los aspectos matemáticos del premio Nobel de economía de 1997 pueden consultar los muy interesantes reportes [55] y [72].

| Medalla Fields | Año | País de origen | # de Erdős |
|------------------------|------|----------------|------------|
| LARS AHLFORS | 1936 | Finlandia | 4 |
| JESSE DOUGLAS | 1936 | EE.UU | 4 |
| LAURENT SCHWARTZ | 1950 | Francia | 4 |
| ATLE SELBERG | 1950 | Noruega | 2 |
| KUNIIHIKO KODAIRA | 1954 | Japón | 2 |
| JEAN-PIERRE SERRE | 1954 | Francia | 3 |
| KLAUS ROTH | 1958 | Alemania | 2 |
| RENE THOM | 1958 | Francia | 4 |
| LARS HORMANDER | 1962 | Suecia | 3 |
| JOHN MILNOR | 1962 | EE.UU | 3 |
| MICHAEL ATIYAH | 1966 | Gran Bretaña | 4 |
| PAUL COHEN | 1966 | EE.UU | 5 |
| ALEXANDER GROTHENDIECK | 1966 | Alemania | 5 |
| STEPHEN SMALE | 1966 | EE.UU | 4 |
| ALAN BAKER | 1970 | Gran Bretaña | 2 |
| HEISUKE HIRONAKA | 1970 | Japón | 4 |
| SERGE NOVIKOV | 1970 | Rusia | 3 |
| JOHN G. THOMPSON | 1970 | EE.UU | 3 |
| ENRICO BOMBIERI | 1974 | Italia | 2 |
| DAVID MUMFORD | 1974 | Gran Bretaña | 2 |
| PIERRE DELIGNE | 1978 | Bélgica | 3 |
| CHARLES FEFFERMAN | 1978 | EE.UU | 2 |
| GREGORI MARGULIS | 1978 | Rusia | 4 |
| DANIEL QUILLEN | 1978 | EE.UU | 3 |
| ALAIN CONNES | 1982 | Francia | 3 |
| WILLIAM THURSTON | 1982 | EE.UU | 4 |
| SHING-TUNG YAU | 1982 | China | 2 |
| SIMON DONALDSON | 1986 | Gran Bretaña | 4 |
| GERD FALTINGS | 1986 | Alemania | 4 |
| MICHAEL FREEDMAN | 1986 | EE.UU | 4 |
| VALDIMIR DRINFELD | 1990 | Rusia | 4 |
| VAUGHAN JONES | 1990 | Nueva Zelanda | 4 |
| SHIGEMUFI MORI | 1990 | Japón | 3 |
| EDWARD WITTEN | 1990 | EE.UU | 3 |
| PIERRE-LOUIS LIONS | 1994 | Francia | 4 |
| JEAN CHRISTOPHE YOCOZ | 1994 | Francia | 4 |
| JEAN BOURGAIN | 1994 | Bélgica | 2 |
| EFIM ZELMANOV | 1994 | Rusia | 4 |
| RICHARD BORCHERDS | 1998 | Suráfrica | 2 |
| WILLIAM T. GOWERS | 1998 | Gran Bretaña | 4 |
| MAXIM L. KONTSEVICH | 1998 | Rusia | 4 |
| CURTIS McMULLEN | 1998 | EE.UU. | 3. |

TABLA 3. Cotas superiores de los números de Erdős de los ganadores de la Medalla Fields.

1936 y recayó en el matemático finlandés LARS AHLFORS y en el neoyorquino JESSE DOUGLAS (ambos ya fallecidos); por el conflicto europeo se suspendió durante 14 años y se reanudó en 1950. En total, se han conferido 42 medallas a matemáticos de 14 países diferentes. La última ceremonia tuvo lugar en Berlín, en agosto de 1998.

Una lectura ciudadosa de la Tabla 3 muestra que, aunque ERDŐS nunca publicó con ninguno de los 42

| Premio Steele | Año | País de origen | # de Erdős |
|-----------------------|------|----------------|------------|
| SALOMON BOCHNER | 1979 | Polonia | 2 |
| ANTONI ZYGMUND | 1979 | Polonia | 2 |
| ANDRÉ WEIL | 1980 | Francia | 4 |
| GERHARD P. HOCHSCHILD | 1980 | Alemania | 4 |
| OSCAR ZARISKI | 1981 | Polonia | 3 |
| FRITZ JOHN | 1982 | Alemania | 4 |
| SHIING SHEN CHERN | 1983 | China | 2 |
| JOSEPH L. DOOB | 1984 | EE.UU | 2 |
| HASSLER WHITNEY | 1985 | EE.UU | 2 |
| SAUNDERS MAC LANE | 1986 | EE.UU | 3 |
| SAMUEL EILENBERG | 1987 | Polonia | 2 |
| DEANE MONTGOMERY | 1988 | EE.UU. | 3 |
| IRVING KAPLANSKY | 1989 | Canadá | 1 |
| RAOUL BOTT | 1990 | Hungría | 3 |
| ARMAND BOREL | 1991 | Suiza | 3 |
| PETER D. LAX | 1992 | Hungría-EE.UU | 3 |
| EUGENE B. DYNKIN | 1993 | Rusia | 3 |
| LOUIS NIRENBERG | 1994 | Canadá | 3 |
| JOHN T. TATE | 1995 | EE.UU. | 3 |
| GORO SHIMURA | 1996 | Japón | 2 |
| RALPH S. PHILLIPS | 1997 | EE.UU. | 2 |
| NATHAN JACOBSON | 1998 | EE.UU. | 3 |
| RICHARD V. KADISON | 1999 | EE.UU. | 3 |

TABLA 4. Cotas superiores de los números de Erdős de los ganadores del Premio Steele (Vida y Obra).

medallistas (algo que ameritaría una reflexión adicional), 10 de ellos tienen número de ERDŐS 2 y sólo para dos (COHEN y GROTHENDIECK) el número es mayor que 4. Los grafos de colaboración de los cuales hemos obtenido estos valores se encuentran desplegados en el sitio *Web* [89]. Es posible que algunos caminos se puedan acortar aún más, pero con los datos actuales el número de ERDŐS promedio de los medallistas Fields es 3.31, con desviación estándar 0.89 y mediana 4.

