

# LOS ELEMENTOS ORBITALES POSTNEWTONIANOS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE DAMOUR & DERUELLE PARA EL PROBLEMA RELATIVISTA DE LOS DOS CUERPOS

por

José Gregorio Portilla<sup>1</sup> & Juan Manuel Tejeiro<sup>2</sup>

## Resumen

**J. G. Portilla, J. M. Tejeiro.** Los elementos orbitales postnewtonianos de la solución analítica de Damour & Deruelle para el problema relativista de los dos cuerpos. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **25**(97): 537-551, 2001. ISSN 0370-3908.

Se presenta una descripción detallada de la solución analítica propuesta por Damour & Deruelle (D&D) para resolver la ecuación diferencial que describe el problema de los dos cuerpos postnewtoniano. Se muestra la relación entre las constantes de movimiento y los denominados elementos orbitales postnewtonianos, los cuales se reducen a los elementos clásicos al tomar  $c \rightarrow \infty$ . Con el fin de verificar el grado de exactitud de la solución, se estudia el sistema conformado por Mercurio alrededor del Sol. Los resultados se han comparado con los obtenidos a través de una integración numérica directa de las ecuaciones de movimiento. Se encuentra que la solución analítica de D&D describe con un alto grado de exactitud el movimiento del Mercurio comparado con los resultados de la integración numérica directa de las ecuaciones diferenciales.

**Palabras clave.** Mecánica celeste, Problema de los dos cuerpos postnewtoniano, Relatividad General.

## Abstract

We present a detailed description of the analytical solution due to Damour & Deruelle in order to resolve the differential equation of the post-Newtonian two body problem. It's shown the relationship between the constants of motion and the so called post-Newtonian orbital elements, which are reduced to the classical orbital elements when  $c \rightarrow \infty$ . The Sun-Mercury system is used to study the accuracy of the solution. The results are compared with those obtained through a direct numerical integration of the equations of motion. It's found that the D&D solution describes, with a high degree of accuracy, the motion of Mercury compared with that obtained with the direct numerical integration.

**Key words.** Celestial Mechanics, Post-Newtonian Two body Problem, General Relativity.

<sup>1</sup> Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. E-mail: gportill@ciencias.unal.edu.co Apartado Aéreo 2584.  
<sup>2</sup> Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. E-mail: jtejeiro@ciencias.unal.edu.co Apartado Aéreo 2584.

## Introducción

En el estado actual del arte, la Teoría de la Relatividad General (TRG) ya no se ve como una teoría que deba ser probada a toda costa conforme se va avanzando en las técnicas observacionales, sino que es el fundamento necesario para la construcción de las actuales y complejas teorías dinámicas que estudian el movimiento de los cuerpos principales del sistema solar. De hecho, la TRG ha venido a convertirse, entre los modernos especialistas, en el fundamento de la mecánica celeste propiamente dicha. Sin embargo, todavía está muy difundida la idea de contemplar de forma superficial a la TRG como una teoría necesaria sólo para adicionar pequeñas correcciones a la mecánica clásica newtoniana (Brumberg, 1991).

Bajo la TRG el movimiento de las partículas embebidas en campos gravitacionales se presenta como el *movimiento libre inercial a lo largo de líneas geodésicas del espacio pseudo-Riemanniano* con una métrica determinada por las masas gravitantes. El concepto es fácilmente entendible, pero trasladado a los detalles matemáticos es complicado de llevar a cabo. De hecho, es necesario apelar a toda clase de aproximaciones y suposiciones no exentas de críticas y defectos para poder llegar finalmente a las ecuaciones de movimiento. Para un análisis crítico de la mecánica celeste relativista véase Damour (1987).

Poco después de haberse introducido la TRG, se elaboró un método de aproximación llamado "postnewtoniano", el cual permitía comparar la TRG con la teoría newtoniana. La aproximación postnewtoniana es una aproximación de "movimiento lento" y "campo débil" de la TRG. Bajo este esquema se introducen algunos parámetros adimensionales que justifican realizar la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein. Pero hay una característica adicional a este desarrollo. Y es que a pesar de que la TRG ha salido airosa de cuanta prueba experimental haya sido posible concebir, eso no ha impedido que varios teóricos inconformes elaboren teorías métricas de la gravedad distintas a la de la TRG. Por fortuna, dichas teorías, junto con la TRG, pueden, bajo una linealización, escribirse de forma casi idéntica salvo en los valores numéricos que adoptan los parámetros propios de cada teoría gravitacional. Dos de los parámetros más usados son  $\gamma$  y  $\beta$  los cuales representan respectivamente el valor de la curvatura espacial y la cantidad de no linealidad contenida en la TRG. El que se pueda escribir las ecuaciones de movimiento incluyendo cuanto parámetro exótico exista (actualmente se llegan a contar hasta diez de los mismos) permite condensar fácilmente y de una sola vez todas las teorías métricas, con lo que es inmediato realizar predicciones teóricas y compararlas con lo que se mide en la naturaleza. Esta teoría general que comprende todos los casos posibles es llamada el formalismo "postnewtoniano parametrizado", PPN, por sus siglas en inglés. Dicha teoría contiene un conjunto de parámetros a los que se les puede asignar

valores específicos de manera arbitraria. Un conjunto de valores para estos parámetros hace que, por ejemplo, el formalismo PPN sea idéntico al límite postnewtoniano de la TRG, cosa que se logra haciendo  $\gamma = \beta = 1$ . En este artículo se considera a la TRG como la única teoría de la gravitación apropiada para explicar la naturaleza, por lo que evitaremos la escritura en parámetros PPN.

Con la presente comunicación se pretende no sólo exponer con detenimiento una solución del problema de los dos cuerpos post-newtoniano, lamentablemente poco conocida en la literatura, sino también dar a conocer el grado de aplicabilidad de dicha solución en comparación con la integración numérica directa de las ecuaciones de movimiento. La solución aquí expuesta constituye una generalización de las clásicas expresiones newtonianas que se encuentran en todos los libros de mecánica celeste.

## La ecuación de movimiento

En la aproximación postnewtoniana el problema del movimiento se ataca primero considerando un espacio-tiempo asintóticamente plano que pueda ser cubierto con un simple sistema global de coordenadas. El sistema de coordenadas, llamado ahora "coordenadas PPN", otorga una división natural  $3 + 1$  del espacio-tiempo en *espacio + tiempo*. Esta división convenientemente usa la notación del análisis vectorial del espacio plano tridimensional. Por supuesto, ello significa que la teoría postnewtoniana intenta ajustar la TRG en un armazón puramente newtoniano y arrastra consigo los conceptos del espacio y tiempo absolutos.

La ecuación diferencial que describe el movimiento de una masa puntual  $m_2$  con respecto a otra masa puntual  $m_1$  bajo la aproximación post-newtoniana, en términos de la distancia relativa  $\mathbf{r}$ , es (Soffel, 1989):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm}{r^3}\mathbf{r} + \frac{Gm}{c^2 r^3} \left\{ \left[ \frac{Gm}{r}(4 + 2\sigma) - (1 + 3\sigma)(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{3\sigma}{2r^2}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 \right] \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})(4 - 2\sigma)\dot{\mathbf{r}} \right\} \quad (1)$$

donde  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}$  representa la aceleración de uno de los cuerpos con relación al otro,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $m = m_1 + m_2$  y  $\sigma = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$ . Es claro que al tomar  $c \rightarrow \infty$  esta ecuación se convierte en la clásica ecuación del problema de dos cuerpos:  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm\mathbf{r}}{r^3}$ .

Una manera de resolver el problema del movimiento relativo en la aproximación postnewtoniana (IPN) es considerar la ecuación (1) de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p,$$

siendo  $\mathbf{a}_p$  el término de "perturbación" que está siendo multiplicado por  $Gm/c^2$ , y estudiar el efecto de dicha perturbación en la solución exacta clásica del problema



de dos cuerpos, tal y como se aborda en el conocido método de variación de parámetros en el que se estudia la variación temporal de las constantes de movimiento, esto es, de los elementos orbitales, ver por ejemplo **Brouwer & Clemence** (1961). Así procede **Rubincam** (1975), quien, a partir de la métrica de Schwarzschild y de la ecuación de la geodésica, utilizó las ecuaciones planetarias de Lagrange para obtener la variación temporal de los elementos orbitales clásicos de un satélite artificial alrededor de la Tierra.

**Brumberg** (1991) descompone la aceleración perturbadora  $\mathbf{a}_p$  en sus componentes radial, transversal y normal y utiliza las formas gaussianas de las ecuaciones de Lagrange para obtener la variación temporal de los elementos orbitales (una solución por elementos osculadores). El método es útil siempre y cuando uno esté interesado en observar los cambios seculares y cuasi-periódicos en los elementos orbitales clásicos. Este autor encuentra que la inclinación y la longitud del nodo ascendente son constantes en el tiempo; el semieje mayor y la excentricidad oscilan alrededor de un valor medio con período igual al período orbital y el argumento de latitud del pericentro cambia en el tiempo con contribución secular y periódica. **Lestrade** (1981), utilizando las ecuaciones planetarias de Lagrange, obtiene expresiones analíticas — por expansión en series de potencias en términos de las excentricidades — que permiten tener en cuenta la variación de los elementos orbitales clásicos hasta el primer orden. Una solución muy elegante, también por aproximaciones, es la elaborada por **Richardson & Kelly** (1988), la cual, utilizando variables de Delaunay y transformaciones canónicas, obtiene la variación temporal de los elementos clásicos.

