

# Corrección topocéntrica de parámetros orbitales obtenidos mediante las integrales de Kepler para asteroides MBA y NEO

Santiago Jiménez-Villarraga<sup>1</sup>, Edwin Andrés Quintero-Salazar<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Observatorio Astronómico, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda, Colombia

<sup>2</sup> Observatorio Astronómico, Universidad Tecnológica de Pereira, Complejo Educativo La Julita, Pereira, Risaralda, Colombia

## Resumen

En este estudio se exploró el problema que entraña calcular un conjunto preliminar de parámetros orbitales para asteroides a partir de la observación de sus posiciones relativas en la esfera celeste. Se implementó un método computacional basado en las integrales de Kepler en una variante geocéntrica y en una topocéntrica. El método se aplicó para cinco cuerpos pertenecientes a la familia de asteroides MBA (*main belt asteroids*) y cinco de la familia NEO (*near Earth object*). Además, se analizaron los resultados y los errores en ambas versiones del algoritmo. Los resultados mostraron que el método implementado es adecuado para obtener órbitas preliminares. En general, la versión más precisa para ambas familias de asteroides fue la topocéntrica. También se encontró que la corrección topocéntrica fue más notable para los NEO, puesto que la diferencia entre los errores geocéntricos y topocéntricos expresada como promedio casi dobló la diferencia para los MBA, lo que implica que en el caso de estos cuerpos, la versión del algoritmo utilizada debe ser la topocéntrica debido a la dificultad de hacerles seguimiento si existen incertidumbres muy altas.

**Palabras clave:** asteroides, astrometría, integrales de Kepler, inversión de órbitas.

## Topocentric correction of orbital parameters obtained using the Kepler integrals for MBA and NEO asteroids

## Abstract

This paper dealt with the problem of computing an initial set of orbital parameters for asteroids from observations of their relative positions on the celestial sphere. A method based on the two-body integrals was computationally implemented in a geocentric and a topocentric version. This method was applied to five MBA asteroids and five NEO asteroids. The results and errors obtained for both versions of the algorithm were analyzed. The results showed that for both asteroid families, generally the most precise version of the algorithm was the topocentric version. The topocentric correction appears to be better suited for estimating orbit parameters for NEO asteroids in our sample, as, in average, the difference between the geocentric and topocentric errors almost doubled the differences for the MBA asteroids. This means that for these objects the version of the algorithm used should be the topocentric version due to the difficulty of tracking these objects if the uncertainties are high.

**Key words:** Asteroids, astrometry, Kepler Integrals, orbit inversion.

## Introducción

La determinación de los parámetros orbitales de asteroides y cometas es importante para establecer la probabilidad de impactos futuros contra la Tierra, así como las poblaciones de estos cuerpos y sus distribuciones, de tal forma que se puedan validar o generar teorías sobre la formación y evolución inicial del sistema solar. El problema de la inversión de órbitas consiste en obtener los parámetros orbitales que caracterizan el movimiento de cualquier cuerpo menor alrededor del Sol, o de la Tierra en el caso de los satélites, a partir de observaciones ópticas (astrometría) o de radar del cuerpo estudiado. El paso inicial en el proceso de inversión de órbitas se conoce como determinación inicial de órbitas (*Initial Orbit Determination - IOD*), y consiste en obtener una estimación preliminar de los parámetros

orbitales con unas pocas observaciones, de tal forma que se puedan calcular efemérides del cuerpo y, con esto, obtener observaciones futuras que permitan calcular los parámetros con mayor precisión.

Fueron **Gauss** (1809) y **Laplace** (1780) quienes resolvieron inicialmente este problema. Estos métodos clásicos aún se consideran apropiados para obtener una órbita preliminar a partir de información astrométrica (**Marsden**, 1985), aunque también es frecuente que produzcan resultados de poca calidad (**Knezevic & Milani**, 2005), lo cual se debe a

### \*Correspondencia:

Edwin Andrés Quintero Salazar, [equintero@utp.edu.co](mailto:equintero@utp.edu.co)

**Recibido:** 5 de octubre de 2015

**Aceptado:** 10 de febrero de 2016

dos razones fundamentales: primero, en la época de **Gauss** y de **Laplace** se conocía poco acerca de la estructura del Sistema Solar. Todos los asteroides observables en aquella época son parte de la familia MBA, y la suposición implícita en sus métodos, es decir, que las observaciones se hacen desde el centro de la Tierra (métodos geocéntricos), es válida para estos cuerpos. Sin embargo, existen otras familias de asteroides, como los NEO o los TNO (*trans-Neptunian objects*), para los cuales esta suposición produce errores importantes. Esto se debe a que los primeros son cuerpos tan cercanos a la Tierra que la posición relativa del observador sobre la superficie y la rotación del planeta se vuelven relevantes, y los segundos se mueven muy lentamente sobre la esfera celeste, lo que implica que las observaciones generalmente no son suficientes para obtener la convergencia de los métodos, (Milani, et al., 2008). La segunda razón consiste en que los métodos clásicos poseen una convergencia muy débil si la información utilizada representa una sección muy pequeña de la órbita (Milani & Gronchi, 2010) y, en general, esto es lo que ocurre normalmente: se detecta el movimiento del cuerpo usando una serie de imágenes de la región (usualmente entre tres y seis) en el lapso de una hora de observación y se espera poder utilizar toda la información proveniente de tales imágenes para obtener la órbita, lo cual, en principio, no puede hacerse directamente con los métodos clásicos. Este tren de observaciones se conoce en la literatura científica como un VSA (*very short arc*) si se puede obtener una buena órbita inicial, y como un TSA (*too short arc*) si esto no es posible (Milani, et al. 2007).

Lo anotado ha propiciado que en las últimas décadas este campo de estudio recobre importancia. En años recientes se han publicado muchos trabajos que presentan una mejora sustancial frente a los métodos clásicos, o que proponen una opción diferente para resolver el problema de la inversión de órbitas (Karimi & Mortari, 2011; Mirtorabi, 2014; Celletti & Pinzari, 2006; Herrick, 1971).