4. Números de Erdős de los ganadores de los premios Steele, Wolf y Nevanlinna

La Medalla Fields tiene el prestigio de un premio Nobel, pero hay muchos otros galardones internacionales importantes conferidos a matemáticos. Tal vez los que tienen mayor reputación, y que han adquirido prominencia con los años, son el premio Leroy P. Steele, el premio Rolf Nevanlinna y el premio Wolf en Matemáticas. Estas distinciones se instituyeron en el lapso de 12 años, a partir de 1970.

• El *Premio Leroy P. Steele* es concedido por la *American Mathematical Society*. Entre 1970 y 1976 se otorgaron uno o más premios por publicaciones investigativas sobresalientes; en 1977 la AMS modificó los términos bajo los cuales se entregaban los premios (véase [6]).

| Premio Wolf | Año | País | # de Erdős |
|-------------------------|---------|----------------|------------|
| IZRAIL M. GELFAND | 1978 | Rusia | 3 |
| CARL L. SIEGEL | 1978 | Alemania | 3 |
| JEAN LERAY | 1979 | Francia | 3 |
| ANDRÉ WEIL (PS) | 1979 | Francia | 4 |
| HENRI CARTAN | 1980 | Francia | 3 |
| ANDREI N. KOLMOGOROV | 1980 | Rusia | 5 |
| LARS AHLFORS (MF) | 1981 | Finlandia | 4 |
| OSCAR ZARISKI (PS) | 1981 | EE.UU. | 3 |
| HASSLER WHITNEY (PS) | 1982 | EE.UU. | 2 |
| MARK G. KREIN | 1982 | Ucrania | 4 |
| SHIING SHEN CHERN (PS) | 1983-84 | China | 2 |
| PAUL ERDŐS | 1983-84 | Hungría | 0 |
| KUNIHICO KODAIRA (MF) | 1984-85 | Japón | 2 |
| HANS LEWY | 1984-85 | Alemania | 3 |
| SAMUEL EILENBERG (PS) | 1986 | Polania | 2 |
| ATLE SELBERG (MF) | 1986 | Noruega | 2 |
| KIYOSHI ITO | 1987 | Japón | 3 |
| PETER D. LAX (PS) | 1987 | Hungría | 3 |
| FRIEDRICH E. HIRZEBRUCH | 1988 | Alemania | 3 |
| LARS HORMANDER (MF) | 1988 | Suecia | 3 |
| ALBERTO CALDERÓN | 1989 | Argentina | 3 |
| JOHN MILNOR (MF) | 1989 | EE.UU. | 3 |
| ENNO DE GIORGI | 1990 | Italia | 3 |
| ILYA PIATETSKI-SHAPIRO | 1990 | Rusia | 3 |
| LENNART A. CARLESON | 1992 | Suecia | 4 |
| JOHN G. THOMPSON (MF) | 1992 | EE.UU. | 3 |
| MIKHAEL GROMOV | 1993 | Rusia | 3 |
| JACQUES TITS | 1993 | Bélgica | 4 |
| JURGEN K. MOSER | 1994-95 | Alemania | 3 |
| ROBERT LANGLANDS | 1995-96 | Canadá | 2 |
| ANDREW WILES | 1995-96 | Inglaterra | 3 |
| JOSEPH B. KELLER | 1997 | EE.UU. | 3 |
| YAKOV G. SINAI | 1997 | Rusia | 4 |
| LÁSZLÓ LOVÁSZ | 1999 | Hungría | 1 |
| ELIAS M. STEIN | 1999 | Bélgica-EE.UU. | 2 |

(FM): Medalla Fields

(PS): Premio Steele

TABLA 5. Cotas superiores de los números de Erdős de los ganadores del premio Wolf en matemáticas.

Desde entonces se han conferido un máximo de tres distinciones por año en las siguientes categorías:

1. Premio a la Vida y Obra de un matemático. Por la influencia acumulada de la totalidad de la contribución matemática del galardonado.
2. Exposición Matemática. Por un libro o monografía o artículo divulgativo de gran calidad.
3. Significativa Contribución Investigativa. Por un artículo, reciente o no, que haya tenido repercusiones fundamentales o duraderas en su campo.

• El *Premio Wolf* es concedido por la Fundación Wolf de Israel. Todos los años (desde 1978) otorga premios

| Premio Nevanlinna | Año | País | # de Erdős |
|--------------------|------|--------------------|------------|
| ROBERT TARJAN | 1982 | EE.UU. | 2 |
| LESLIE VALIANT | 1986 | Hungría/Inglaterra | 3 |
| ALEXANDER RAZBOROV | 1990 | Rusia | 2 |
| AVI WIGDERSON | 1994 | Israel | 2 |
| PETER SHOR | 1998 | EE.UU. | 2 |

TABLA 6. Cotas superiores de los números de Erdős de los ganadores del premio Nevanlinna.

de 100.000 dólares por logros sobresalientes en agricultura, química, medicina, artes, matemáticas y física. El premio Wolf en matemáticas le fue conferido en 1984 a PAUL ERDŐS; aparte de sus contribuciones a muchas áreas de la matemática, la citación oficial añade "por inspirar personalmente a matemáticos de todo el mundo".

• El *Premio Rolf Nevanlinna* se entrega cada cuatro años, al igual que la Medalla Fields, durante el Congreso Internacional de Matemáticos. Se concedió por primera vez en 1982 con fondos proporcionados desde entonces por la Universidad de Helsinki. Se trata de un premio restringido, en el sentido de que se concede, en cada ocasión, solamente a un matemático joven que trabaje en el área de la informática (ciencias de la computación).

