

# ÁTOMO ALCALINO UNIDIMENSIONAL FORZADO POR UN TREN DE DIRAC

por

Arcesio Castañeda<sup>1,2</sup> & Diógenes Campos<sup>1,3</sup>

## Resumen

**Arcesio Castañeda & Diógenes Campos:** Átomo alcalino unidimensional forzado por un tren de Dirac. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **25**(97): 529-536, 2001. ISSN 0370-3908.

Consideramos la dinámica clásica y cuántica de átomos alcalinos perturbados por un tren de Dirac formado por una secuencia de  $K$  pulsos tipo delta de Dirac, con espaciado temporal  $T$  e intensidad  $\Delta p$ . El átomo se representa por un modelo simplificado unidimensional integrable. Estudiamos el efecto del tren sobre el estado inicial del átomo, los umbrales de campo eléctrico para generar ionización y la probabilidad de sobrevivencia. La concordancia entre los resultados clásicos y cuánticos es buena para una intensidad moderada del campo y durante un número significativo de impulsos.

**Palabras clave:** Ionización, probabilidad de sobrevivencia, caos, tren de Dirac, operador de Floquet.

## Abstract

We consider the classical and quantum dynamics of highly excited alkali atoms perturbed with a Dirac train formed by a periodic sequence of  $K$  kicks of zero-width  $\delta$  functions at a temporal distance  $T$  and kick strength  $\Delta p$ . The atom is described by a simplified one-dimensional integrable model. We study the effect of the train on the initial state of the atom, the electrical field thresholds of ionization, and the survival probability. The agreement between classical and quantum results is good for a moderate strength of the field and during a significant number of kicks.

**Key words:** Ionization, survival probability, chaos, kicked atom, Floquet operator.

---

1 Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

2 E-mail: cesius@168.176.8.55

3 E-mail: dcamposr@ciencias.unal.edu.co

## 1. Introducción

El estudio de sistemas cuánticos dependientes del tiempo es de gran interés, en especial aquellos cuyas contrapartes clásicas exhiben caos dinámico. A la luz del principio de correspondencia de Bohr y de la formulación de Feynman de la mecánica cuántica, se espera que el comportamiento clásico caótico tenga importante influencia en las propiedades de los respectivos sistemas cuánticos en el régimen de números cuánticos altos. Por otro lado, existen experimentos con sistemas hamiltonianos que permiten una comparación entre teoría y experimento en el régimen semiclásico, al igual que la validación de predicciones teóricas.

Los sistemas mecánicos perturbados de manera súbita, impulsiva y periódica (*sistemas pateados*) son paradigmáticos en este tipo de investigaciones [1]. La dinámica completa de estos sistemas se puede reducir al conocimiento del estado del sistema en instantes de tiempo que son múltiplos enteros del período del forzamiento. Esta característica hace viable el estudio de la evolución dinámica del sistema a largo plazo, tanto desde el punto de vista clásico como cuántico, y los resultados arrojan luz sobre la correspondencia entre ambas teorías.

Un ejemplo de este tipo de sistema [2, 3] es un átomo alcalino en el que el electrón activo se prepara inicialmente en un nivel de energía alto (átomo Rydberg) y se somete posteriormente a una serie de pulsos de campo eléctrico ultracortos ( $T_p \lesssim 500$  fs) y unipolares (sólo toma valores positivos o negativos). Este sistema constituye el objeto de investigación en el presente artículo.

En la sección 2 se establece brevemente el modelo hamiltoniano que describe la evolución dinámica del átomo alcalino pateado. La sección 3 describe la solución de las ecuaciones dinámicas resultantes con especial énfasis en los métodos empleados para solucionar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. La sección 4 presenta los resultados obtenidos: átomo alcalino de potasio sometido a un sólo pulso de Dirac (sección 4.1) y a un tren de Dirac (sección 4.2). Finalmente en la sección 5 se discuten algunas conclusiones y perspectivas.