Marsden (1985) y Milani, et al. (2008) han estudiado las diferencias entre las aproximaciones geocéntrica y topocéntrica en los métodos de Laplace y Gauss. La aproximación geocéntrica supone que las observaciones se realizan desde el centro de la Tierra, mientras que la aproximación topocéntrica, por el contrario, plantea que estas se hacen desde la superficie de la Tierra y, además, considera el efecto de la rotación del planeta. En sus trabajos los autores analizan las razones por las cuales estos métodos presentan dificultades para los datos actuales y desarrollan versiones modernas que incluyen la corrección topocéntrica, pero no comparan los resultados con observaciones reales en las que se evidencien las diferencias entre ambas aproximaciones y, mucho menos estudian cuantitativamente la forma en que la corrección topocéntrica afecta la predicción de los parámetros orbitales de asteroides de diferentes familias.

Las comparaciones de dos órbitas es una tarea compleja, dado que existen muchas variables involucradas. Schaepferkoetter (2011), por ejemplo, desarrolló un método de comparación que solo involucra dos parámetros independientes, lo que hace más sencillo el análisis de errores. Este tipo de herramienta es muy útil, ya que para garantizar el cálculo preciso y confiable del mayor número de órbitas, se deben utilizar los mejores métodos para cada situación en particular, lo cual solo es posible si se cuenta con un análisis comparativo de los diversos métodos, incluidos los más recientes.

El propósito de este trabajo es mostrar los resultados de la implementación computacional de un método de IOD basado en las integrales de Kepler (Gronchi, et al., 2010), y analizar las diferencias entre las aproximaciones geocéntrica y topocéntrica utilizando una interpolación de Poincaré para cuerpos de estudio pertenecientes a las familias MBA y NEO. En el artículo se introduce primero el fundamento teórico del método y las ecuaciones fundamentales del procedimiento. A continuación se expone la teoría requerida para resolver el problema matemático y luego se detalla la implementación computacional de estos algoritmos. Por último, se discuten los resultados obtenidos para los objetos de estudio seleccionados.

## Materiales y métodos

### Vectores atribuibles

El problema de la inversión de órbitas para asteroides se estudió a partir de datos astrométricos, los cuales, por lo general, se expresan de la siguiente forma:

$$(t_i, \alpha_i, \delta_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $t$  es el tiempo de observación,  $\alpha$  es la ascensión recta,  $\delta$  es la declinación y  $m \geq 2$  es el número total de observaciones. La dificultad para determinar una órbita parte del hecho de que con estos datos solo es posible obtener vectores unitarios que indican la dirección de la posición del cuerpo con respecto a la Tierra:

$$\hat{\rho} = (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta), \quad (1)$$

pero no su distancia, y para obtener una órbita se requiere determinar el vector de estado del cuerpo para un instante determinado (Danby, 1988). Estos vectores están dados por:

$$\vec{r} = \vec{R} + \rho \hat{\rho}, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho (\hat{\rho}_\alpha \dot{\alpha} + \hat{\rho}_\delta \dot{\delta}), \quad (2)$$

donde  $(\vec{R}, \dot{\vec{R}})$  es el vector de estado de la Tierra (que es un dato conocido),  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\delta}$  son las derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas angulares, y:

$$\hat{\rho}_\alpha = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \alpha}, \quad \hat{\rho}_\delta = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \delta}. \quad (3)$$

Nótese que si se pueden determinar los valores de  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\delta}$ , las únicas incógnitas en (2) son la distancia entre la Tierra y el cuerpo (distancia topocéntrica),  $\rho$ , y la velocidad radial,  $\dot{\rho}$ , que no se pueden determinar directamente a partir de la información astrométrica.

Los valores  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\delta}$  se obtienen al calcular el vector atribuible al conjunto de datos, el cual se define como (Milani & Gronchi, 2010):

$$\Lambda = (\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}) \in [-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times R^2, \quad (4)$$

y se obtiene numéricamente a partir de un arco de observaciones  $(t_i, \alpha_i, \delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  mediante una interpolación lineal (si  $m = 2$ ) o cuadrática (si  $m \geq 2$ ) para el tiempo medio  $\bar{t}$ . A cada vector atribuible se le asocia la matriz de covarianza  $\Gamma_\Lambda$ , que ofrece una estimación de los errores en su cálculo.

**Interpolación de Poincaré**

Como se dijo,  $(\vec{R}, \dot{\vec{R}})$  es el vector de estado de la Tierra. Sin embargo, en este punto deben mencionarse dos formas diferentes de calcular dichos vectores. En la aproximación geocéntrica, estos representan el centro de la Tierra, puesto que se considera que las observaciones se realizan desde este punto. La perspectiva topocéntrica, por el contrario, asume que el vector de posición debe calcularse mediante la suma de la posición heliocéntrica del centro de la Tierra y la posición geocéntrica del observador:

$$\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_{obs}, \quad (5)$$

en el que  $\vec{R}_T$  es la posición heliocéntrica de la Tierra y  $\vec{R}_{obs}$  es la posición geocéntrica del observador. Para el vector de velocidad se procede de manera análoga, para lo cual es necesario conocer las constantes de paralaje del lugar de observación (el *Minor Planet Center* - MPC, de la *International Astronomical Union*, facilita el valor de estas constantes para cada observatorio registrado <http://www.minorplanetcenter.net/iau/lists/ObsCodesF.html>). Además, en 1909 Poincaré (1906) sugirió que la posición y la velocidad geocéntricas del observador deben obtenerse mediante la misma interpolación que se utiliza para obtener los vectores atribuibles y no recurriendo a fórmulas exactas. Estas aproximaciones entregan valores ligeramente diferentes del vector de estado de la Tierra y, dado que estos datos se utilizan en las ecuaciones posteriores, los parámetros orbitales también serán diferentes en cada caso. En la sección correspondiente se muestran los resultados obtenidos con ambas aproximaciones.