Hemos compilado tablas de números de Erdős de todos los ganadores del premio Steele, categoría vida y obra de un matemático (Tabla 4), del premio Wolf en matemáticas (Tabla 5) y del premio Nevanlinna (Tabla 6), y hemos encontrado que todos ellos son ≤ 5 . El lector es, de nuevo, referido a la página *Web* [89] para los correspondientes grafos de colaboración.

5. ¿Hasta dónde se extiende la conexión Erdős?

En esta sección veremos primero cómo están representadas las diferentes áreas de la matemática en la componente de ERDŐS de C . Consideraremos luego otras disciplinas académicas en nuestro esfuerzo por determinar el alcance de la conexión ERDŐS fuera del mundo matemático.

Tanto *Mathematical Reviews* (MR) [124] como *Zentralblatt für Mathematik* (Zbl) [165] asignan un número a cada trabajo publicado, que representa su tópico central (*subject area*). Por ejemplo, combinatoria es 05 y teoría de números es 11 (para mencionar las áreas del 80% de las publicaciones de PAUL ERDŐS). Actualmente se utilizan un total de 61 categorías generales (véase [7]). Resulta —y tal vez no sea ya sorprendente— que todas las 61 áreas de clasificación están representadas en la

componente de ERDŐS de C . De hecho, podemos decir mucho más: ERDŐS mismo publicó en por lo menos 27 de estas categorías, sus co-autores han publicado en por lo menos 32 más, y varias personas con número de ERDŐS 2 han publicado en las restantes dos (K -teoría y geofísica).

En la sección 2 exhibimos muchos científicos prestigiosos, de diversas especialidades, cuyo número de ERDŐS es finito. Podemos ir un tanto más lejos si tenemos presente que modelos y herramientas matemáticos sofisticados se han usado de manera estándar en muchos dominios fuera de las ciencias naturales, la ingeniería y la informática. Es por eso que los editores de *Mathematical Reviews* reseñan artículos con contenido matemático de múltiples revistas provenientes de áreas como finanzas, actuaría, sicología, sociología, antropología, investigación de operaciones, administración, control de calidad, medicina, dinámica de poblaciones, etc. No es difícil encontrar individuos con números de ERDŐS relativamente pequeños y que publican en tales revistas. Por ejemplo, SCOTT A. BOORMAN, cuyo número de ERDŐS es a lo sumo 7, tiene artículos publicados en las revistas *Journal of Mathematical Psychology* y *Journal of Mathematical Sociology*; muchos de sus trabajos aparecen reseñados en *Sociological Abstracts*. PETER C. FISHBURN, co-autor de ERDŐS, ha publicado en *Management Science* y en *Theory and Decision, An International Journal for Methods and Models in the Social and Decision Sciences*.

Ciertamente cientos, si no miles, de estadísticos tienen números de ERDŐS finitos, y es usual encontrarlos como co-autores en los trabajos que surgen de sus consultorías.

Pero probablemente la fuente más fecunda de enlaces con otras disciplinas es FRANK HARARY, co-autor de PAUL ERDŐS, y quien, a su vez, tiene más de 270 co-autores. HARARY nos ha informado¹¹ que ha publicado con antropólogos, arquitectos, biólogos, químicos, economistas, ingenieros, geógrafos, periodistas (incluyendo a un sobrino segundo del escritor JAMES JOYCE), médicos, filósofos, físicos (como GEORGE UHLENBECK), escritores científicos (como MARTIN GARDNER), analistas políticos, sicólogos y sociólogos, entre otros. Sus artículos aparecen en revistas muy variadas (y que son reseñadas por MR) tales como *Behavioral Science*, *The Journal of Mathematical Psychology*, *The Journal of Mathematical Sociology*, *The Journal of*

Theoretical Biology, *Mind*, *Psychometrika*, *Social Networks*, *Sociometry*, *American Antiquity*, *Current Anthropology*, *The Journal of Chemical Documentation*, *Language*, *The Journal of Social Psychology* y *Oceania*.

Es claro que la búsqueda de colaboraciones en otras disciplinas requiere un trabajo más exhaustivo y sistemático.

6. Observaciones finales y preguntas abiertas

A priori podría pensarse que, para que un matemático ingrese a la componente de ERDŐS de C , es necesario que tenga muchos co-autores. Pero una de las conclusiones importantes que hemos podido extraer al recopilar información para el presente artículo, es que lo que realmente importa no es *con cuántos* se publica sino *con quiénes* se publica. O para decirlo de manera displicente, la *calidad* tiene más peso que la *cantidad*. Podemos ilustrarlo con un ejemplo más dramático que los que hasta ahora hemos presentado: el caso del gran lógico austriaco KURT GÖDEL. Por su número de artículos conjuntos, GÖDEL está en el otro extremo del espectro con respecto a ERDŐS: ¡sólo escribió uno! (véase [83]), la nota de una página (en alemán) que publicó con KARL MENGER y ABRAHAM WALD [84] referente a la concepción de MENGER sobre las geometrías diferencial y proyectiva. Sucede que el número de ERDŐS de WALD es 2; por consiguiente, a pesar de su "precario" número de artículos conjuntos, GÖDEL inscribe su nombre en la componente de ERDŐS de C y lo hace con un número de ERDŐS bastante pequeño.

Concluimos con algunas preguntas abiertas que, aun en la era de los supercomputadores y la autopista mundial de la información, son extremadamente difíciles de responder. Las primeras dos ya habían sido formuladas en [94] pero su posible respuesta no se vislumbra.

- En el grafo de colaboración C , ¿cuál es la segunda componente más grande (medida por el número de sus vértices)? Si nos restringimos solamente a matemáticos, la segunda componente más grande no es probablemente muy extensa, pero es perfectamente concebible que haya grandes componentes en otras disciplinas.
- ¿Cuáles son el radio y el diámetro de la componente de ERDŐS de C (en términos técnicos)? Aquí también, la pregunta es interesante en el caso general o en su restricción a los matemáticos.

¹¹Comunicación privada.