En principio el modelo del sistema es sencillo y de interés académico, pero existen experimentos en los que la radiación pulsada constituye una importante herramienta de análisis y control cuántico [4].

## 2. Hamiltoniano modelo

En ciertas realizaciones experimentales el átomo alcali-

no forzado impulsivamente se prepara inicialmente en un estado Stark extremo [1], de tal manera que en buena aproximación la función de onda que describe al electrón activo (carga  $-e$ , masa  $m_e$ ) es de carácter cuasi-unidimensional<sup>4</sup>. Entonces en esa aproximación la dinámica *libre* está gobernada por el hamiltoniano [6]

$$H_0(p, q) = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Z_\sigma e^2}{q} + \frac{\hbar^2 C}{2m_e q^2}, \quad 0 \leq q < \infty, \quad (1)$$

donde los parámetros alcalinos [5, 6]  $Z_\sigma = Z - \sigma$  y  $C$  dan cuenta del apantallamiento de la carga nuclear  $Z$  y simulan el principio de exclusión de Pauli y la repulsión entre el electrón activo y los electrones del tronco atómico.

Los períodos de oscilación clásicos y cuánticos del electrón activo ( $T_n \sim 0.15n^3$  fs) pueden ser grandes con relación a la duración de cada pulso de campo eléctrico y el efecto de este último consiste en transferir una cantidad neta de momentum  $|\Delta p|$  al electrón activo<sup>5</sup>. El impulso cedido depende del perfil temporal del campo<sup>6</sup>  $E_{HCP}(t)$  y es de sentido contrario al mismo:  $\Delta p = -e \int E_{HCP}(t) dt$ . Así, la serie de pulsos unipolares de campo eléctrico se puede describir de manera adecuada por un tren de  $K$  impulsos de Dirac de frecuencia  $1/T$  y transferencia de momentum  $\Delta p$ :

$$V(q, t) = -q \Delta p \sum_{k=1}^K \delta(t - kT). \quad (2)$$

La evolución dinámica del átomo alcalino forzado impulsivamente se describe entonces por el hamiltoniano

$$H(p, q, t) = H_0(p, q) + V(q, t). \quad (3)$$

## 3. Dinámica del átomo forzado impulsivamente

### 3.1 Evolución clásica

El átomo alcalino no forzado es integrable y la energía electrónica inicial determina si el hamiltoniano (1) da lugar a un movimiento acotado ( $E < 0$ ), que es oscilatorio

<sup>4</sup>En principio esta afirmación es válida sólo para el caso hidrogenoide. Básicamente, el modelo que se considera aquí es el hamiltoniano hidrogenoide 1D con términos de corrección que dan cuenta de las características alcalinas de acuerdo al modelo de Eder [5, 6].

<sup>5</sup>En este artículo se usarán unidades atómicas.

<sup>6</sup>Debido a sus características, éste tipo de radiación electromagnética se conoce como pulso de medio ciclo (Half cycle pulse) [2].



entre dos puntos de retorno, o a un movimiento no acotado (ionización,  $E > 0$ ). Formalmente, el movimiento se describe por un conjunto de ecuaciones paramétricas que involucran de manera explícita el tiempo [6, 7].

En cada impulso (2), el electrón aumenta o disminuye su momentum  $p_k^-$  pero deja inalterada su posición  $q_k^-$ , para luego evolucionar libremente hasta que llega el nuevo impulso del tren de Dirac. Esto conduce a una aplicación discreta (mapeo) que determina el estado del electrón (posición y momentum) a intervalos de tiempo que son múltiplos del período del tren ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} q_k^- &\rightarrow q_k^+ = q_k^-, \\ p_k^- &\rightarrow p_k^+ = p_k^- + \Delta p. \end{aligned} \quad (4)$$

En cada iteración el impulso es el único responsable del cambio neto de energía del electrón activo:

$$(\Delta E)_k := E_k^+ - E_k^- = p_k^- \Delta p + \frac{(\Delta p)^2}{2}. \quad (5)$$

Este cambio de energía depende de manera cuadrática del impulso transferido y, por lo tanto, cuando  $\Delta p$  es constante la ionización sólo depende de la energía y del momentum inicial.