**Método de las integrales de Kepler**

Como ya se mencionó, si se utilizan los datos astrométricos para obtener el vector atribuible (4), solo aparecen como incógnitas en el vector de estado las variables  $\rho$  y  $\dot{\rho}$ . Por ello, Gronchi, et al. (2010) establecen un sistema de ecuaciones polinómicas basados en la conservación de la energía y el momento angular de la órbita (integrales de Kepler). La idea es calcular el par de vectores atribuibles  $\Lambda_1 = (\alpha_1, \delta_1, \dot{\alpha}_1, \dot{\delta}_1)$  y  $\Lambda_2 = (\alpha_2, \delta_2, \dot{\alpha}_2, \dot{\delta}_2)$  obtenidos en los tiempos medios  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$  para dos conjuntos de observaciones en noches distintas. El hecho de utilizar solo observaciones de dos noches distintas ya es una ventaja con respecto a los métodos clásicos, los

cuales requieren de al menos tres observaciones distintas. Además, la posibilidad de utilizar toda la información disponible de una noche de observación también representa una ventaja adicional, puesto que el uso de estos datos en el proceso de determinación inicial de las órbitas le añade robustez a los métodos. Utilizando las integrales de Kepler se obtiene un sistema de dos ecuaciones polinómicas no lineales:

$$\vec{q} \equiv (\vec{D} \cdot \vec{E}_2) \rho_2^2 + (\vec{D} \cdot \vec{F}_2) \rho_2 - (\vec{D} \cdot \vec{E}_1) \rho_1^2 - (\vec{D} \cdot \vec{F}_1) \rho_1 + \vec{D} \cdot (\vec{G}_2 - \vec{G}_1) = 0 \quad (6)$$

$$y \quad p \equiv [(P_1 - P_2)^2 Q_1 Q_2 - 4k^4 (Q_1 + Q_2)]^2 - 64k^8 Q_1 Q_2 = 0. \quad (7)$$

Estas ecuaciones contienen las incógnitas  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , en las que los coeficientes  $\vec{D}, \vec{F}_i, \vec{G}_i$  en (6) solo dependen de los vectores atribuibles, en tanto que la ecuación (7) es un polinomio de orden 24 cuyos coeficientes también dependen únicamente de los vectores atribuibles. Al resolver numéricamente este sistema se pueden encontrar fácilmente los valores de  $\dot{\rho}_1$  y  $\dot{\rho}_2$ , y con esto obtener estimaciones para el vector de estado en ambas épocas  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$ , (Gronchi, et al., 2010).

Como este es un sistema de ecuaciones polinómicas, una forma efectiva de resolver el problema consiste en usar la teoría de eliminación algebraica (Cox, et al., 2013). Una herramienta elegante de la eliminación algebraica consiste en obtener el ideal de eliminación mediante el cálculo de la base de Gröbner para algún orden de eliminación (por ejemplo, el orden lexicográfico). No obstante, por la característica de las ecuaciones aquí estudiadas, esta opción no es viable por la complejidad computacional del procedimiento. Por tal motivo, la mejor estrategia es calcular el resultante de los dos polinomios (Gronchi, et al., 2010), con respecto a una de las variables, por ejemplo  $\rho_2$ :

$$Res_{p,q}(\rho_2) = \begin{vmatrix} a_{20} & 0 & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{19} & a_{20} & b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

donde los  $a_i = a_i(\rho_2)$  y  $b_i = b_i(\rho_2)$  son los coeficientes de (6) y (7), respectivamente, si se consideran estos polinomios como polinomios en la variable  $\rho_1$ .

El resultante es importante porque es un polinomio en una variable (en este caso,  $\rho_2$ ), que pertenece al ideal de eliminación. Esto quiere decir que sus raíces son soluciones parciales del sistema completo. Una vez obtenidas, se utiliza la ecuación (6) para obtener los valores de  $\rho_1$  y de esta manera se soluciona el problema completo.

Para el cálculo del resultante se utiliza un esquema numérico, puesto que hacerlo simbólicamente consumiría muchos recursos de memoria y tiempo de procesamiento. Para

obtener los coeficientes de este polinomio se lo evalúa en ciertos puntos y posteriormente se hace una interpolación, con lo que se obtiene un estimado de sus coeficientes. Para tal efecto, se emplea la transformada discreta de Fourier (DFT) y su inversa (IDFT), puesto que este método es mucho más eficiente que las evaluaciones e interpolaciones comunes (Bini & Pan, 2012).

**Selección de las soluciones**

Como ya se dijo, al resolver las ecuaciones (6) y (7) se produce un conjunto de pares  $(\rho_1, \rho_2)$ . Cada par de soluciones reales y positivas permite obtener  $(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ . En principio, estos datos bastan para obtener los parámetros orbitales. No obstante, al resolver estas ecuaciones se encuentran soluciones que no poseen significado físico alguno y que aparecen como consecuencia del proceso de manipulación algebraica. Por esta razón, se deben seleccionar como soluciones admisibles solo aquellos pares que satisfagan las ecuaciones de conservación de energía y momento angular. En realidad, como las soluciones se obtienen de manera aproximada, ninguna de ellas satisface de manera exacta las ecuaciones y se aceptan como posibles soluciones solo aquellos pares que satisfagan las ecuaciones con un grado muy elevado de exactitud. Sin embargo, existen muchos casos en los que dos o más de las soluciones pasan por este filtro, por lo tanto, es necesario establecer un criterio adicional para seleccionar la solución correcta. Se asume que siempre habrá solo una solución para los casos estudiados. Sin embargo, esta suposición no siempre es cierta (Gronchi, 2009).