- El número *Nobel-Erdős* es, en un momento determinado, el número de premios Nobel que tienen un número de ERDŐS finito. Este número cambia en la medida en que se conceden nuevos premios y aparecen nuevas publicaciones conjuntas. Hemos establecido que el número *Nobel-Erdős* es ≥ 66 (véase la Tabla 1) pero su valor exacto (por ejemplo, en junio de 1999) no se conoce. Es casi seguro que nuestra cota superior se pueda refinar ostensiblemente.
- El *alcance Erdős* mide qué tan lejos llega en la historia la conexión con PAUL ERDŐS. Más precisamente, podemos definir el 'alcance ERDŐS' como el más pequeño número que representa el año de nacimiento de una persona con un número de ERDŐS finito. Todo lo que por ahora podemos decir es que dicho número no es mayor de 1849, el año de nacimiento de GEORG FROBENIUS (1849-1917), el algebrista alemán que hizo importantes contribuciones a la teoría de grupos. Desarrolló la mayor parte de la teoría de grupos finitos de sustituciones lineales en colaboración con ISSAI SCHUR (1875-1941) [77]. Resulta que el número de ERDŐS de SCHUR es 2 por su memoria conjunta [153] de 1925 con GABOR SZEGŐ, uno de los co-autores de ERDŐS.

No sabemos si el 'alcance ERDŐS' nos lleve hasta comienzos del siglo XIX o más atrás; de lo que sí podemos estar seguros es de que la conexión ERDŐS irradiará por siempre el futuro.

Agradecimientos. Después de la aparición de la versión en inglés de este artículo en *The Mathematical Intelligencer* hemos recibido mensajes electrónicos de algunos lectores, en los que nos informan sobre nuevas conexiones o trayectorias más cortas. Parte de esa información ha sido incorporada al presente texto. Queremos agradecer a DORON ZEILBERGER (Temple University, EE.UU.) por la conexión con LARS ONSAGER, a KEITH F. TAYLOR (University of Saskatchewan, Canadá) por la conexión con KENICHI FUKUI y a SIMON LEVIN (Princeton University, EE.UU.) por los datos bibliográficos que nos permitieron reducir los números de ERDŐS de P. SAMUELSON y R. SOLOW.

El primer autor desea expresar sus agradecimientos a los profesores VÍCTOR ALBIS y JAIRO CHARRIS, cuyas observaciones mejoraron considerablemente la presente versión.

REFERENCIAS

- [1] K. ALDER, A. BOHR, T. HUUS, B. MOTTELSON & A. WINTHER, *Study of nuclear structure by electromagnetic excitation with accelerated ions*, Rev. Modern Physics **28** (1956), 432-542.
- [2] MANUEL ALFONSECA, *Grandes Científicos de la Humanidad*, Espasa Calpe, Madrid, 1999.
- [3] R. A. ALPHER, H. BETHE & G. GAMOW, *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. (2) **73** (1948), 803-804.
- [4] LUIS W. ALVAREZ, WALTER ALVAREZ, FRANK ASARO & HELEN V. MICHEL, *Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction: experimental results and theoretical interpretation*, Science **208** (1980), no. 4448, 1095-1108.
- [5] LUIS ALVAREZ-GAUME & EDWARD WITTEN, *Gravitational anomalies*, Nuclear Phys. B **234** (1984), no. 2, 269-330.
- [6] American Mathematical Society, *The Leroy P. Steele Prizes*, Internet page: <http://www.ams.org/ams/prizes.html#steele>.
- [7] American Mathematical Society, *1991 Mathematics Subject Classification*, Internet page: <http://www.ams.org/msc/>.
- [8] S. ARIMOTO, K. FUKUI, K. TAYLOR & P. MEZEY, *Structural Analysis of Certain Linear Operators Representing Chemical Network Systems via the Existence and Uniqueness Theorems of Spectral Resolution IV*, International J. of Quantum Chemistry **67** (1998) 57-69.
- [9] KENNETH J. ÁRROW, SAMUEL KARLIN, HERBERT SCARF, et al., *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, 1958.
- [10] K. J. ARROW, H. B. CHENERY, B. S. MINHAS & R. M. SOLOW, *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, The Review of Economics and Statistics **58** no. 3, August 1961.
- [11] YEHOASHUA BAR-HILLEL & RUDOLF CARNAP, *Semantic information*, British J. Philos. Sci. **4** (1953), 147-157.
- [12] Y. BAR-HILLEL, M. PERLES & E. SHAMIR, *On formal properties of simple phrase structure grammars*, Z. Phonetik Sprachwiss. Kommunikat. **14** (1961), 143-172.
- [13] M. BARANGER, H. A. BETHE & R. P. FEYNMAN, *Relativistic correction to the Lamb shift*, Phys. Rev. (2) **92** (1953), 482-501.
- [14] J. BARDEEN & W. H. BRATTAIN, *Physical principles involved in transistor action*, Phys. Rev. (2) **75** (1949), 1208-1225.
- [15] J. BARDEEN, L. N. COOPER & J. R. SCHRIEFFER, *Microscopic theory of superconductivity*, Phys. Rev. (2) **106** (1957) 162-164.
- [16] J. BARDEEN, L. N. COOPER & J. R. SCHRIEFFER, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. (2) **108** (1957) 1175-1204.
- [17] JOHN BARDEEN & DAVID PINES, *Electron-phonon interactions in metals*, Phys. Rev. (2) **99** (1955), 1140-1150.
- [18] J. BARDEEN & W. SHOCKLEY, *Scattering of electrons in crystals in the presence of large electric fields*, Phys. Rev. (2) **80** (1950), 69-71.
- [19] M. BECKMANN & T. MARSCHAK, *An activity analysis approach to location theory*, in *Proc. Second Symposium in Linear Programming (Washington, DC, 1955)*, National Bureau of Standards, Washington, D.C., pp. 331-379.
- [20] EVERT W. BETH & JEAN PIAGET, *Mathematical Epistemology and Psychology*, D. Reidel Publishing Co., 1966.