### 3.2 Evolución cuántica

El sistema cuántico no forzado es integrable. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo conduce a un espectro discreto de energías negativas con funciones de onda de cuadrado integrable y a un espectro continuo de energías positivas con funciones de onda de dispersión. El  $n$ -ésimo nivel de energía del electrón activo ligado al tronco atómico es [7], en unidades atómicas,

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{Z_\sigma}{n-1+\lambda} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

donde  $\lambda = (1 + \sqrt{1 + 4C})/2$ ; mientras que el electrón libre tiene energía  $\varepsilon_\kappa = (1/2)\kappa^2$  con  $\kappa \in \mathfrak{R}$ .

La dinámica cuántica del átomo alcalino forzado descrito por (3) se reduce a la investigación del estado del sistema en los instantes  $t = kT^-$ . Esto se logra a través de la aplicación repetida ( $k-1$  veces) del operador de evolución temporal correspondiente a un período u operador de Floquet [7, 8],

$$\hat{U}(T, 0) = e^{-i\hat{H}_0 T} e^{i\hat{q}\Delta p}, \quad (7)$$

sobre el estado inicial del sistema  $|\Psi(0)\rangle$ . El operador evolución (7) describe la evolución temporal como

un efecto cambiando de la acción del pulso sobre el electrón activo, a través de la translación de momentum  $\exp(i\hat{q}\Delta p)$ , y la posterior evolución libre  $\exp(-i\hat{H}_0 T)$  del estado trasladado en momentum.

Las probabilidades de transición (y por lo tanto de ionización) del átomo se obtienen al hallar los elementos matriciales del operador de Floquet en la base de estados propios de  $\hat{H}_0$ , el cual tiene una parte discreta y una parte continua. Con el fin de hacer los cálculos cuánticos más sencillos y trabajar con una base discreta se elige una base ortogonal y enumerable de Sturm  $\{|\psi_n^{n_s}\rangle\}$  [9], lo cual permite representar el operador (7) por una matriz con elementos enumerables. La base de Sturm la forman en representación de coordenadas los vectores

$$\psi_n^{n_s}(q) = N_n^{n_s} e^{-q/n_s} \left( \frac{2q}{n_s} \right)^\lambda L_{n-1}^{(2\lambda-1)} \left( \frac{2q}{n_s} \right), \quad (8)$$

donde  $L_n^\alpha(z)$  es un polinomio generalizado de Laguerre,  $N_n^{n_s}$  una constante de normalización y  $n_s$  es un parámetro bautizado como parámetro de Sturm.

Un conjunto de Sturm  $\{\psi_n^{n_s}(q), n = 1, 2, \dots\}$  permite representar de manera adecuada buena parte de los estados acotados y del continuo de  $\hat{H}_0$ , siempre y cuando que el tamaño de la base truncada y el parámetro de Sturm  $n_s$  se seleccionen de manera apropiada. En efecto, si  $n_s = (n-1+\lambda)/Z_\sigma$  las funciones (8) coinciden con las de los estados acotados de un átomo hidrogenoide.

En términos de la base de Sturm y después de la aplicación de un tren de  $k$  pulsos (período  $T$ ), la probabilidad de supervivencia del electrón activo es

$$P_s(kT) = \sum_{E_n < 0} |a_n(kT)|^2 = \sum_{E_n < 0} |\langle \psi_n^{n_s} | \Psi(kT) \rangle|^2, \quad (9)$$

donde  $E_n$  es el valor propio asociado con  $\psi_n^{n_s}$  y

$$\Psi(kT) = \sum_n a_n(kT) |\psi_n^{n_s}\rangle, \quad (10)$$

es el estado del sistema justo antes del  $(k+1)$ -ésimo pulso. De esta manera, al escribir los coeficientes como un vector columna, se obtiene la relación