Si se plantea  $(\rho_1, \rho_2, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$  como una solución, con estos datos se pueden determinar los parámetros orbitales para cualquiera de los dos tiempos promedios  $\bar{t}_1$  o  $\bar{t}_2$  de cada vector atribuible. Los parámetros orbitales en un problema de dos cuerpos son las seis constantes de movimiento que caracterizan el movimiento del cuerpo. Dichos parámetros son los siguientes: el semieje mayor  $a$ , la excentricidad  $e$ , que indican el tamaño y la forma de la elipse correspondiente (nótese que se asume *a priori* que la órbita es elíptica, aunque se puede modificar fácilmente la teoría para incluir los otros tipos de órbitas posibles), y el paso de tiempo por el perihelio  $t_0$ , es decir, la época en la que el cuerpo está en su punto más cercano al centro (al Sol, en este caso). Los restantes parámetros fijan la orientación de la órbita en espacio tridimensional. Estos parámetros son la inclinación  $i$ , que es el ángulo existente entre el plano de la órbita y el plano fundamental, la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , que es el ángulo medido sobre el plano fundamental entre el eje x y el nodo ascendente, y, por último, el argumento de latitud del perihelio  $\omega$ , que es el ángulo medido sobre el plano de la órbita entre el nodo ascendente y el perihelio. Para una descripción más detallada de estos parámetros, en la que se muestre claramente su significado geométrico, se puede consultar a Danby (1988).

Como se utilizaron la conservación de la energía y el momento angular para obtener la solución, los parámetros  $a, e, i, \Omega$  fueron los mismos para ambas épocas. Sin embargo, se presentaron divergencias en los parámetros  $\omega$  y  $l$ :

$$\Delta_{1,2} = (\omega_1 - \omega_2, \Delta l),$$

donde

$$\Delta l = l_1 - [l_2 + n(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)], n = ka^{-\frac{3}{2}}$$

$\Delta_{1,2}$  se conocen como las condiciones de compatibilidad (Gronchi, et al., 2010). Al definir  $\vec{A} = (\Lambda_1, \Lambda_2)$  mediante la ley de propagación de covarianzas, se obtiene la matriz de covarianzas marginal para las condiciones de compatibilidad:

$$\Gamma_{\Delta_{1,2}} = \frac{\partial \Delta_{1,2}}{\partial \vec{A}} \Gamma_{\vec{A}} \left[ \frac{\partial \Delta_{1,2}}{\partial \vec{A}} \right]^T. \tag{9}$$

Esta teoría permite estimar una matriz de covarianzas para el espacio de órbitas completo, lo cual proporciona intervalos de confianza para los parámetros orbitales obtenidos, cosa que no es posible con los métodos clásicos de determinación de órbitas.

Al tener  $C = \Gamma^{-1} \Delta_{1,2}$ , se define la norma de identificación como:

$$\|\Delta_{1,2}\|_*^2 = \Delta_{1,2} C \Delta_{1,2}^T. \tag{10}$$

El criterio adicional consiste en seleccionar la solución  $(\rho_1, \rho_2, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$  que arroje el valor más pequeño para la norma de identificación.

**Implementación numérica**

En las secciones anteriores se describió teóricamente el método basado en los planteamientos de Gronchi, et al. (2010) para resolver el problema de la inversión de órbitas. Con base en él se implementó un conjunto de subrutinas en Matlab® para obtener los parámetros orbitales a partir de datos de astrometría entre las cuales se incluyeron rutinas para el acondicionamiento de los datos, la transformación entre sistemas de coordenadas cartesianas y esféricas, la transformación del espacio de fases a los parámetros orbitales, el manejo algebraico de las ecuaciones polinómicas y una rutina principal con la que se implementa el procedimiento descrito en las secciones precedentes, cuyo diagrama de flujo se muestra en la Figura 1.

Si la convergencia se consigue, es decir, si el algoritmo llega hasta el último proceso de ejecución, este procedimiento permite obtener un conjunto de parámetros orbitales con base en la información suministrada como entrada. Sin embargo, se presentaron algunos problemas en las primeras pruebas de este código, asociados, por lo general, al hecho de que los coeficientes numéricos de los polinomios  $q$  (6) y  $p$  (7) son valores extremadamente pequeños. Además, no es adecuado hacer un escalamiento de las cantidades (mediante un cambio de unidades, por ejemplo), puesto que, como lo menciona Gronchi (comunicación personal, junio 5, 2015), el problema es que los coeficientes no son uniformemente pequeños.