La otra forma de resolver la ecuación diferencial (1) es por medio de una solución “analítica” cerrada. A primera vista, la ecuación diferencial parece demasiado complicada como para suponer que no la tiene. Esto, rigurosamente hablando, es cierto. Pero, si el término postnewtoniano es del orden de  $1/c^2$  es posible hallar una solución válida — dentro de un orden de aproximación razonable — siempre y cuando expresiones de  $1/c^n$  con  $n \geq 4$  sean consideradas despreciables. Esta forma de solución puede considerarse más que suficiente pues la obtención de la ecuación de movimiento se hizo a través de un proceso de aproximación que consideró los términos despreciables a partir de  $1/c^n$  con  $n \geq 4$ , ver **Richardson & Kelly** (1988).

Se han publicado varios métodos de solución analítica — válidos a un orden de  $1/c^2$  — de la ecuación diferencial (1). Las soluciones propuestas son las de **Brumberg** (1991), pág. 82, **Wagoner & Will** (1976), **Haugan** (1985) y **Damour & Deruelle** (1985). Ver **Soffel** (1989), para una exposición de las soluciones (excepto la de Haugan) con una notación unificada. Puede verse también el artículo de **Soffel et al.** (1987), que contiene una exposición detallada de varias formas de solución analítica, así como un resumen de la solución de Brumberg por elementos osculadores. Sin embargo, la solución

propuesta por Damour & Deruelle, que llamaremos de ahora en adelante como la solución D&D, ha merecido una aplicación extensiva en lo que se refiere al estudio de la señales del pulsar binario PSR 1913 +16 (**Taylor & Weisberg** (1989)) como también a estudios de perturbación de su solución analítica (**Calura et al.** (1997)). La presente comunicación pretende ahondar en la solución D&D, haciendo explícitos ciertos desarrollos — que no son evidentes en los pocos artículos que hay sobre el tema — y guiados por la solución clásica haremos claro el concepto de “elementos orbitales postnewtonianos”.

### La solución analítica de D&D

La ecuación diferencial (1) puede obtenerse directamente de la lagrangiana  $\mathcal{L}$  (**Richardson & Kelly** (1988)):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm}{r} + \frac{1}{8c^2} (\dot{\mathbf{r}})^2 (1 - 3\sigma) + \frac{Gm}{2rc^2} (3 + \sigma) (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm\sigma}{2r^3c^2} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{Gm}{r} \right)^2, \quad (2)$$

A partir de ésta, podemos obtener el hamiltoniano  $E$  mediante:

$$E = \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L},$$

que es una constante de movimiento.

Procediendo, obtenemos:

$$E = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \frac{Gm}{r} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} (1 - 3\sigma) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{Gm\sigma}{2r} \left[ (3 + \sigma) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{Gm}{r} \right] \right\}, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

La invariancia de la lagrangiana  $\mathcal{L}$  ante rotaciones implica:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constante}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{p}$  está definido por

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}.$$

Entonces, de (2) se deduce que

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \left[ 1 + \frac{(1 - 3\sigma)}{2c^2} (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm(3 + \sigma)}{rc^2} \right] + \frac{Gm\sigma}{c^2 r^3} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r}, \quad (5)$$

que al multiplicar vectorialmente por  $\mathbf{r} \times$  se tiene

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \left[ 1 + \frac{(1 - 3\sigma)}{2c^2} (\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm(3 + \sigma)}{rc^2} \right] = \mathbf{H}. \quad (6)$$

En términos de las componentes de la posición  $(x, y, z)$  y de la velocidad  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  se encuentra que las componentes rectangulares de  $\mathbf{H}$  son:

$$\begin{aligned} H_x &= (y\dot{z} - z\dot{y}) \left[ 1 + \frac{1-3\sigma}{2c^2}(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm(3+\sigma)}{rc^2} \right], \\ H_y &= (z\dot{x} - x\dot{z}) \left[ 1 + \frac{1-3\sigma}{2c^2}(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm(3+\sigma)}{rc^2} \right], \\ H_z &= (x\dot{y} - y\dot{x}) \left[ 1 + \frac{1-3\sigma}{2c^2}(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{Gm(3+\sigma)}{rc^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Puesto que el vector  $\mathbf{H}$  es constante y es ortogonal a  $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  se deduce que *el movimiento está contenido en un plano*.

Introducimos coordenadas polares para describir el movimiento en el plano, esto es, utilizamos como vectores posición y velocidad a

$$\mathbf{r} = r\hat{u}_r, \quad \dot{\mathbf{r}} = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{r}\hat{u}_r,$$

donde  $\hat{u}_r$  y  $\hat{u}_\theta$  son vectores unitarios mutuamente ortogonales el primero de los cuales está dirigido en la dirección radial. Con ello las ecuaciones (3) y (6) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{Gm}{r} + \frac{3}{8c^2}(1-3\sigma)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^2 + \\ &+ \frac{Gm}{2rc^2} \left[ (3+2\sigma)\dot{r}^2 + (3+\sigma)r^2\dot{\theta}^2 + \frac{Gm}{r} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$H = r^2\dot{\theta} \left[ 1 + \frac{(1-3\sigma)}{2c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{Gm(3+\sigma)}{rc^2} \right]. \quad (9)$$

Procedemos a resolver la ecuación (9). Dicha ecuación se puede escribir de la forma

$$r^2\dot{\theta} = \frac{H}{1+K_c} = H(1+K_c)^{-1},$$

donde  $K_c$  representa la suma de términos del orden de  $1/c^2$  en (9). Expandiendo en series de potencias y considerando despreciables los términos del orden  $1/c^4$  en adelante se obtiene

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} &= H(1-K_c) = H \left[ 1 - \frac{(1-3\sigma)}{2c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \right. \\ &\left. - \frac{Gm(3+\sigma)}{rc^2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Pero, puesto que al aislar el término  $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$  en la ecuación (8) se puede escribir

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2E + \frac{2Gm}{r} - O(1/c^2), \quad (11)$$

al reemplazar esta última en (10) y conservando sólo los términos del orden de  $1/c^2$  se obtiene

$$r^2\dot{\theta} = H \left[ 1 + \frac{(3\sigma-1)E}{c^2} + \frac{2Gm}{rc^2}(\sigma-2) \right]. \quad (12)$$

Llamando:

$$I = H \left[ 1 + \frac{(3\sigma-1)E}{c^2} \right], \quad (13)$$

$$J = \frac{2Gm(\sigma-2)H}{c^2}, \quad (14)$$

entonces la ecuación (12) queda

$$\dot{\theta} = \frac{I}{r^2} + \frac{J}{r^3}. \quad (15)$$

Por otro lado, si despejamos de (8) el valor de  $\dot{r}^2$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= -r^2\dot{\theta}^2 + \frac{2Gm}{r} + 2E - \frac{3}{4c^2}(1-3\sigma)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)^2 \\ &- \frac{Gm}{rc^2} \left[ (3+2\sigma)\dot{r}^2 + (3+\sigma)r^2\dot{\theta}^2 + \frac{Gm}{r} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Al reemplazar en esta última ecuación los valores de  $\dot{r}^2$  dado por (11), de  $\dot{\theta}$  encontrado en (12) y de  $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$  en (11) se obtiene, después de un poco de álgebra:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= 2E \left[ 1 + \frac{3(3\sigma-1)E}{2c^2} \right] + \frac{2Gm}{r} \left[ 1 + \frac{(7\sigma-6)E}{c^2} \right] \\ &+ \frac{1}{r^2} \left\{ -H^2 \left[ 1 + \frac{2(3\sigma-1)E}{c^2} - \frac{5(\sigma-2)G^2m^2}{H^2c^2} \right] \right\} \\ &+ \frac{H^2Gm(8-3\sigma)}{r^3c^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Llamando:

$$A = 2E \left[ 1 + \frac{3(3\sigma-1)E}{2c^2} \right], \quad (18)$$

$$B = Gm \left[ 1 + \frac{(7\sigma-6)E}{c^2} \right], \quad (19)$$

$$C = -H^2 \left[ 1 + \frac{2(3\sigma-1)E}{c^2} - \frac{5(\sigma-2)G^2m^2}{H^2c^2} \right], \quad (20)$$

$$D = \frac{H^2Gm(8-3\sigma)}{c^2}, \quad (21)$$

la ecuación (17) puede escribirse como:

$$\dot{r}^2 = A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3}. \quad (22)$$

La solución de D&D consiste primeramente en introducir una variable  $\bar{r}$  definida así:

$$r = \bar{r} + \frac{D}{2C_0}, \quad (23)$$

donde  $D$  es el valor definido en (21) y  $C_0$  es el valor límite que toma  $C$  dado en (20) cuando  $1/c^2 \rightarrow 0$ , esto es,  $-H^2$ . Es claro que  $\dot{r} = \dot{\bar{r}}$ .