- [21] DAVID BOHM & DAVID A. PINES, *A collective description of electron interactions. I, II, III*, Phys. Rev. (2) **82** (1951), 625–634; **85** (1952), 338–353; **92** (1953), 609–625.
- [22] A. BOHR, B. R. MOTTESON & D. PINES, *Possible analogy between the excitation spectra of nuclei and those of the superconducting metallic state*, Phys. Rev. (2) **110** (1958), 936–938.
- [23] HARALD BOHR & BORGE JESSEN, *Mean motions and almost periodic functions*, in *Analyse Harmonique, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 15, pp. 75–84, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1949.
- [24] NIELS BOHR & DIRK COSTER, Zeit. Physik **32** (1923), 342.
- [25] NIELS BOHR, H. A. KRAMERS & J. C. SLATER, Phil. Mag. **42** (1924), 785.
- [26] NIELS BOHR & JOHN ARCHIBALD WHEELER, *The mechanism of nuclear fission*, Phys. Rev. (2) **56** (1939), 426–450.
- [27] MAX BORN, W. HEISENBERG & P. JORDAN, *Zur Quantenmechanik. II*, Zeit. Physik **35** (1926), 557–615.
- [28] MAX BORN & T. VON KÁRMÁN, *Zur Theorie der spezifischen Wärme*, Phys. Zeitschr. **14** (1913), 15–19.
- [29] MAX BORN & MAX VON LAUE, Phys. Zeitschr. **24** (1923), 49–53.
- [30] MAX BORN & NORBERT WIENER, *A new formulation of the laws of quantization for periodic and aperiodic phenomena*, J. Math. Phys. **5** (1926), 84–98.
- [31] NICOLAS BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann Editeurs, 1969.
- [32] *Britannica CD-97*, Encyclopædia Britannica, Inc., 1997.
- [33] W. M. BROBECK, E. O. LAWRENCE, K. R. MACKENZIE, E. M. McMILLAN, R. SERBER, D. C. SEWELL, K. M. SIMPSON & R. L. THORNTON, *Initial performance of the 184-inch cyclotron of the University of California*, Phys. Rev. (2) **71** (1947), 449–450.
- [34] LOUIS DE BROGLIE, DAVID BOHM, PIERRE HILLION, FRANCIS HALBWACHS, TAKEHIKO TAKABAYASI & JEAN-PIERRE VIGIER, *Rotator model of elementary particles considered as relativistic extended structures in Minkowski space*, Phys. Rev. (2) **129** (1963), 438–450.
- [35] P. CANDELAS, GARY T. HOROWITZ, ANDREW STROMINGER & EDWARD WITTEN, *Vacuum configurations for superstrings*, Nuclear Phys. B **258** (1985), no. 1, 46–74.
- [36] O. CHAMBERLAIN, E. SEGRÈ & C. WIEGAND, *Experiments on proton-proton scattering from 120 to 345 Mev*, Phys. Rev. (2) **83** (1951), 923–932.
- [37] A. CHARNES, W. W. COOPER & MERTON MILLER, *Dyadic programs and subdual methods*, Naval Res. Logist. Quart. **8** (1961), 1–23.
- [38] A. CHARNES, FRED GLOVER & D. KLINGMAN, *The lower bounded and partial upper bounded distribution model*, Naval Res. Logist. Quart. **18** (1971), 277–281.
- [39] J. G. CHARNEY, R. FJÖRTOFT & J. VON NEUMANN, *Numerical integration of the barotropic vorticity equation*, Tellus **2** (1950), 237–254.
- [40] N. CHOMSKY & M. P. SCHUTZENBERGER, *The algebraic theory of context-free languages*, in *Computer programming and formal systems*, North-Holland, 1963, 118–161.
- [41] J. D. COLE, H. B. KELLER & P. G. SAFFMAN, *The flow of a viscous compressible fluid through a very narrow gap*, SIAM J. Appl. Math. **15** (1967) 605–617.
- [42] DIRK COSTER & GEORGE DE HEVESY, Nature **111** (1923), 79.
- [43] F. H. C. CRICK, J. S. GRIFFITH & L. E. ORGEL, *Codes without commas*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **43** (1957), 416–421.
- [44] M. CURIE, H. A. LORENTZ & A. EINSTEIN, *The establishment of an international bureau of meteorology*, Science **65** (1927), 415–417.
- [45] R. H. DALITZ & F. J. DYSON, *Renormalization in the new Tamm-Dancoff theory of meson-nucleon scattering*, Phys. Rev. (2) **99** (1955), 301–314.
- [46] R. H. DALITZ & D. G. RAVENHALL, *On the Tomonaga method for intermediate coupling in meson field theory*, Philos. Mag. (7) **42** (1951), 1378–1383.
- [47] R. H. DALITZ, M. K. SUNDARESEN & H. A. BETHE, *A singular integral equation in the theory of meson-nucleon scattering*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 251–272.
- [48] RODRIGO DE CASTRO, *Sobre el número de Erdős*, Lect. Mat. **17** (1996), 163–179.
- [49] GERARD DEBREU, *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 17, John Wiley, 1959.
- [50] GERARD DEBREU & TJALLING C. KOOPMANS, *Additively decomposed quasiconvex functions*, Math. Programming **24** (1982), no. 1, 1–38.
- [51] GERARD DEBREU & HERBERT SCARF, *The limit of the core of an economy*, in *Decision and Organization*, North Holland, 1972, pp. 283–295.
- [52] P. DEBIJE [PETER DEBYE] & A. SOMMERFELD, *Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkte des Wirkungsquantums*, Ann. Physik **41** (1913), 873–930.
- [53] P. DEBYE & LINUS PAULING, *The inter-ionic attraction theory of ionized solutes. IV. The influence of variation of dielectric constant on the limiting law for small concentrations*, J. Am. Chem. Soc. **47** (1925), 2129–2134.
- [54] XIAO TIE DENG & CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU, *On path lengths modulo three*, J. Graph Theory **15** (1991), no. 3, 267–282.
- [55] KEITH DEVLIN, *A Nobel formula*, Internet page: <http://www.maa.org/devlin/devlin.11.97.html>.
- [56] OTTO DIELS & KURT ALDER, *Synthesen in der hydroaromatischen Reihe*, Justus Liebigs Annalen der Chemie **460** (1928), 98–122.
- [57] P. A. M. DIRAC, V. A. FOCK & BORIS PODOLSKY, *On quantum electrodynamics*, Physik. Zeits. Sowjetunion **2**, no. 6 (1932), 468–479.
- [58] MARC DUPUIS, ROBERT M. MAZO & LARS ONSAGER, *Surface specific heat of an isotropic solid at low temperatures*, J. Chem. Phys. **33** (1960), 1452–1461.
- [59] P. EHRENFEST & R. OPPENHEIMER, *Note on the statistics of nuclei*, Phys. Rev. (2) **37** (1931), 333–338.
- [60] SAMUEL EILENBERG & M. P. SCHUTZENBERGER, *On pseudovarieties*, Advances in Math. **19** (1976), no. 3, 413–418.
- [61] A. EINSTEIN & P. EHRENFEST, *Quantentheoretische Bemerkungen zum Experiment von Stern und Gerlach*, Z. Phys. **11** (1922), 31–34.
- [62] ALBERT EINSTEIN & SIGMUND FREUD, *Warum Krieg? Ein Briefwechsel*, Institut International de Coopération Intellectuelle, 1933.