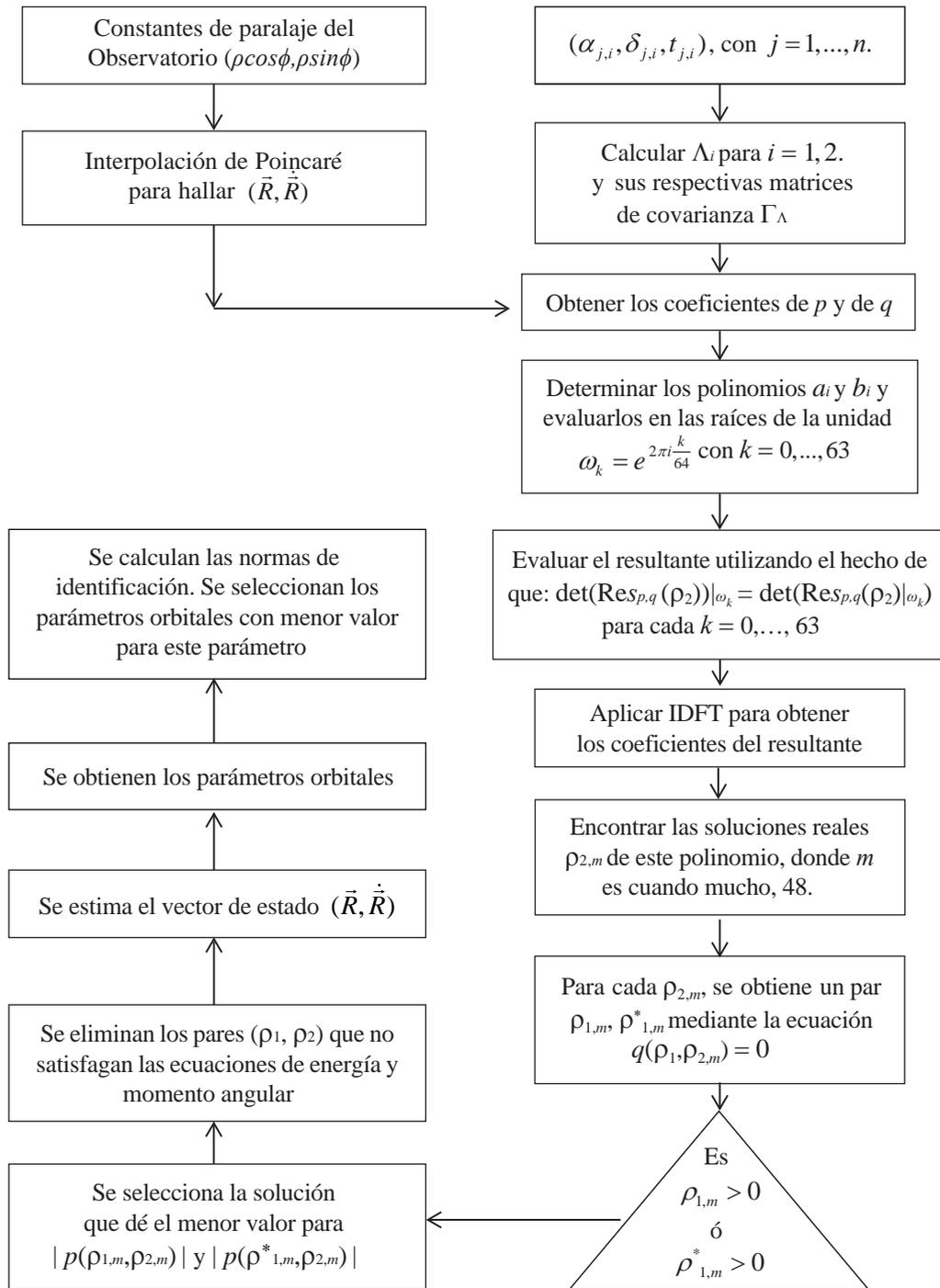


Figura 1. Diagrama de flujo del método principal.

Ante este panorama, se utilizaron las funciones de aritmética de alta precisión de la utilidad de matemática simbólica de Matlab (<http://www.mathworks.com/products/symbolic/features.html#variable-precision-arithmetic>) para obtener resultados confiables. En promedio, los tiempos de ejecución se situaron en alrededor de 6 segundos en un computador de escritorio con procesador Intel Core i5 a 3.2 Ghz. Todas las rutinas empleadas en este trabajo pueden solicitarse a los autores.

## Resultados y discusión

### Parámetros orbitales

El algoritmo se probó con cuerpos pertenecientes a las familias MBA y NEO. En la Tabla 1 se incluyen todos los asteroides utilizados como objetos de estudio y se muestra la procedencia de los datos empleados para calcular el par de atribuibles para cada cuerpo.

**Tabla 1.** Tiempos y lugares de observación de los asteroides utilizados como objeto de estudio. La información astrométrica se obtuvo del motor de búsqueda de observaciones del *Minor Planet Center* MPC (<http://www.minorplanetcenter.net/db\search>), en el cual se encuentran todos los datos tomados por los observatorios registrados en este centro. Con  $t_1$  se indica el tiempo inicial del arco de observaciones medido por el observatorio correspondiente;  $t_2$  representa el tiempo inicial del segundo conjunto de observaciones (ambos tiempos expresados en fecha juliana, FJ). Los primeros cinco asteroides pertenecen a la familia MBA y los cinco finales a la familia NEO. Para mayor claridad, los datos astrométricos utilizados en este trabajo pueden ser descargados de: [observatorioastronomico.utp.edu.co/astrometria/datos-articulo-mba-y-neo.html](http://observatorioastronomico.utp.edu.co/astrometria/datos-articulo-mba-y-neo.html)

Asteroide	$t_1$ (FJ)	Observatorio	$t_2$ (FJ)	Observatorio
(101878) 2002 GL60	2454108,639	G96	2453999,035	568
675 Ludmilla	2456878,317	L33	2456901,726	703
914 Palisana	2451713,475	117	2451767,3883	196
1238 Predappia	2457022,016	G45	2457105,813	G45
1816 Liberia	2457127,788	703	2457187,76	703
99942 Apophis	2453175,67	695	2453357,923	E12
11500 Tomaiyowit	2451109,467	561	2451151,942	428
15745 Yuliya	2451716,432	610	2451747,683	739
(25330) 1999 KV4	2451907,585	704	2452007,846	649
(65679) 1989 UQ	2447872,547	675	2447828,769	010

El algoritmo se ejecutó para los datos presentados en la Tabla 1 y se obtuvo convergencia en todos los casos. En la Tabla 2 se presentan los parámetros orbitales nominales (entregados por el MPC), y se muestra el resultado de aplicar el algoritmo en la versión geocéntrica (Geoc.) y en la versión topocéntrica (Topo.). Además, en la Figura 2 se muestran las trayectorias obtenidas para los cuerpos MBA y en la Figura 3 las trayectorias para los objetos NEO, ambas gráficas en el sistema eclíptico heliocéntrico.

Es importante señalar que las razones por las que los resultados obtenidos en ambas versiones no coinciden con los parámetros del MPC consisten, primero, en que las órbitas presentadas aquí se calcularon con pocos datos, mientras que los parámetros del MPC son órbitas de mínimos cuadrados obtenidas con todos los datos disponibles, y, segundo, el modelo dinámico aquí empleado es el de los dos cuerpos, lo cual representa una simplificación importante de la situación real.

Ahora bien, como se mencionó previamente, el objetivo de la determinación inicial de órbitas es estimar las efemérides del cuerpo con la precisión suficiente para lograr observarlo en el futuro. Esto quiere decir que el error entre la posición real y la estimada debe ser, cuando mucho, del orden de minutos de arco, dependiendo del montaje experimental de cada lugar de observación (en general, el campo de visión para un observatorio astronómico que realice astrometría de asteroides debe ser de decenas de minutos de arco para garantizar la presencia de una buena cantidad de estrellas de referencia. Ver: <http://www.minorplanetcenter.net/iau/info/Astrometry.html>).

En la tabla 3 se muestran las posiciones para tres de los asteroides de prueba comparadas con las posiciones registradas por el MPC.