Al reemplazar el valor de  $r$  dado en (23) en (22) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}^2 &= A + \frac{2B}{\bar{r}} \left( 1 + \frac{D}{2C_0\bar{r}} \right)^{-1} + \frac{C}{\bar{r}^2} \left( 1 + \frac{D}{2C_0\bar{r}} \right)^{-2} \\ &+ \frac{D}{\bar{r}^3} \left( 1 + \frac{D}{2C_0\bar{r}} \right)^{-3}, \end{aligned} \quad (24)$$

la cual, al tomar en expansión en serie de Taylor los términos con exponentes en el lado derecho, *siempre conservando los términos de  $1/c^2$  y haciendo cero los de orden superior o igual a  $1/c^4$*  obtenemos

$$\dot{\bar{r}}^2 = A + \frac{2B}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \left( C - \frac{BD}{C_0} \right) - \frac{DC}{C_0\bar{r}^3} + \frac{D}{\bar{r}^3}. \quad (25)$$



Ahora bien, puesto que la relación

$$\frac{C}{C_0} = \frac{H^2}{H^2} [1 + O(1/c^2)] = 1 + O(1/c^2),$$

el producto  $\frac{DC}{C_0}$  es igual a  $D$ , pues éste es del orden de  $1/c^2$ .

Llamando:

$$\bar{C} = C - \frac{BD}{C_0}, \tag{26}$$

la ecuación (25) queda

$$\dot{\bar{r}}^2 = A + \frac{2B}{\bar{r}} + \frac{\bar{C}}{\bar{r}^2}. \tag{27}$$

Nótese que la transformación ha permitido eliminar el término que contiene  $\bar{r}^{-3}$ .

En lo que sigue se hará énfasis sólo en el movimiento elíptico, por ser el de mayor importancia astronómica. Si nos guiamos por el proceso de solución de las ecuaciones diferenciales en el movimiento elíptico clásico, que se pueden verificar en cualquier libro de mecánica celeste, podemos definir nuevas constantes adaptando resultados bien conocidos a nuestras necesidades.

Podemos llamar (**Brouwer & Clemence** (1961)):

$$\bar{e} = \sqrt{1 + \frac{\bar{C}A}{B^2}}, \tag{28}$$

$$\bar{\mu} = B, \tag{29}$$

$$\bar{a} = -\frac{B}{A}, \tag{30}$$

entonces la ecuación (27) queda

$$\dot{\bar{r}}^2 = -\frac{\bar{\mu}}{\bar{a}} + \frac{2\bar{\mu}}{\bar{r}} - \frac{\bar{\mu}\bar{a}(1 - \bar{e}^2)}{\bar{r}^2}, \tag{31}$$

Al definir  $\bar{n}$  como:

$$\bar{n} = \sqrt{-\frac{A^3}{B^2}} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{a}^3}}, \tag{32}$$

y realizando un proceso de integración directo (**Portilla** (2001)), bien conocido en la literatura, se obtiene:

$$\bar{r} = \bar{a}(1 - \bar{e} \cos u), \tag{33}$$

donde  $u$  es una variable de integración que juega el mismo papel de la anomalía excéntrica en el caso clásico y que aquí continuaremos llamando así.

Es igualmente fácil de verificar que la relación entre  $u$  y el tiempo  $t$  es:

$$u - \bar{e} \sin u = \bar{n}(t - t_0), \tag{34}$$

donde  $t_0$  es una constante de integración que corresponde al tiempo cuando  $u = 0$ . La constante  $\bar{e}$  es llamada excentricidad temporal. Definiendo la anomalía media como:

$$M = \bar{n}(t - t_0), \tag{35}$$

la ecuación (34), versión postnewtoniana de la ecuación de Kepler, queda:

$$u - \bar{e} \sin u = M. \tag{36}$$

Recuperemos la variable original  $r$ , esto es, el radio vector, mediante (23):

$$r = \bar{a} + \frac{D}{2C_0} - \bar{a}\bar{e} \cos u.$$

Haciendo

$$a_R = \bar{a} + \frac{D}{2C_0}, \tag{37}$$

$$e_R = \frac{\bar{a}\bar{e}}{\bar{a} + \frac{D}{2C_0}}, \tag{38}$$

obtenemos como ecuación del radio vector en términos de la anomalía excéntrica a:

$$r = a_R(1 - e_R \cos u), \tag{39}$$

donde  $a_R$  y  $e_R$  son llamados respectivamente semieje mayor radial y excentricidad radial.

Ahora procedemos a resolver la ecuación (15). De nuevo, haciendo el cambio de variable siguiente:

$$r = \tilde{r} + \frac{J}{2I}, \tag{40}$$

donde  $I$  y  $J$  están dados por (13) y (14).

Al reemplazar el valor de  $r$  definido en (40) en la ecuación (15) se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{\tilde{r}^2} \left(1 + \frac{J}{2I\tilde{r}}\right)^{-2} + \frac{J}{\tilde{r}^3} \left(1 + \frac{J}{2I\tilde{r}}\right)^{-3}.$$

Tomando la expansión en serie de Taylor de los términos con exponentes en el lado derecho, y teniendo en cuenta que  $J$  es del orden de  $1/c^2$  se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{\tilde{r}^2}. \tag{41}$$

Supongamos que existe una solución del tipo

$$\tilde{r} = \tilde{a}(1 - \tilde{e} \cos u), \tag{42}$$

donde  $\tilde{a}$  y  $\tilde{e}$  son constantes que no han de confundirse con  $\bar{a}$ ,  $\bar{e}$  ni con  $a_R$  y  $e_R$ .

Por lo tanto, la ecuación (41) queda

$$\tilde{a}^2(1 - \tilde{e} \cos u)^2 d\theta = I dt. \tag{43}$$

Pero ahora estamos tratando de relacionar  $u$  con  $\theta$ . Ello se logra expresando la diferencial de tiempo en términos de la diferencial de  $u$  que se puede obtener a partir de (34). En efecto, de ésta última se deduce

$$(1 - \tilde{e} \cos u) du = \tilde{n} dt.$$

Al reemplazar esta última ecuación en (43) tenemos

$$d\theta = \frac{I}{n\tilde{a}^2} \frac{(1 - \bar{e} \cos u)}{(1 - \tilde{e} \cos u)^2} du. \quad (44)$$

Antes de seguir con el proceso de integración es útil expresar ahora ciertas constantes tales como  $a_R$ ,  $\bar{a}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $e_R$ ,  $\bar{e}$  y  $\tilde{e}$  en términos de constantes más primarias.

El valor de  $\bar{a}$  ya fue expresado en términos de constantes iniciales y está dado por (30).

De la ecuación (37) y de (30) obtenemos

$$a_R = -\frac{B}{A} + \frac{D}{2C_0}. \quad (45)$$

Puesto que otra forma de determinar el radio vector es mediante la combinación de (40) y (42), esto es

$$r = \tilde{a} - \tilde{a}\tilde{e} \cos u + \frac{J}{2I}. \quad (46)$$

Comparando con (39) se obtiene

$$\tilde{a} = a_R - \frac{J}{2I}, \quad (47)$$

$$\tilde{e} = \frac{a_R}{\tilde{a}} e_R. \quad (48)$$

Por lo tanto,  $\tilde{a}$  está dada por

$$\tilde{a} = -\frac{B}{A} + \frac{D}{2C_0} - \frac{J}{2I}. \quad (49)$$

El valor de  $\bar{e}$  se obtuvo de la ecuación (28). El valor de  $e_R$  se determina a partir de (38):

$$e_R = \frac{\bar{e}}{1 + \frac{D}{2C_0\bar{a}}},$$

pero, puesto que  $\bar{a}$  está dada por (30), tenemos

$$e_R = \frac{\bar{e}}{1 - \frac{DA}{2C_0B}} = \bar{e} \left( 1 + \frac{DA}{2C_0B} \right), \quad (50)$$

donde, en el último paso, se aprovechó la circunstancia de que  $D$  es del orden de  $c^{-2}$ .

El valor de  $\tilde{e}$  se halla a partir de (48) que con (47) se obtiene

$$\tilde{e} = \left[ \frac{1}{1 - \frac{J}{2Ia_R}} \right],$$

y al reemplazar el valor de  $a_R$  dado en (45) y después de algo de álgebra obtenemos

$$\tilde{e} = \left( 1 - \frac{JA}{2BI} \right) e_R, \quad (51)$$

o de (50):

$$\tilde{e} = \left( 1 - \frac{JA}{2BI} + \frac{DA}{2C_0B} \right) \bar{e}. \quad (52)$$

Nótese que por ser  $D$  y  $J$  términos del orden de  $c^{-2}$ ,  $\tilde{e}$  y  $\bar{e}$  sólo difieren en ese orden de magnitud.

Dicho esto, procedemos a integrar la ecuación (44).

Sea una constante  $e_\theta$  definida de la siguiente forma:

$$\bar{e} = \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right) + \epsilon, \quad (53)$$

donde  $\epsilon$  es del orden de  $c^{-2}$ .