- [63] ALBERT EINSTEIN & HANS MÜHSAM, *Experimentelle Bestimmung der Kanalweite von Filtern*, Deutsch. med. Wochenschr. **49** (1923), 1012–1013.
- [64] A. EINSTEIN & W. PAULI, *On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations*, Ann. Math. (2) **44** (1943), 131–137.
- [65] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY & N. ROSEN, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. (2) **47** (1935), 777–780.
- [66] A. EINSTEIN & O. STERN, *Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt*, Ann. Phys. Lpz. (4) **40** (1913), 551–560.
- [67] M. FERENTZ, M. GELL-MANN & D. PINES, *The giant nuclear dipole resonance*, Phys. Rev. (2) **92** (1953), 836–837.
- [68] E. FERMI & E. SEGRÈ, *Zur Theorie der Hyperfeinstruktur*, Zeit. Physik **82** (1933), 729–749.
- [69] E. FERMI, E. TELLER & V. WEISSKOPF, *The decay of negative mesotrons in matter*, Phys. Rev. (2) **71** (1947), 314–315.
- [70] ENRICO FERMI & GEORGE E. UHLENBECK, *On the recombination of electrons and positrons*, Phys. Rev. (2) **44** (1933), 510–511.
- [71] E. FERMI & C. N. YANG, *Are messons elementary particles?*, Phys. Rev. (2) **76** (1949), 1739–1743.
- [72] GUILLERMO FERREYRA, *The Mathematics Behind the 1997 Nobel Prize in Economics*, Internet page: www.ams.org/new-in-math/black-scholes-ito.html.
- [73] R. P. FEYNMAN, M. GELL-MANN & G. ZWEIG, *Group $U(6) \otimes U(6)$ generated by current components*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 678–680.
- [74] M. FLATO, C. PIRON, J. GREA, D. STERNHEIMER & J.-P. VIGIER, *Are Bell's inequalities concerning hidden variables really conclusive?*, Helv. Phys. Acta **48** (1975), no. 2, 219–225.
- [75] G. W. FORD, J. T. LEWIS & R. F. O'CONNELL, *Quantum oscillator in a blackbody radiation field*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 21, 2273–2276.
- [76] K. O. FRIEDRICH & H. B. KELLER, *A finite difference scheme for generalized Neumann problems*, in *Numerical Solution of Partial Differential Equations* (Proc. Sympos. Univ. Maryland, 1965), Academic Press, 1966, pp. 1–19.
- [77] G. FROBENIUS & I. SCHUR, *Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1906), 209–217.
- [78] W. H. FURRY & N. F. RAMSEY, *Significance of potentials in quantum theory*, Phys. Rev. (2) **118** (1960), 623–626.
- [79] WILLIAM H. GATES & CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU, *Bounds for sorting by prefix reversal*, Discrete Math. **27** (1979), no. 1, 47–57.
- [80] G. W. GIBBONS, S. W. HAWKING, GARY T. HOROWITZ & M. J. PERRY, *Positive mass theorems for black holes*, Comm. Math. Phys. **88** (1983), no. 3, 295–308.
- [81] SHELDON L. GLASHOW & MURRAY GELL-MANN, *Gauge theories of vector particles*, Ann. Physics **15** (1961), 437–460.
- [82] S. L. GLASHOW & D. J. KLEITMAN, *Baryon resonances in W_3 symmetry*, Phys. Lett. **11** (1964), 84–86.
- [83] KURT GÖDEL, *Collected Works*, edited by S. FEFERMAN, Oxford University Press, 1986.
- [84] KURT GÖDEL, K. MENGER & A. WALD, *Diskussion über koordinatenlose Differentialgeometrie*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums **5** (1933), 25–26.
- [85] CASPER GÖFFMAN, *And what is your Erdős number?*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 791.
- [86] JEFFREY GOLDSTONE, ABDUS SALAM & STEVEN WEINBERG, *Broken symmetries*, Phys. Rev. (2) **127** (1962), 965–970.
- [87] NELSON GOODMAN & W. V. QUINE, *Steps toward a constructive nominalism*, J. Symbolic Logic **12** (1947), 105–122.
- [88] RONALD L. GRAHAM & JAROSLAV NEŠETŘIL, editors, *The Mathematics of Paul Erdős*, vols. I–II, Algorithms and Combinatorics **13–14**, Springer-Verlag, 1997.
- [89] JERROLD W. GROSSMAN, *The Erdős Number Project World Wide Web Site*, <http://www.oakland.edu/~grossman/erdoshp.html>.
- [90] JERROLD W. GROSSMAN, *List of people with Erdős Number at most 2*, available in [89] and via anonymous ftp to vela.acs.oakland.edu in directory `pub/math/erdos`, Oakland University, Rochester, MI, 1998 (updated annually).
- [91] JERROLD W. GROSSMAN, preparer, *List of publications of Paul Erdős*, in [88], pp. 477–573.
- [92] JERROLD W. GROSSMAN, *Paul Erdős: the master of collaboration*, in [88], pp. 467–475.
- [93] JERROLD W. GROSSMAN, *Review of [48]*.
- [94] JERROLD W. GROSSMAN & PATRICK D. F. ION, *On a portion of the well-known collaboration graph*, Proc. 26th South-eastern Inter. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL, 1995), Congr. Numer. **108** (1995), 129–131.
- [95] FRED GROSS & HERBERT HAUPTMAN, *On a functional equation related to the Weierstrass sigma function*, Indian J. Pure Appl. Math. **5** (1974), no. 11, 1022–1032.
- [96] S. GUDDER & C. PIRON, *Observables and the field in quantum mechanics*, J. Mathematical Phys. **12** (1971), 1583–1588.
- [97] BEAT HAHN, D. G. RAVENHALL & ROBERT HOFSTADTER, *High-energy electron scattering and the charge distributions of selected nuclei*, Phys. Rev. (2) **101** (1956), 1131–1142.
- [98] JOHN C. HARSANYI & REINHARD SELTEN, *A generalized Nash solution for two-person bargaining games with incomplete information*, Management Sci. **18** (1971/72), P80–P106.
- [99] H. HAUPTMAN & J. KARLE, *Rational dependence and the renormalization of structure factors for phase determination*, Acta Cryst. **12** (1959), 846–850.
- [100] STEVE J. HEIMS, *John von Neumann and Norbert Wiener*, MIT Press, 1980.
- [101] S. W. HAWKING & R. PENROSE, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **314** (1970), 529–548.
- [102] WERNER HEISENBERG & A. SOMMERFELD, Zeit. Physik **31** (1922), 131.
- [103] D. HILBERT, J. v. NEUMANN & L. NORDHEIM, *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*, Math. Ann. **98** (1927), 1–30.
- [104] M. HILLERY, R. F. O'CONNELL, M. O. SCULLY & E. P. WIGNER, *Distribution functions in physics: fundamentals*, Phys. Rep. **106** (1984), no. 3, 121–167.