Los resultados obtenidos muestran que existen errores de pocos minutos de arco para las posiciones estimadas, lo cual, en principio, permite observar nuevamente estos cuerpos en estas épocas.

**Comparación de los resultados topocéntricos y geocéntricos**

Existen distintos métodos para analizar los errores en el proceso de determinación orbital. **Mortari, et al.** (2006) utilizan el hecho de que los parámetros orbitales se pueden clasificar en dos grupos que contienen información diferente sobre la órbita  $a, e$ , los cuales son parámetros que indican la forma de la órbita, mientras que  $(i, \Omega, \omega)$  dan información relativa sobre la orientación de la órbita en el sistema heliocéntrico eclíptico. Esto permite reducir el número de parámetros de error de 6 a 2, que son los parámetros de error en la forma de la órbita  $d$  y en la orientación de la órbita  $\Phi$  (**Schaepferkoetter**, 2011).

Si los parámetros nominales son  $(a, e, i, \Omega, \omega, \theta)$  y los aproximados son  $(a^*, e^*, i^*, \Omega^*, \omega^*, \theta^*)$ , los errores se estiman mediante:

$$d = \sqrt{(a - a^*)^2 + (b - b^*)^2}, \tag{11}$$

donde  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  es el semieje menor. El error en la orientación de la órbita  $\Phi$  se define como:

$$\cos \Phi = \frac{1}{2} \left( \text{tr} [CC^{*T}] - 1 \right), \tag{12}$$

en la cual:

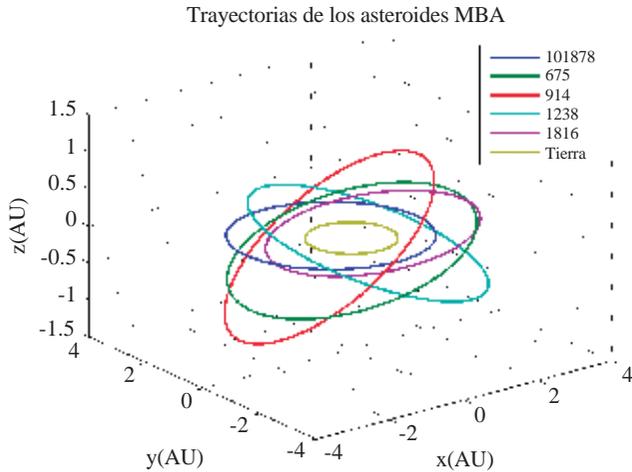
$$C = R(\omega + \theta)P(+i)R(+\Omega) = \begin{bmatrix} \hat{r} & \hat{h} \times \hat{r} & \hat{h} \end{bmatrix}^T, \tag{13}$$

**Tabla 2.** Resultados obtenidos al ejecutar el método. Se comparan los valores nominales de los parámetros orbitales (MPC) con respecto a los obtenidos en el caso geocéntrico (Geoc.) y topocéntrico (Topo.).

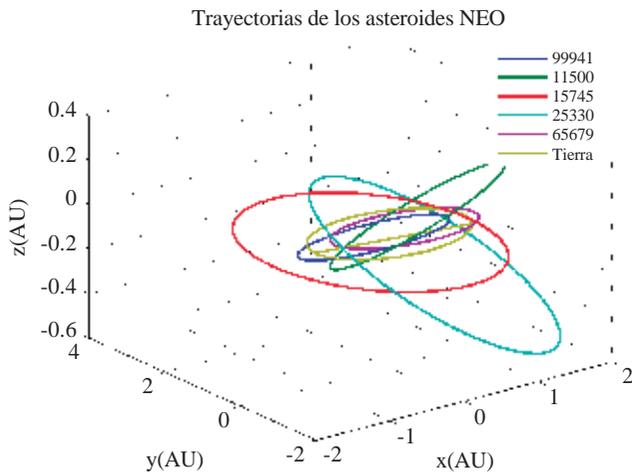
Asteroide	Datos a(UA)	Parámetros orbitales					
		<i>e</i>	<i>i</i> (°)	$\Omega$ (°)	$\omega$ (°)	<i>t</i> <sub>2</sub> (FJ)	
101878	MPC	2,2381	0,1834	0,6022	156,269	145,115	2457504.32096
	Geoc.	2,2907	0,2137	0,6141	156,879	145,790	2457637.57945
	Topo.	2,2613	0,2007	0,6138	157,107	144,246	2457564.57179
675	MPC	2,7704	0,2008	9,7838	263,269	152,11	2457136.39573
	Geoc.	2,7933	0,2104	9,7729	263,218	151,595	2457131.91029
	Topo.	2,7751	0,2089	9,7811	263,288	151,506	2457132.93739
914	MPC	2,4577	0,2147	25,206	255,807	49,1642	2457322.21024
	Geoc.	2,4528	0,2106	25,215	255,816	48,5247	2457432.94940
	Topo.	2,4548	0,2111	25,223	255,837	48,4659	2457306.55467
1238	MPC	2,6658	0,1416	12,155	51,954	91,8659	2457002.47106
	Geoc.	2,6966	0,1616	12,076	51,186	139,734	2457167.80099
	Topo.	2,6498	0,1448	12,053	52,727	96,9764	2457022.58713
1816	MPC	2,3387	0,2179	26,139	153,36	340,785	2456938.28940
	Geoc.	2,2667	26,111	26,110	153,23	334,294	2456921.53315
	Topo.	2,3178	0,2103	26,197	153,68	339,608	2456935.04252
99942	MPC	0,9221	0,1912	3,3306	204,20	126,457	2457159.23350
	Geoc.	0,8919	0,1987	2,9489	209,75	115,033	2457265.63962
	Topo.	0,9219	0,1914	3,3399	204,53	126,274	2457155.94368
11500	MPC	1,0799	0,3558	10,309	234,46	289,420	2457363.36967
	Geoc.	0,9985	0,1717	4,6842	236,11	290,971	2457412.86261
	Topo.	1,0690	0,3327	9,6986	234,83	289,215	2457270.68610
15745	MPC	1,7198	0,2551	14,428	132,64	140,549	2457478.65349
	Geoc.	1,7461	0,2625	14,758	132,70	141,081	2457612.43210
	Topo.	1,7074	0,2519	14,243	132,85	139,857	2457416.61518
25330	MPC	1,5405	0,3708	14,328	50,619	85,978	2456858.07907
	Geoc.	1,6128	0,3936	14,531	50,163	89,452	2457208.65182
	Topo.	1,5679	0,3795	14,407	50,540	87,209	2456989.63222
65679	MPC	0,9150	0,2647	1,2995	178,238	14,892	2457230.22159
	Geoc.	0,8934	0,3619	1,8380	181,517	14,410	2457206.96211
	Topo.	0,9135	0,2760	1,3475	178,921	14,795	2457207.83307