De esta última se deduce que

$$e_\theta = \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right) - \epsilon,$$

que al despejar  $\epsilon$  da

$$\epsilon = \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right) - e_\theta,$$

elevando al cuadrado es fácil verificar que

$$\epsilon^2 = \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right)^2 - \bar{e}e_\theta. \quad (54)$$

Hagamos ahora el siguiente producto:

$$(1 - \bar{e} \cos u)(1 - e_\theta \cos u) = 1 - \bar{e} \cos u - e_\theta \cos u + \bar{e}e_\theta \cos^2 u,$$

al reemplazar en esta última el valor de  $\bar{e}e_\theta$  dado en (54) se tiene:

$$(1 - \bar{e} \cos u)(1 - e_\theta \cos u) = 1 - \frac{2(\bar{e} + e_\theta) \cos u}{2} + \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right)^2 \cos^2 u - \epsilon^2 \cos^2 u,$$

donde  $\epsilon^2$  es enteramente despreciable.

Por lo tanto:

$$(1 - \bar{e} \cos u)(1 - e_\theta \cos u) = \left[ 1 - \left( \frac{\bar{e} + e_\theta}{2} \right) \cos u \right]^2. \quad (55)$$

Ahora, la definición de  $e_\theta$  se hizo en (53) sin especificar el valor de  $\epsilon$ . Puesto que  $\bar{e}$  y  $\tilde{e}$  sólo difieren en un valor del orden de  $c^{-2}$  (ver ecuación (52)), podemos definir  $e_\theta$  así:

$$e_\theta = 2\tilde{e} - \bar{e}, \quad (56)$$

de la que se desprende que

$$\tilde{e} = \frac{\bar{e} + e_\theta}{2}. \quad (57)$$

Con ello, la ecuación (55) se puede escribir como:

$$\frac{(1 - \bar{e} \cos u)}{(1 - \tilde{e} \cos u)^2} = \frac{1}{1 - e_\theta \cos u}.$$

Reemplazando esta última expresión en (44) se tiene:

$$d\theta = \frac{I}{n\tilde{a}^2} \frac{du}{(1 - e_\theta \cos u)}.$$

Al integrar da:



$$\theta - \theta_0 = \frac{2I}{\tilde{n}\tilde{a}^2\sqrt{1-e_\theta^2}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right], \quad (58)$$

en donde  $\theta_0$  es el valor que toma  $\theta$  cuando  $u = 0$ . Aquí, no es evidente que con la integración aparezca un ángulo que es una nueva constante de movimiento, la cual no corresponde a  $\theta_0$ , pues como veremos más adelante, éste es función de constantes ya conocidas. El ángulo al que nos referimos es el argumento de latitud del pericentro,  $\omega$ , y corresponde al ángulo medido sobre el plano orbital existente entre el nodo ascendente y el pericentro de la órbita. La razón de que no sea evidente su existencia se debe al hecho de que la integración se hace entre dos ángulos que se definen con independencia de la orientación de la órbita en el espacio.

Llamando:

$$K_\theta = \frac{I}{\tilde{n}\tilde{a}^2\sqrt{1-e_\theta^2}}, \quad (59)$$

$$A_\theta = 2 \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right], \quad (60)$$

entonces podemos escribir (58) como

$$\theta = \theta_0 + K_\theta A_\theta. \quad (61)$$

Nótese que el pericentro se verifica con cada nueva revolución de la anomalía excéntrica ( $u = 2\pi$ ), pero, en el mismo punto la anomalía verdadera es igual a  $2\pi + \theta_0$ . Ello significa que la línea de las ápsides (desde donde se comienza a medir  $\theta$  con cada nueva revolución) se va desplazando un valor  $\theta_0$  en la misma dirección en que se cuenta  $\theta$ .

Para obtener el valor de la constante  $\theta_0$  es preciso expresar los valores de  $I$ ,  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{n}$  y  $e_\theta$  en términos de constantes primarias tales como  $G$ ,  $m$  y  $E$ .

### Obtención de las constantes

El propósito de esta sección es mostrar la relación de algunas de las constantes con las que hemos venido trabajando y cuyas expresiones serán de gran ayuda para mostrar la relación entre la solución de D&D y el caso clásico, así como para identificar constantes tales como  $\theta_0$ .

#### 1. El cálculo de $a_R$

Los valores de  $A$ ,  $B$  y  $D$  están dados respectivamente por (18), (19) y (21). Igualmente recordamos que  $C_0 = -H^2$ . Reemplazando estos valores en (45) tenemos:

$$a_R = -\frac{Gm}{2E} \left[ 1 + \frac{(7\sigma - 6)E}{c^2} \right] \left[ 1 + \frac{3(3\sigma - 1)E}{2c^2} \right]^{-1} - \frac{(8 - 3\sigma)Gm}{2c^2}.$$

Al realizar las multiplicaciones correspondientes y ordenar se reduce a

$$a_R = -\frac{Gm}{2E} \left[ 1 - \frac{(\sigma - 7)E}{2c^2} \right]. \quad (62)$$

#### 2. El cálculo de $\tilde{a}$

La ecuación (47) permitió definir  $\tilde{a}$ . Reemplazando en ésta los valores de (13) y (14) se obtiene

$$\tilde{a} = a_R \left( 1 - \frac{Gm(\sigma - 2)}{a_R c^2} \right). \quad (63)$$

#### 3. El cálculo de $\tilde{n}$

Al reemplazar (18) junto con (19) en (32) tenemos

$$\tilde{n} = \frac{(-2E)^{3/2}}{Gm} \left[ 1 + \frac{3E}{2c^2}(3\sigma - 1) \right]^{3/2} \left[ 1 + \frac{(7\sigma - 6)E}{c^2} \right]^{-1},$$

que al realizar los productos indicados se convierte en

$$\tilde{n} = \frac{(-2E)^{3/2}}{Gm} \left[ 1 - \frac{(\sigma - 15)E}{4c^2} \right]. \quad (64)$$

De la ecuación (62) podemos despejar  $E$  para obtener

$$E = -\frac{Gm}{2a_R} \left[ 1 + \frac{Gm(\sigma - 7)}{4a_R c^2} \right], \quad (65)$$

de la que es fácil llegar a

$$(-2E)^{3/2} = \left( \frac{Gm}{a_R} \right)^{3/2} \left[ 1 + \frac{3Gm(\sigma - 7)}{8a_R c^2} \right].$$

Reemplazando esta dos últimas ecuaciones en (64):

$$\tilde{n} = \frac{(Gm)^{1/2}}{a_R^{3/2}} \left[ 1 + \frac{3Gm(\sigma - 7)}{8a_R c^2} \right] \left[ 1 + \frac{(\sigma - 15)Gm}{8a_R c^2} \right],$$

que se reduce a

$$\tilde{n} = \frac{(Gm)^{1/2}}{a_R^{3/2}} \left[ 1 + \frac{Gm(\sigma - 9)}{2a_R c^2} \right]. \quad (66)$$

#### 4. El cálculo de $\tilde{e}$

De la ecuación (28) y de (26) tenemos

$$\tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{A}{B^2} \left( C - \frac{BD}{C_0} \right)}. \quad (67)$$

Después de un poco de álgebra es posible llegar a

$$\frac{A}{B^2} = \frac{2E}{G^2m^2} \left[ 1 + \left( \frac{19}{2}\sigma + \frac{21}{2} \right) \frac{E}{c^2} \right],$$

$$C - \frac{BD}{C_0} = -H^2 - \frac{2(3\sigma - 1)EH^2}{c^2} + \frac{5(\sigma - 2)G^2m^2}{c^2} + \frac{(8 - 3\sigma)G^2m^2}{c^2}. \quad (68)$$

Al reemplazar estas dos últimas ecuaciones en (67) se obtiene:

$$\bar{e} = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2m^2} \left[ H^2 \left( 1 + \frac{E}{2c^2} (17 - 7\sigma) \right) + \frac{2G^2m^2}{c^2} (1 - \sigma) \right] \right\}^{1/2}. \quad (69)$$

## 5. El cálculo de $e_R$

El valor de  $e_R$  está dado por (50). Es inmediato verificar que

$$\frac{DA}{2C_0B} = -\frac{(8 - 3\sigma)E}{c^2}.$$

Al reemplazar esta última ecuación al igual que (69) en (50) y realizando los cálculos correspondientes se tiene

$$e_R = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2m^2} \left[ H^2 \left( 1 + \frac{5E}{2c^2} (\sigma - 3) \right) + \frac{G^2m^2}{c^2} (\sigma - 6) \right] \right\}^{1/2}. \quad (70)$$

Podemos calcular el valor de  $e_R$  en términos de  $\bar{e}$ . Esto se logra a partir de (50). Reemplazando los valores de  $A$ ,  $B$  y  $D$  dados por (18), (19) y (21) respectivamente, que junto con  $C_0 = -H^2$  y con ayuda de (65) es fácil llegar a

$$e_R = \left[ 1 + \frac{Gm}{a_R c^2} \left( 4 - \frac{3}{2}\sigma \right) \right] \bar{e}. \quad (71)$$

## 6. El cálculo de $e_\theta$

El valor de  $e_\theta$  está dado por (56). Al reemplazar el valor de  $\bar{e}$  dado por (52) en (56):

$$e_\theta = \left( 1 + \frac{DA}{C_0B} - \frac{JA}{BI} \right) \bar{e}. \quad (72)$$

El valor de  $\frac{DA}{C_0B}$  se halló unas cuantas líneas arriba. De igual forma se tiene:

$$\frac{JA}{BI} = \frac{4E(\sigma - 4)}{c^2}.$$

Entonces, al reemplazar estos valores junto con (69) en (72) tenemos

$$e_\theta = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2m^2} \left[ H^2 \left( 1 + \frac{E}{2c^2} (\sigma - 15) \right) - \frac{6G^2m^2}{c^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (73)$$

Es igualmente importante encontrar una expresión que relacione  $e_\theta$  con  $e_R$ .