- [105] J. HOFBAUER, J. MALLET-PARET & H. L. SMITH, *Stable periodic solutions for the hypercycle systems*, J. Dynamics Differential Equations **3** (1991), no. 3, 423–436.
- [106] A. J. HOFFMAN & H. M. MARKOWITZ, *A note on shortest path, assignment, and transportation problems*, Naval Res. Logist. Quart. **10** (1963), 375–379.
- [107] PAUL HOFFMAN, *The Man Who Loved Only Numbers*, Hyperion, 1998.
- [108] International Mathematical Union, *Fields Medals and Rolf Nevanlinna Prize*, Internet page: <http://elib.zib.de/IMU/medals>.
- [109] *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1868–1942, Berlin.
- [110] JOHN H. KAGEL & ALVIN E. ROTH, editors, *The Handbook of Experimental Economics*, Princeton University Press, 1995.
- [111] B. KAUFMAN & LARS ONSAGER, *Crystal statistics III. Short-Range order in a binary Ising lattice*, Phys. Rev. **76** (1949), 1244.
- [112] JOHN G. KEMENY, OSKAR MORGENSTERN & GERALD L. THOMPSON, *A generalization of the von Neumann model of an expanding economy*, Econometrica **24** (1956), 115–135.
- [113] TJALLING C. KOOPMANS & MARTIN BECKMANN, *Assignment problems and the location of economic activities*, Econometrica **25** (1957), 53–76.
- [114] H. A. KRAMERS & W. PAULI, *Zur theorie der banden spek-tren*, Zeit. Physik **13** (1923), 351–367.
- [115] W. D. KRENTEL, J. C. C. MCKINSEY & W. V. QUINE, *A simplification of games in extensive form*, Duke Math. J. **18** (1951), 885–900.
- [116] TSUNG-DAO LEE & DAVID PINES, *Interaction of a nonrelativistic particle with a scalar field with application to slow electrons in polar crystals*, Phys. Rev. (2) **92** (1953) 883–889.
- [117] T. D. LEE & C. N. YANG, *Parity nonconservation and a two-component theory of the neutrino*, Phys. Rev. (2) **105** (1957), 1671–1675.
- [118] T. D. LEE & C. N. YANG, *Question of parity conservation in weak interactions*, Phys. Rev. (2) **104** (1956), 254–258.
- [119] T. D. LEE & C. S. WU, *Weak interactions*, Annual Rev. Nuclear Sci., **15** (1965), 381–476.
- [120] J. T. LEWIS, JAMES MCCONNELL & B. K. P. SCAIFE, *Relaxation effects in rotational Brownian motion*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **76** (1976), no. 7, 43–69.
- [121] *MacTutor History of Mathematics*, Internet page: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>
- [122] ZVONKO MARIC, KARL POPPER & JEAN-PIERRE VIGIER, *Violation of Heisenberg's uncertainty relations on individual particles within subset of γ photons in $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ pair creation*, Found. Phys. Lett. **1** (1988), no. 4, 321–332.
- [123] THOMAS MARSCHAK & REINHARD SELTEN, *General Equilibrium with Price-making Firms*, Springer-Verlag, 1974.
- [124] *Mathematical Reviews*, American Mathematical Society, 1940–.
- [125] JOHN MAYNARD SMITH, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.
- [126] J. MAYNARD SMITH, *The theory of games and the evolution of animal conflict*, J. Theor. Biol. **47** (1974), no. 1, 209–221.
- [127] J. MAYNARD SMITH & JOSEF HOFBAUER, *The "battle of the sexes": a genetic model with limit cycle behavior*, Theoret. Population Biol. **32** (1987), no. 1, 1–14.
- [128] JAMES MCCONNELL & ERWIN SCHRÖDINGER, *The shielding effect of planetary magnetic fields*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **49** (1944), 259–273.
- [129] ROBERT C. MERTON & P. A. SAMUELSON, *A complete model of warrant pricing that maximizes utility*, Industrial Management Review **10** (1969), 17–46.
- [130] FRANCO MODIGLIANI & MERTON MILLER, *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*, Amer. Economic Review **48** (1958):
- [131] FRANCO MODIGLIANI & MERTON MILLER, *Dividend policy, growth and the valuation of shares*, Journal of Business **34** (1961).
- [132] C. Y. MOU, G. NICOLIS, & R. M. MAZO, *Some comments on nonequilibrium phase transitions in chemical systems*, J. Statist. Phys. **18** (1978), no. 1, 19–38.
- [133] GERT H. MULLER, WOLFGANG LENSKI, et al., editors, *Ω -Bibliography of Mathematical Logic*, vols. I–VI, Springer-Verlag, 1987.
- [134] J. F. NASH & L. S. SHAPLEY, *A simple three-person poker game*, in *Contributions to the Theory of Games*, Princeton University Press, 1950, pp. 105–116.
- [135] A. NORDSIECK, W. E. LAMB, JR. & G. E. UHLENBECK, *On the theory of cosmic-ray showers. I. The Furry model and the fluctuation problem*, Physica **7** (1940), 344–360.
- [136] J. R. OPPENHEIMER & R. SERBER, *On the stability of stellar neutron cores*, Phys. Rev. (2) **54** (1938), 540.
- [137] J. R. OPPENHEIMER & H. SNYDER, *On continued gravitational contraction*, Phys. Rev. (2) **56** (1939), 455–459.
- [138] L. S. ORNSTEIN & H. A. KRAMERS, *Zur kinetischen Herleitung des Fermischen Verteilungsgesetzes*, Zeit. Physik **42** (1927), 481–486.
- [139] L. S. ORNSTEIN & F. ZERNIKE, Proc. K. Ak. Amsterdam **28** (1919), 280.
- [140] ABRAHAM PAIS, 'Subtle is the Lord...': *The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, 1982.
- [141] DAVID PINES & J. ROBERT SCHRIEFFER, *Collective behavior in solid-state plasmas*, Phys. Rev. (2) **124** (1961), 1387–1400.
- [142] BORIS PODOLSKY & LINUS PAULING, *The momentum distribution in hydrogen-like atoms*, Phys. Rev. (2) **34** (1929), 109–116.
- [143] I. PRIGOGINE, G. NICOLIS, R. HERMAN & T. LAM, *Stability, fluctuations and complexity*, Collect. Phenom. **2** (1975), no. 2, 103–109.
- [144] I. I. RABI, N. F. RAMSEY & J. SCHWINGER, *Use of rotating coordinates in magnetic resonance problems*, Rev. Modern Physics **26** (1954), 167–171.
- [145] L. J. RAINWATER & C. S. WU, Nucleonics **1** (1947), 60.
- [146] I. W. ROXBURGH, J. S. GRIFFITH & P. A. SWEET, *On models of non spherical stars. I. The theory of rapidly rotating main sequence stars*, Z. Astrophys. **61** (1965) 203–221
- [147] I. W. ROXBURGH & P. G. SAFFMAN, *The growth of condensations in a Newtonian model of the steady-state universe*, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **129** (1965), 181–189.
- [148] ABDUS SALAM & W. GILBERT, *On generalized dispersion relations. II*, Nuovo Cimento (10) **3** (1956), 607–611.
- [149] ABDUS SALAM & J. C. WARD, *Weak and electromagnetic interactions*, Nuovo Cimento (10) **11** (1959), 568–577.
- [150] E. E. SALPETER & H. A. BETHE, *A relativistic equation for bound-state problems*, Phys. Rev. (2) **84** (1951), 1232–1242.