donde P, R son las matrices de rotación directa sobre los ejes x y z, respectivamente, y los vectores en la matriz del lado derecho se entienden como vectores columna. Nótese que el ángulo  $\Phi$  es el ángulo principal de la matriz correctiva entre las matrices C y C\*, que físicamente puede interpretarse como el ángulo existente entre las direcciones del momento angular estimado y el verdadero, lo que indica que si este ángulo es pequeño se debe a que la órbita estimada se acerca mucho a la verdadera en cuanto a su posición y orientación en el espacio tridimensional.

Considerando los parámetros entregados por el MPC como valores exactos (por las razones expuestas anteriormente), la idea es utilizar el método descrito para calcular el error en la versión geocéntrica y en la topocéntrica para cada asteroide. Al aplicar estas ecuaciones a los resultados obtenidos, se estimaron los errores que se muestran en la Figura 4. Nótese en la gráfica de error en la forma (imagen superior) que, a excepción de los cuerpos 11500 y 25330, los errores son inferiores a  $65 \times 10^{-3}$  AU, que son valores esperados al usar el problema de los dos cuerpos como modelo dinámico (Gronchi, et al., 2010).



**Figura 2.** Trayectorias para los cuerpos de estudio pertenecientes a la familia MBA en el sistema heliocéntrico eclíptico.



**Figura 3.** Trayectorias obtenidas para los cuerpos NEO en el sistema heliocéntrico eclíptico.

Otra observación importante al analizar esta gráfica es que, en general, tanto para el error de forma (imagen superior) como para el error de orientación (imagen inferior), el uso de la versión topocéntrica del algoritmo produjo errores inferiores a los de la geocéntrica, lo que se nota para los ejemplos de ambas familias de asteroides.

Sin embargo, también es importante notar que las diferencias entre ambas aproximaciones son mayores para los asteroides de la familia NEO. Por ejemplo, si se calcula el promedio de las diferencias entre los errores geocéntricos y topocéntricos, se obtiene un valor de 0.02711AU para los cuerpos MBA y de 0.04950AU para los NEO, el cual casi doble el de los primeros.

Lo anterior sugiere dos aspectos importantes: la primera es que como muchos autores han discutido en el pasado (Milani & Knezevic, 2005), para los cuerpos de la familia MBA la versión geocéntrica produce resultados aceptables que permiten hacer el seguimiento futuro al objeto y, por lo tanto, un refinamiento de la órbita. Esto también es cierto para los métodos clásicos de Laplace y Gauss. La segunda es que para los objetos pertenecientes a la familia NEO, los errores generados al usar la versión geocéntrica pueden ser muy superiores a los producidos por la versión topocéntrica, y esto puede llegar a ser determinante en la imposibilidad de hacer seguimiento al cuerpo o de efectuar un refinamiento de los parámetros orbitales mediante la corrección diferencial estándar (Danby, 1988). Ello se debe a que muchos objetos pertenecientes a esta familia son muy tenues y se mueven muy rápido (es decir, poseen un movimiento diario muy alto), lo cual demanda mayor precisión instrumental.

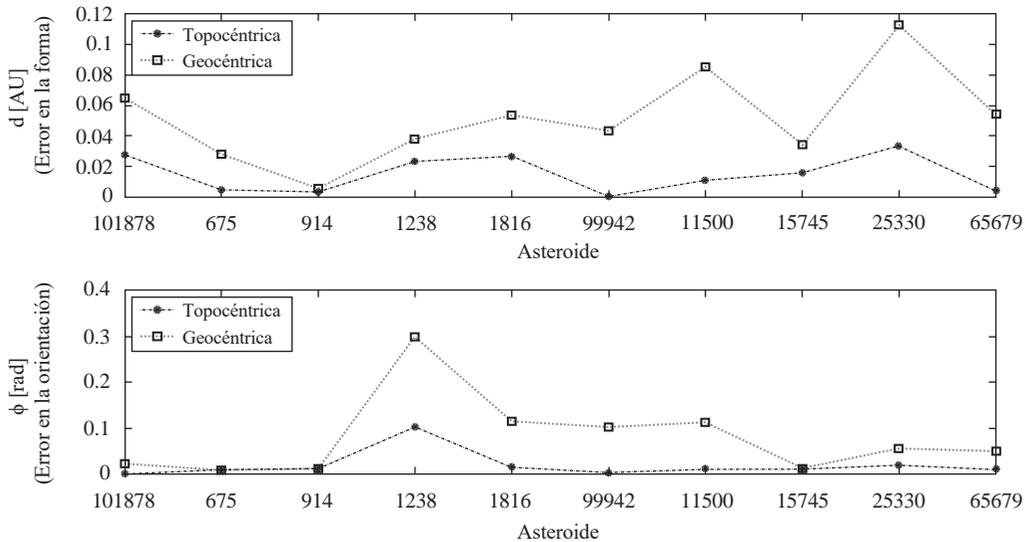
**Conclusiones y trabajo futuro**

Se implementó un algoritmo computacional (Gronchi, et al., 2010), con el fin de resolver el problema de la inversión de órbitas, el cual se basó en las integrales de Kepler para el problema de dos cuerpos. Se mostró la aplicación del algoritmo para cuerpos pertenecientes a las familias MBA y NEO en dos versiones: la geocéntrica y la topocéntrica. Se encontró que, en general, el algoritmo fue útil como método de determinación inicial de órbitas, puesto que los errores de las posiciones estimadas fueron de pocos minutos de arco comparadas con las posiciones reales, de tal forma que es factible observar estos cuerpos en estas épocas, lo cual es el objetivo de la determinación inicial.