De la ecuación (56) junto con (52) recordando que en esta última  $J$  y  $D$  son del orden de  $c^{-2}$ :

$$e_\theta = 2\bar{e} - \left( 1 + \frac{JA}{2BI} - \frac{DA}{2C_0B} \right) \bar{e},$$

y de (51):

$$e_\theta = \left[ 1 - A \left( \frac{J}{BI} - \frac{D}{2C_0B} \right) \right] e_R. \quad (74)$$

Puesto que

$$\frac{J}{BI} = \frac{2(\sigma - 2)}{c^2}, \quad \frac{D}{2C_0B} = -\frac{(8 - 3\sigma)}{2c^2},$$

se tendrá entonces

$$A \left( \frac{J}{BI} - \frac{D}{2C_0B} \right) = \frac{E\sigma}{c^2},$$

y de (65) finalmente llegamos a

$$e_\theta = \left( 1 + \frac{Gm\sigma}{2a_R c^2} \right) e_R. \quad (75)$$

## 7. El cálculo de $H$

De la ecuación (70) se desprende

$$1 - e_R^2 = -\frac{2E}{G^2m^2} \left[ H^2 \left( 1 + \frac{5E}{2c^2} (\sigma - 3) \right) + \frac{G^2m^2}{c^2} (\sigma - 6) \right],$$

que al reemplazar  $E$  con ayuda de (65) y despejar  $H$  se convierte en:

$$H = [Gm a_R (1 - e_R^2)]^{1/2} \left[ 1 + \frac{Gm}{2a_R c^2 (1 - e_R^2)} (4 + 2e_R^2 - \sigma e_R^2) \right]. \quad (76)$$

## 8. El cálculo de $K_\theta$

Ya estamos en posición de calcular  $K_\theta$  de acuerdo con la ecuación (59).

De las ecuaciones (13), (63) y (64) se determina



$$\frac{I}{\bar{n}a^2} = \frac{H}{\sqrt{Gma_R}} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ (3\sigma - 1)E + \frac{Gm}{2a_R} (3\sigma + 1) \right] \right\}. \tag{77}$$

Igualmente, de la ecuación (73) es fácil llegar a

$$1 - e_\theta^2 = -\frac{2E}{G^2m^2} \left[ H^2 \left( 1 + \frac{E}{2c^2} (\sigma - 15) \right) - \frac{6G^2m^2}{c^2} \right],$$

la cual, al reemplazar  $E$  dado por (65) y tomando la raíz cuadrada e invirtiendo da:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - e_\theta)}} = \frac{\sqrt{Gma_R}}{H} \left[ 1 + \frac{2Gm}{c^2} \left( \frac{1}{a_R} - \frac{3Gm}{H^2} \right) \right]^{-1/2}. \tag{78}$$

De esta última ecuación se puede despejar  $H^2$  para obtener:

$$H^2 = Gm \left\{ a_R(1 - e_\theta^2) - \frac{2Gm}{c^2} [a_R(1 - e_\theta^2) - 3] \right\}. \tag{79}$$

Al calcular  $K_\theta$  a partir de la primera de las (59) con (77) y (78) tenemos:

$$K_\theta = 1 + \frac{3G^2m^2}{c^2H^2},$$

y reemplazando en esta última la ecuación (79) se tiene

$$K_\theta = 1 + \frac{3Gm}{a_R(1 - e_\theta^2)c^2}. \tag{80}$$

Llamando:

$$\kappa = \frac{3Gm}{a_R(1 - e_\theta^2)c^2}, \tag{81}$$

podemos escribir

$$K_\theta = 1 + \kappa. \tag{82}$$

### 9. El cálculo de $\theta_0$

Primero que todo debe advertirse que, a diferencia del movimiento elíptico clásico, en la solución de D&D, al ser la anomalía excéntrica  $u$  igual a cero el valor de la anomalía verdadera  $\theta$  no es nulo: es igual a  $\theta_0$ , lo cual es aparente si se observan las ecuaciones (59) y (61). Al ser  $u = 2\pi$  y en general cualquier múltiplo par entero de  $\pi$ , el valor de  $K_\theta$  se anula. Pero, al comparar esta ecuación postnewtoniana con la ecuación clásica, se deduce que el valor de  $\theta_0$  debe ser un valor pequeño, del orden de  $c^{-2}$ . Por lo tanto, una manera de hallar  $\theta_0$  es estudiando el comportamiento de (61) para valores muy cercanos a  $2n\pi$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Supóngase que se tiene un valor de  $u$  lo suficientemente cercano a  $2n\pi$  como para que  $(1 + e_\theta)^{1/2}(1 -$

$e_\theta)^{-1/2} \tan(u/2)$  sea muy cercano a cero pero no igual a cero. Con ello podemos deducir que

$$(A_\theta)_{u \approx 2n\pi} \approx 2 \left( \frac{u}{2} \right) \approx u,$$

donde se ha supuesto además que el valor de  $e_\theta$  es lo suficientemente pequeño como para considerarse despreciable, dentro del orden de la aproximación. Con el fin de obtener  $\theta_0$  como un valor positivo vamos a hacer la siguiente consideración. Al completarse casi un período se tendrá que  $u$  será muy próximo a  $2\pi$ , de tal forma que el ángulo se ubicará en el cuarto cuadrante, esto es,  $u \approx -2\pi$ . Esto se verifica cuando  $\theta \approx -2\pi$  por lo que, de (61),

$$-2\pi = \theta_0 - 2K_\theta\pi,$$

esto es

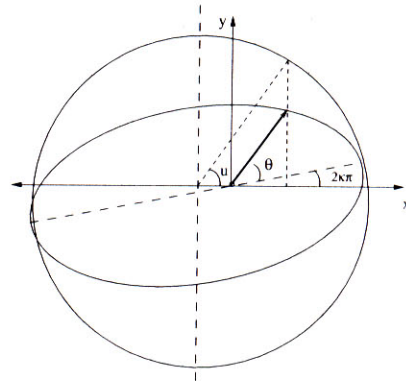
$$\theta_0 = 2\pi(K_\theta - 1). \tag{83}$$

Por lo tanto, de (82),

$$\theta_0 = 2\pi\kappa. \tag{84}$$

Entonces, el valor de la anomalía verdadera, para cada instante de tiempo  $t$ , es:

$$\theta = 2\kappa\pi + 2(1 + \kappa) \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1 + e_\theta}{1 - e_\theta}} \tan \left( \frac{u}{2} \right) \right]. \tag{85}$$



**Figura 1:** Relación geométrica entre la anomalía verdadera y la excéntrica.

De la definición de  $\kappa$  (ecuación (81)) es evidente que  $\theta_0$  es:

$$\theta_0 = \frac{6Gm\pi}{a_R(1 - e_\theta^2)c^2},$$

esto es, el conocido desplazamiento de la línea de las ápsides por cada revolución.

### El cálculo de $r$ en función de $\theta$

Es deseable hallar una expresión que dé el radio vector  $r$  en función de la anomalía verdadera  $\theta$ .

La ecuación (61) puede escribirse como

$$A_\theta = \frac{\theta - \theta_0}{K_\theta}. \quad (86)$$

Pero, de la misma definición de  $A_\theta$  (ecuación (60)), se desprende que

$$\tan\left(\frac{A_\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}} \tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

Al utilizar las identidades trigonométricas:

$$\tan\left(\frac{A_\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos A_\theta}{1+\cos A_\theta}}, \quad \tan\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}},$$

es fácil obtener

$$\frac{1-\cos A_\theta}{1+\cos A_\theta} = \left(\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}\right) \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right).$$

Esta última expresión puede deducirse de la siguiente igualdad:

$$1 - e_\theta \cos u = \frac{1 - e_\theta^2}{1 + e_\theta \cos A_\theta}. \quad (87)$$

Ahora bien, de la ecuación (39) podemos escribir

$$\begin{aligned} r &= a_R + \frac{a_R e_R}{e_\theta} - \frac{a_R e_R}{e_\theta} - \frac{a_R e_R e_\theta}{e_\theta} \cos u, \\ &= \frac{e_R}{e_\theta} a_R (1 - e_\theta \cos u) + a_R \left(1 - \frac{e_R}{e_\theta}\right). \end{aligned} \quad (88)$$

Al reemplazar la ecuación (75) junto con (87) en esta última se obtiene

$$r = a_R \left(1 - \frac{Gm\sigma}{2a_R c^2}\right) \left(\frac{1 - e_\theta^2}{1 + e_\theta \cos A_\theta}\right) + \frac{Gm\sigma}{2c^2}. \quad (89)$$

Para nuestros propósitos es adecuado escribir esta ecuación en términos de  $e_R$  y con una simbología más apropiada.