- [151] P. A. SAMUELSON & R. M. SOLOW, *Balanced Growth under Constant Returns to Scale*, 1953, *Econometrica*.
- [152] BRUCE SCHECHTER, *My Brian Is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, 1998.
- [153] I. SCHUR & G. SZEGÖ, *Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1925, *Physikalisch-Mathematische Klasse*, 545-560.
- [154] G. T. SEABORG & E. SEGRÈ, *Nuclear isomerism in element 43*, *Phys. Rev. (2)* **55** (1939), 808-814.
- [155] C. E. SHANNON, *A mathematical theory of communication*, *Bell System Tech. J.* **27** (1948), 379-423, 623-656.
- [156] C. E. SHANNON, R. G. GALLAGER & E. R. BERLEKAMP, *Lower bounds to error probability for coding on discrete memoryless channels. I*, *Information and Control* **10** (1967) 65-103.
- [157] CLAUDE E. SHANNON & WARREN WEAVER, *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, 1949.
- [158] LLOYD SHAPLEY & HERBERT SCARF, *On cores and indivisibility*, *J. Math. Econom.* **1** (1974), 23-37.
- [159] L. C. THOMAS, *Games, Theory and Applications*, Ellis Horwood Ltd., 1984.
- [160] G. E. UHLENBECK & S. GOUDSMIT, *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons*, *Naturwiss.* **13** (1925), 953-954.
- [161] JOHN VON NEUMANN, *Collected Works*, Pergamon Press, 1961-1963.
- [162] JOHN VON NEUMANN & OSKAR MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1944.
- [163] JOHN ARCHIBALD WHEELER & RICHARD PHILLIPS FEYNMAN, *Classical electrodynamics in terms of direct inter-particle action*, *Rev. Modern Physics* **21** (1949), 425-433.
- [164] EDMUND WHITTAKER, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Dover Publications Inc., 1989.
- [165] *Zentralblatt für Mathematik und Ihre Grenzgebiete*, Springer, 1931-.