Igualmente, se compararon los errores producidos con ambas versiones del algoritmo y se encontró que la variante topocéntrica producía errores inferiores. Para los cuerpos de la familia MBA, la diferencia no fue muy significativa para el propósito de hacer mediciones futuras. No obstante,

**Tabla 3.** Comparación entre la posición estimada y la verdadera para tres de los asteroides de prueba.

Asteroide	Tiempo (FJ)	Efeméride	$\alpha$ (h m s)	$\delta$ (° ' ")
675	2457400.91119	Estimada	09 37 41	+02 4 57.2
		MPC	09 35 46.93	+02 12 36.6
99942	2453175.67015	Estimada	09 44 39	+13 18 51.36
		MPC	09 44 30.10	+13 18 54.0
65679	2447871.60303	Estimada	23 32 33.47	-10 40 5.858
		MPC	23 32 42.45	-09 19 39.1



**Figura 4.** Errores obtenidos para cada cuerpo establecido como muestra. En la parte superior se muestra el error en la forma de la órbita, y en la inferior, el error en la orientación de la órbita.

esta diferencia es importante para los objetos NEO, puesto que estos cuerpos exigen mayor precisión en el proceso de medición.

Es importante adelantar pruebas de este algoritmo con una muestra mayor de cuerpos, para lo cual la estrategia más adecuada podría ser una simulación de observaciones (mediante el método de Monte Carlo, por ejemplo), en la que se pueda estudiar detalladamente el comportamiento del método cuando se utiliza un conjunto grande de datos. También es importante ahondar en el comportamiento del método cuando se varía el tiempo transcurrido entre ambos arcos de observaciones.

Por último, es importante señalar que la filosofía que sustenta el método implementado en este trabajo es completamente distinta a la de los métodos clásicos. En primer lugar, los métodos de Laplace y Gauss requieren al menos de tres observaciones distintas en noches diferentes. Antiguamente era muy difícil obtener más de una observación por noche, por lo que estos métodos se ajustaban perfectamente a las condiciones instrumentales. No obstante, con las cámaras CCD (con las cuales se cuenta en el Observatorio Astronómico de la Universidad Tecnológica de Pereira. Fuente: <http://observatorioastronomico.utp.edu.co/instrumentacion.html>), hoy se pueden obtener rutinariamente varios datos de un cuerpo por cada hora de observación. Esto impone replantearse el uso de los métodos clásicos o proponer métodos alternativos que permitan el uso de la mayor cantidad de datos obtenidos por noche de observación. Esa es la idea del método implementado en este trabajo, cuyo propósito es agrupar las observaciones de solo dos noches de observaciones para estimar la órbita inicial. Si bien en este trabajo no se intentó hacerlo, la utilización

de más datos para la determinación inicial de las órbitas puede mejorar la convergencia del proceso y, así, lograr la reducción de “asteroides perdidos” debido a la inexactitud de la determinación inicial.

**Conflicto de intereses**

Los autores declaran que no tienen conflicto de intereses.

**Bibliografía**

**Bini, D., & Pan, V.** (2012). Polynomial and Matrix Computations: Fundamental Algorithms. Birkhäuser Boston.

**Celletti, A., & Pinzari, G.** (2006). Dependence on the observational time intervals and domain of convergence of orbital determination methods. En *Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: Theory and Applications*. p. 327-344. Springer.

**Cox, D., Little, J., O’Shea, D.** (2013). *Using Algebraic Geometry*. New York: Springer.

**Danby, J.** (1988). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell.

**Gauss, C. F.** (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. sumtibus Frid. Perthes et IH Besser.

**Gronchi, G. F., Dimare, L., & Milani, A.** (2010). Orbit determination with the two-body integrals. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **107** (3): 299-318.

**Herrick, S.** (1971). *Astrodynamic: Orbit determination, space navigation, celestial mechanics*. Van Nostrand Reinhold Co.

**Karimi, R. R., & Mortari, D.** (2011). Initial orbit determination using multiple observations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **109** (2): 167-180.

**Knezevic, Z., & Milani, A.** (2005). From astrometry to celestial mechanics: orbit determination with very short arcs. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **92** (1-3), 1-18.

- Laplace, P.** (1780). Laplace's collected works. En *Mém. Acad. R. Sci. Paris* (págs. 93-146). Paris.
- Marsden, B. G.** (1985). Initial orbit determination-The pragmatist's point of view. *The Astronomical Journal*. **90**: 1541-1547.
- Milani, A., & Gronchi, G.** (2010). *Theory of Orbit Determination*. Cambridge University Press.
- Milani, A., & Knezevic, Z.** (2005). From astrometry to celestial mechanics: orbit determination with very short arcs. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **92**: 1-18.
- Milani, A., Gronchi, G., & Knezevic, Z.** (2007). New definition of discovery for solar system objects. *Earth, Moon, and Planets*. **100** (1-2): 83-116.
- Milani, A., Gronchi, G., Farnocchia, D., Knezevic, Z., Jedicke, R., Denneau, L., Pierfederici, F.** (2008). Topocentric orbit determination: algorithms for the next generation surveys. *Icarus*. **195** (1): 474-492.
- Mirtorabi, T.** (2014). A simple procedure to extend the Gauss method of determining orbital parameters from three to N points. *Astrophysics and Space Science*. **349** (1): 137-141.
- Mortari, D., Scuro, S. R., & Bruccoleri, C.** (2006). Attitude and orbit error in n-dimensional spaces. *The Journal of the Astronautical Sciences*, **54** (3-4): 467-484.
- Poincaré, H.** (1906). *Mémoires et observations. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace*. *Bulletin Astronomique*, **23**: 161-187.
- Schaepkoetter, A. V.** (2011). A comprehensive comparison between angles-only initial orbit determination techniques. Texas A&M University: Phd thesis.