De la definición de  $A_\theta$  dada en (86) y de (83) se desprende

$$A_\theta = \frac{\theta - 2\pi(1 - K_\theta)}{K_\theta},$$

y de (82) se deduce inmediatamente

$$A_\theta = \theta(1 - \kappa) - 2\kappa\pi. \quad (90)$$

Expresando  $e_\theta$  en función de  $e_R$  (ver ecuación (75))

$$r = a_R \left\{ (1 - \Gamma) \left[ \frac{1 - (1 + 2\Gamma)e_R^2}{Q} \right] + \Gamma \right\},$$

donde  $\Gamma$  y  $\Delta$  son:

$$\Gamma = \frac{Gm\sigma}{2a_R c^2}, \quad (91)$$

$$Q = 1 + e_R(1 + \Gamma) \cos[\theta(1 - \kappa) - 2\kappa\pi]. \quad (92)$$

Haciendo las operaciones necesarias y ordenando, tenemos finalmente:

$$r = \frac{a_R(1 - e_R^2)}{Q} \left[ 1 - \frac{\Gamma(1 + e_R^2 - Q)}{1 - e_R^2} \right] \quad (93)$$

El pericentro ocurre en  $u = 0$ , esto es, cuando  $\theta = 2\kappa\pi$  y el radio vector adquiere un valor igual a  $r_p = a_R(1 - e_R)$ . El apocentro se presenta cuando  $u = \pi$ , esto es, cuando  $\theta = \pi + 3\kappa\pi$  y el radio vector toma el valor de  $r_a = a_R(1 + e_R)$ .

### Los elementos orbitales postnewtonianos

Las constantes  $E$ ,  $\mathbf{H}$  (esto es  $H_x, H_y, H_z$ ),  $t_0$  y  $\theta_0$  (que está ligada a la existencia del argumento de latitud del pericentro) representan los seis parámetros que, junto con las masas, permiten el cálculo de la posición y velocidad para todo tiempo.

Definimos un sistema de coordenadas cartesiano con origen en el centro de la masa  $m_1$ , y escogemos al plano conformado por los ejes  $xy$  como plano fundamental. Esto bien puede representar, por ejemplo, a las coordenadas rectangulares heliocéntricas de un astro en torno del Sol teniendo como plano fundamental a la eclíptica. Supóngase que se conoce para un tiempo  $t_r$  las componentes rectangulares tanto de la posición como de la velocidad del cuerpo de masa  $m_2$  en relación con el cuerpo de masa  $m_1$ . Obviamente  $m_1$  y  $m_2$  son conocidas, lo que significa que  $m$  y  $\sigma$  también lo son. Por lo tanto, en dicho instante, se conocen el radio vector y la magnitud de la velocidad. Las ecuaciones (8) y (9) permiten, respectivamente, determinar la constante  $E$  y la magnitud de la constante  $H$ . Ahora bien, puesto que el movimiento está contenido en un plano, es necesario especificar dos ángulos más: la longitud del nodo ascendente, denotada por  $\Omega$  (el ángulo medido sobre el plano fundamental existente entre el eje  $x$  y el punto en que el objeto atraviesa el plano fundamental de sur a norte) y la inclinación del plano orbital  $i$  con respecto al plano fundamental.

La relación entre las constantes  $H_x, H_y$  y  $H_z$  con  $\Omega$  e  $i$  es como sigue.

Al definir un vector unitario perpendicular al plano orbital se obtiene, de la figura 2,

$$\hat{u}_H = \frac{\mathbf{H}}{H} = \sin\Omega \sin i \hat{i} - \cos\Omega \sin i \hat{j} + \cos i \hat{k}, \quad (94)$$

y puesto que

$$\mathbf{H} = H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}, \quad (95)$$

se obtiene inmediatamente

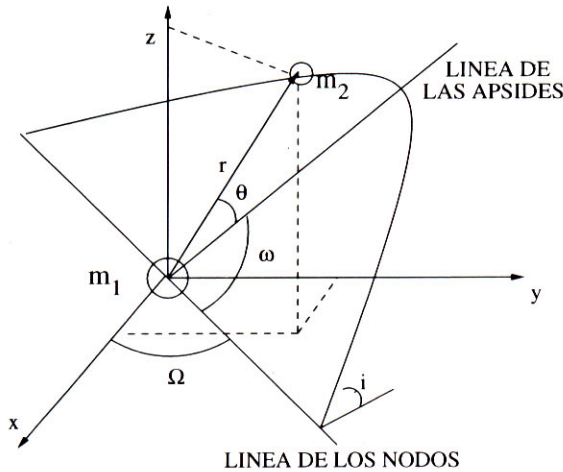
$$\begin{aligned} \frac{H_x}{H} &= \sin\Omega \sin i, \\ \frac{H_y}{H} &= -\cos\Omega \sin i, \\ \frac{H_z}{H} &= \cos i, \end{aligned} \quad (96)$$



de las cuales se deduce:

$$\Omega = -\tan^{-1}\left(\frac{H_x}{H_y}\right), \tag{97}$$

$$i = \cos^{-1}\left(\frac{H_z}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}}\right). \tag{98}$$



**Figura 2:** Definición de los elementos  $\Omega$ ,  $i$  y  $\omega$ .

Las componentes  $H_x$ ,  $H_y$  y  $H_z$  se pueden calcular utilizando las ecuaciones (7); luego, los valores de  $\Omega$  e  $i$  son calculados inmediatamente.

Habiendo determinado  $E$  y  $H$ , las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $I$  y  $J$  pueden calcularse inmediatamente. El semieje mayor  $a_R$  se puede determinar bien con ayuda de (45) o con (62). Tomaremos como elemento orbital a  $e_R$ , el cual se calcula por intermedio de (70). Hecho esto, se halla la anomalía excéntrica  $u$  con ayuda de (39). También se puede determinar el valor de la anomalía verdadera  $\theta$  por intermedio de (85). El valor de  $\bar{n}$  se halla con (32). La excentricidad auxiliar  $\bar{e}$  puede determinarse con (28). Con lo anterior ya es posible obtener el valor del tiempo del paso por el pericentro  $t_0$  por intermedio de (34), o tal y como se hace en el caso clásico, se puede definir la anomalía media de referencia  $M_r$  como elemento orbital en lugar de  $t_0$ , siempre que se especifique un tiempo de referencia  $t_r$ :

$$M_r = \bar{n}(t_r - t_0),$$

de tal forma que:

$$M = M_r + \bar{n}(t - t_r).$$

Finalmente, se determina el argumento de latitud del pericentro, esto es, el ángulo existente entre la línea de los nodos y la línea de las apsidés medido sobre el plano orbital. Se puede calcular de la siguiente forma. Un vector unitario  $\hat{u}_\Omega$  definido sobre el plano de la órbita en la dirección de del nodo ascendente tiene por componentes:

$$\hat{u}_\Omega = \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \text{sen } \Omega \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Puesto que el ángulo existente entre  $\hat{u}_\Omega$  y el vector unitario en la dirección del radio vector  $\hat{u}_r = \mathbf{r}/r$  es el ángulo  $\omega + \theta$  tendremos que

$$\hat{u}_\Omega \cdot \hat{u}_r = |\hat{u}_\Omega| |\hat{u}_r| \cos(\omega + \theta).$$

Pero  $\hat{u}_r = (x/r, y/r, z/r)$  por lo que

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{x \cos \Omega + y \text{sen } \Omega}{r}\right) - \theta.$$

Resumiendo, se pueden encontrar seis parámetros independientes que son calculados a partir de las condiciones iniciales, usualmente la posición y la velocidad en un instante determinado, y que llamaremos, en estrecha analogía con el caso clásico, como *elementos orbitales postnewtonianos*, los cuales son:  $a_R$ ,  $e_R$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  y  $t_0$  (o  $M_r$ ).

La diferencia importante entre ambos conjuntos de elementos orbitales, esto es, el de la solución clásica y el de D&D, estriba en la definición del semieje mayor radial  $a_R$  y la excentricidad radial  $e_R$  (las excentricidades auxiliares  $\bar{e}$  y  $e_\theta$  que entran en las ecuaciones para hallar  $u$  y  $\theta$  son funciones de  $e_R$  a través de las ecuaciones (71) y (75)), además de un ligero detalle con el argumento de latitud del pericentro (ver más adelante). El conjunto de elementos orbitales postnewtoniano se reduce al conjunto clásico al tomar  $c \rightarrow \infty$ :  $a_R = a$ ,  $e_R = \bar{e} = e_\theta = e$ ,  $\bar{n} = n$ .

### El cálculo de la posición y la velocidad

Ya se ha visto cómo se pueden calcular los elementos orbitales postnewtonianos en un instante  $t_r$  cualquiera, a partir de componentes rectangulares de la posición y la velocidad. Ahora procedemos a calcular las componentes de la posición y de la velocidad para cualquier otro tiempo  $t$ .

Se suponen conocidos los elementos orbitales postnewtonianos —  $a_R$ ,  $e_R$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $t_0$  (o  $M_r$ ) — al igual que el valor de las masas de ambos cuerpos, esto es, conocemos  $\mu$  y  $\sigma$ .

Con lo visto hasta ahora ya se sabe cómo se pueden determinar los valores del radio vector  $r$  y de la anomalía verdadera  $\theta$  para un tiempo dado  $t$ . Obsérvense las ecuaciones (34), (85) y (93) para verificar que la secuencia del cálculo es análoga al caso clásico.

La posición del cuerpo de masa  $m_2$  con respecto a  $m_1$  en relación con el plano orbital está dada por  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualmente, las componentes de velocidad vienen dadas por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} + \dot{r} \cos \theta \\ r \cos \theta \dot{\theta} + \dot{r} \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (100)$$

donde  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$  pueden calcularse a partir de (22) y (15).

Por otra parte, la ecuación (85) significa, como ya se había comentado, que por cada revolución la línea de las ápsides, esto es, desde donde se mide  $\theta$ , se está desplazando un ángulo  $\theta_0$  en la dirección en que se cuenta  $\theta$ . De (84) se desprende que la línea de las ápsides se está incrementando un valor  $2\kappa\pi$  por cada giro realizado. Como  $\theta$  y  $\omega$  (el argumento de latitud del pericentro) están sobre el mismo plano es más conveniente tener en cuenta este corrimiento como un incremento de  $\omega$  en un valor  $2\kappa\pi$  por cada giro completo. Sin embargo, el hecho de que el apocentro suceda cuando  $\theta = 3\kappa\pi + \pi$  y no en  $2\kappa\pi + \pi$  obliga a que cada vez que se incremente  $\theta$  en un valor de  $\pi$  se sume  $\kappa\pi$ .

Entonces el argumento de latitud del pericentro va cambiando con cada nueva revolución de la siguiente forma:

$$\bar{\omega} = \omega + 2\kappa\pi \left[ ENT \left( \frac{\bar{n}(t - t_r) + M_r + \pi}{2\pi} \right) \right], \quad (101)$$

donde  $\bar{n}$  es el valor definido en (66),  $t_r$  es la época de referencia,  $M_r$  el valor de la anomalía media en la época de referencia y  $ENT$  es la función valor entero. Lo que está en paréntesis cuadrado permite dar cuenta del incremento de  $\theta$  en  $\kappa\pi$  por cada media revolución.

Conocidas las componentes de  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  definidas sobre el plano de la órbita, el paso siguiente es obtener las componentes de la posición y la velocidad en el sistema de coordenadas que define el plano fundamental. Ello se logra mediante una serie de rotaciones sucesivas de la siguiente forma: ambos vectores son rotados primeramente un ángulo  $-\bar{\omega}$  alrededor del eje normal al plano de la órbita; luego otra rotación un ángulo  $-i$  alrededor de la línea de los nodos y por último una rotación un ángulo  $-\Omega$  alrededor del eje  $z$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_{z(-\Omega)} R_{x(-i)} R_{z(-\bar{\omega})} \mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= R_{z(-\Omega)} R_{x(-i)} R_{z(-\bar{\omega})} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (102)$$

Llamando  $S' = R_{z(-\Omega)} R_{x(-i)} R_{z(-\bar{\omega})}$ , donde:

$$\begin{aligned} R_{z(-\alpha)} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{x(-\alpha)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

las componentes de la posición y velocidad están dadas por:

$$\mathbf{r} = S' \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{r}} = S' \dot{\mathbf{q}}. \quad (103)$$

Explícitamente las componentes cartesianas de la posición son:

$$\begin{aligned} x &= r[\cos(\bar{\omega} + \theta) \cos \Omega - \operatorname{sen}(\bar{\omega} + \theta) \cos i \operatorname{sen} \Omega], \\ y &= r[\cos(\bar{\omega} + \theta) \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen}(\bar{\omega} + \theta) \cos i \cos \Omega], \\ z &= r[\operatorname{sen}(\bar{\omega} + \theta) \operatorname{sen} i]. \end{aligned} \quad (104)$$

De igual forma, las componentes cartesianas de la velocidad son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{r}}{r} x + r\dot{\theta}[-\cos \Omega \operatorname{sen}(\bar{\omega} + \theta) - \operatorname{sen} \Omega \cos i \cos(\Omega + \theta)], \\ \dot{y} &= \frac{\dot{r}}{r} y + r\dot{\theta}[-\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}(\bar{\omega} + \theta) + \cos \Omega \cos i \cos(\Omega + \theta)], \\ \dot{z} &= \frac{\dot{r}}{r} z + r\dot{\theta}[\operatorname{sen} i \cos(\bar{\omega} + \theta)]. \end{aligned} \quad (105)$$

### Un ejemplo

Para determinar el grado de exactitud de la solución de D&D estudiaremos el sistema conformado por el planeta Mercurio alrededor del Sol ignorando la presencia de los demás cuerpos del sistema solar. Tomaremos como componentes cartesianas de la posición y de la velocidad (referidos al plano del ecuador celeste) al siguiente conjunto de valores, válidos para el 28 de junio de 1969 a las  $0^h$  de Tiempo Dinámico Baricéntrico, (Seidelmann, (1992), pág. 304):

$$\begin{aligned} x &= 0.357260212546963715 \text{ U.A.} \\ y &= -0.0915490552856159762 \text{ U.A.} \\ z &= -0.0859810041345356578 \text{ U.A.} \\ \dot{x} &= 0.00336784520455775328 \text{ U.A./día} \\ \dot{y} &= 0.0248893428375858480 \text{ U.A./día} \\ \dot{z} &= 0.0129440715971588809 \text{ U.A./día} \end{aligned}$$

Se ha adoptado como unidad de distancia a la unidad astronómica (U.A.), equivalente a  $1.4959787 \times 10^{11}$  m, y como unidad de tiempo al día solar medio el cual equivale a 86 400 segundos SI. Como es usual en mecánica celeste, se hace:

$$Gm = G(m_1 + m_2) = Gm_1 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = k^2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right).$$

En las unidades citadas el valor de la constante  $k$ , denominada *constante de Gauss*, es:

$$k = 0.01720209895 \frac{\text{U.A.}^{3/2}}{\text{día}}.$$

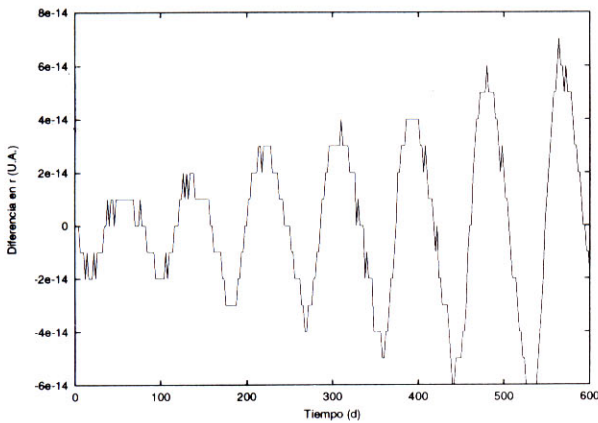
Para Mercurio, el valor de  $m_2/m_1$  es igual a 1/6 023 600. Los *elementos orbitales postnewtonianos* correspondientes a los valores de las anteriores coordenadas se muestran en el siguiente conjunto de datos:

$$\begin{aligned} a_R &= 0.38709931274830 \text{ U.A.} \\ e_R &= 0.20561661821793 \\ i &= 7.00680530016832 \\ \Omega &= 48.36869109918314 \\ M_r &= 287.77725906209133 \\ \omega &= 29.03698905805728 \end{aligned}$$



donde las variables angulares están dadas en unidades de grados. Para llegar a estos se ha realizado además una rotación de coordenadas alrededor del eje  $x$  un ángulo  $\epsilon$  (la oblicuidad de la eclíptica) con el fin de definir los elementos angulares con respecto al plano de la eclíptica.

A fin de poder analizar el grado de efectividad de la solución D&D se han calculado las componentes cartesianas de la posición y la velocidad de Mercurio a intervalos regulares por 600 días a partir de la fecha de referencia. Los valores así obtenidos con la solución analítica de D&D se han comparado con los resultados de una integración numérica directa de las ecuaciones diferenciales (1). Dicha integración se llevó a cabo con ayuda del integrador Radau, una rutina computacional escrita en FORTRAN, altamente eficiente y optimizada, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales que se usan en mecánica celeste, ver **Everhart**, (1985).

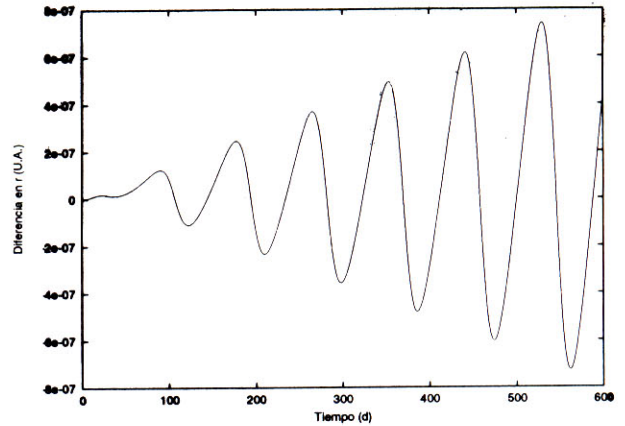


**Figura 3:** Diferencia entre los radio vectores calculados analítica y numéricamente.

La figura 3 muestra la diferencia entre los valores del radio vector calculados analítica y numéricamente en función del tiempo. Dicha diferencia es del orden de  $1 \times 10^{-14}$  U.A., esto es, del orden de un milímetro. Muestra entonces la gran utilidad que tiene la solución analítica para describir la trayectoria postnewtoniana del planeta Mercurio *comparada* con la integración numérica directa de las ecuaciones diferenciales. El aumento lento de la diferencia conforme avanza el tiempo se debe a los efectos de redondeo que causan una pérdida cada vez más creciente en la exactitud de las últimas cifras significativas característica de las integraciones numéricas.

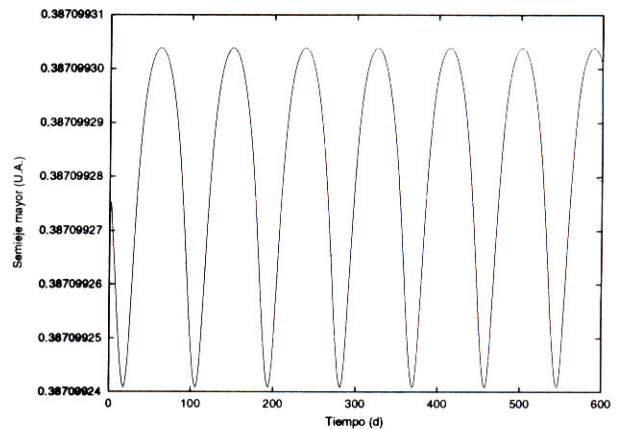
Por otro lado, la figura 4 muestra la diferencia creciente existente entre el radio vector calculado con el procedimiento de D&D y el calculado con las simples ecuaciones newtonianas (que se logra haciendo en las ecuaciones de D&D a  $c \rightarrow \infty$ ). Desde un inicio se obtienen diferencias del orden de  $1 \times 10^{-7}$  U.A., o sea, unos 15 kilómetros. Si tenemos en cuenta que la línea de las ápsides está precesando es claro que la diferencia tenderá a aumentar con el tiempo.

Es interesante observar el comportamiento de algunos de los elementos orbitales clásicos. Con las componentes de la posición y la velocidad halladas con la solución de D&D para cada instante de tiempo definimos una órbita osculadora clásica, esto es, aplicamos las ecuaciones que permiten el cálculo de los elementos orbitales postnewtonianos y hacemos  $c \rightarrow \infty$ .



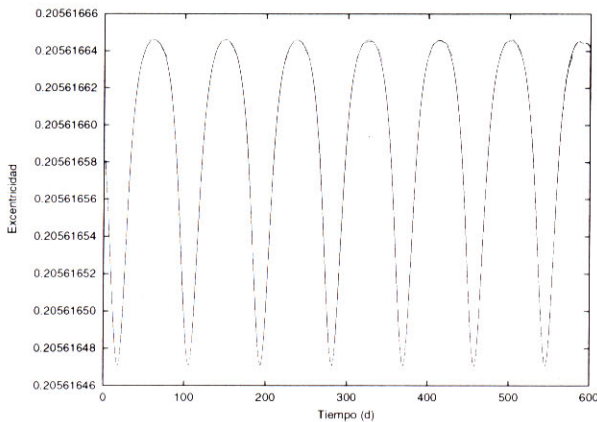
**Figura 4:** Diferencia entre el radio vector calculado clásicamente y con la solución D&D.

La figura 5 muestra la evolución temporal del semieje mayor  $a$  de la órbita del planeta Mercurio. Podemos interpretar este comportamiento diciendo que el semieje mayor oscila alrededor de un valor medio y que la perturbación postnewtoniana no genera cambios seculares en este elemento.



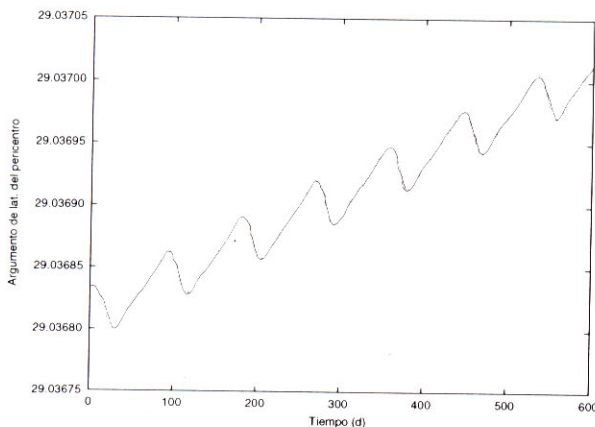
**Figura 5:** Evolución temporal del semieje mayor clásico de la órbita del planeta Mercurio.

Igual se puede decir del comportamiento de la excentricidad de la órbita de Mercurio que se muestra en la figura 6. El período de oscilación de ambos elementos coincide con el período sideral del planeta que es cercano a los 88 días terrestres.



**Figura 6:** Evolución temporal de la excentricidad clásica en la órbita del planeta Mercurio.

Pero, como es de esperarse, el argumento de latitud del pericentro, que indica el movimiento de la línea de las ápsides, está cambiando secularmente, esto es, está creciendo con el tiempo. Como se trata de un ángulo se dice que está circularizando. En este caso, ver figura 7, el desplazamiento es pequeño y está acompañado por una contribución periódica.



**Figura 7:** Evolución temporal del argumento de la latitud del pericentro en la órbita del planeta Mercurio.

## Conclusiones

Hemos mostrado en detalle la solución propuesta por Damour & Deruelle para la ecuación diferencial del problema de los dos cuerpos postnewtoniano al orden de  $1/c^2$ . La solución puede verse como una generalización de la clásica solución por coordenadas polares. Las expresiones así obtenidas se reducen a las clásicas ecuaciones al tomar  $c \rightarrow \infty$ . Las constantes de movimiento se han relacionado con parámetros que hemos llamado “elementos orbitales postnewtonianos”. La diferencia con los elementos

clásicos se reducen a la introducción de una excentricidad radial  $e_R$ , un semieje mayor radial  $a_R$  y un argumento de latitud del pericentro que se va desplazando a causa de la adición de un término constante cada vez que se completa “media revolución”. El ejemplo con Mercurio alrededor del Sol, ignorando la presencia de los demás planetas, ha mostrado que la solución da cuenta del movimiento del planeta en torno al Sol y de la existencia de la variación periódica del semieje mayor clásico y la excentricidad clásica, así como de la variación secular y periódica en el argumento de latitud del pericentro.

Finalmente, queremos hacer énfasis en que las ecuaciones descritas aquí pueden ser aplicadas únicamente a un sistema aislado conformado por sólo dos masas puntuales y que poseen velocidades “pequeñas” y campos gravitacionales no demasiado intensos. Por puntuales se quiere decir que los cuerpos involucrados se asemejan a partículas, o cuanto menos, que sus dimensiones  $L$  son tan pequeñas, comparadas con la distancia  $r$  entre ellas, que la relación  $L/r$  es completamente despreciable. El modelo no puede describir con precisión el movimiento de ciertos cuerpos astrofísicos con campos gravitacionales muy intensos como pares de estrellas neutrónicas o estrellas masivas, pero sí de un único planeta en órbita alrededor de una estrella como el Sol. Ha sido claro desde un principio que el modelo no incluye la presencia de fuerzas externas como resistencia del medio, presión de radiación, etc.

## Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento al profesor Eduardo Brieva por sus útiles comentarios y apropiadas sugerencias.

## Bibliografía

- Brouwer, D., Clemence, G. 1961. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York.
- Brumberg, V. 1991. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Adam Hilger, Bristol.
- Calura, M., Fortini, P., Montanari, E. 1997. Post-Newtonian Lagrangian Planetary Equations. *Phys. Review D*, **56**:4782-4788.
- Damour, T. 1987. The Problem of Motion in Newtonian and Einstein Gravity, en *Three Hundred Years of Gravitation*, Hawking S. y Israel W. (edi.) Cambridge University Press, Cambridge.
- Damour, T., Deruelle, N. 1985. General Relativistic Celestial Mechanics I. The post-Newtonian Motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **43**: 107-132.
- Everhart, E. 1985. An Efficient Integrator that Uses Gauss-Radau Spacings, en *Dynamics of Comets, Their Origin and Evolution*, Carusi and Valsecchi Edi., Reidel Pub. Co., 185-202.
- Haugan, M. 1985. Post-Newtonian Arrival-Time Analysis for a Pulsar in a Binary System. *Ap. J.* **296**: 1-12.



- Lestrade, J. F.** 1981. Perturbations relativistes des orbites planétaires dans la métrique de Schwarzschild généralisée à trois paramètres. Cas de Mercure. *Astron. Astrophys.* **100**: 143-155.
- Portilla J.G.** 2001. Elementos de astronomía de posición, Unibiblos, Bogotá.
- Richardson, D. L., Kelly, T. J.** 1988. Two-Body Motion in the Post-Newtonian Approximation. *Cel. Mech.*, **43**: 193-210.
- Rubincam, D. P.** 1977. General Relativity and Satellite Orbits: the Motion of a Test Particle in the Schwarzschild Metric. *Cel. Mech.* **15**: 21-33.
- Soffel, M. Ruder, H., Schneider, M.** 1987. The Two Body Problem in the (Truncated) PPN-Theory. *Cel. Mech.* **40**: 77-85.
- Soffel, M.** 1989. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Taylor, J. H., Weisberg, J. M.** 1989. Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR 1913 +16. *Ap. J.* **345**: 434-450.
- Wagoner, R., Will, C.** 1976. Post-Newtonian Gravitational Radiation from Orbiting Point Masses. *Ap. J.* **210**: 764-775.