$$\mathbf{a}(kT) = \mathbf{U}(T, 0) \mathbf{a}((k-1)T), \quad (11)$$

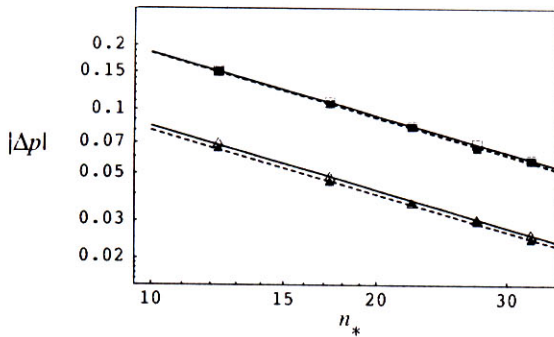
donde  $\mathbf{U}(T, 0)$  designa la matriz que representa el operador (7) en la base ortogonal truncada de Sturm.

## 4. Resultados

#### 4.1 Átomo alcalino bajo un pulso de Dirac

En primer lugar se quiere determinar la magnitud de impulso  $\Delta p$  que es necesaria con el propósito de que un cierto porcentaje de átomos alcalinos se ionice bajo la acción de sólo un pulso de Dirac.

En el caso cuántico se elige una base de Sturm con 500 funciones y con parámetro  $n_s = 35$ , valores que permiten reproducir con buena precisión un amplio conjunto de estados acotados y parte del continuo. En el caso clásico se considera un conjunto microcanónico constituido por 50000 condiciones iniciales (posición, momentum) que corresponden a una energía inicial  $\varepsilon_{n_i}$  igual a la del estado cuántico inicial; la distribución de momentum en el conjunto microcanónico se selecciona para que coincida con la distribución de momentum correspondiente a la respectiva función de onda cuántica.



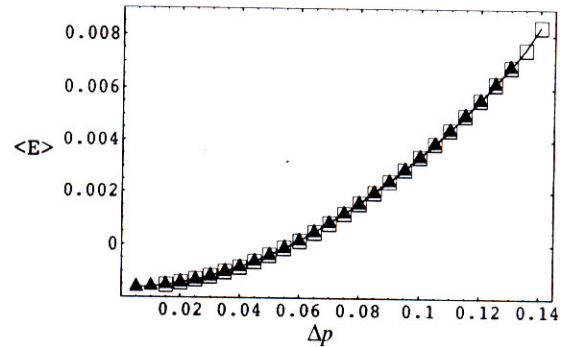
**Figura 1:** Dependencia de la magnitud del impulso  $|\Delta p|$  requerido para producir una fracción de ionización  $r$  del átomo de potasio respecto al número cuántico efectivo  $n_* = n_i - 1 + \lambda$ . Resultados cuánticos:  $r = 50\%$  ( $\square$ ),  $r = 10\%$  ( $\triangle$ ). Resultados clásicos:  $r = 50\%$  ( $\blacksquare$ ),  $r = 10\%$  ( $\blacktriangle$ ). Las rectas indican los ajustes respectivos: líneas sólidas, resultados cuánticos; líneas a trazos, resultados clásicos.

La figura 1 presenta los resultados obtenidos y muestra que la correspondencia entre las predicciones clásicas y cuánticas es bastante buena. De los datos de la figura 1 se concluye que el impulso requerido para originar una fracción de ionización ( $r$ ) dada decae de manera algebraica con el número cuántico efectivo  $n_*$ ,

$$|\Delta p| \propto \frac{1}{n_i - 1 + \lambda}, \quad (12)$$

lo cual es una consecuencia directa de la aproximación impulsiva [10], (4) y (5). La expresión (5) permanece válida<sup>7</sup> en el caso cuántico [7] y, por lo tanto, el cambio

<sup>7</sup>Con las sustituciones  $E \rightarrow \langle E \rangle$  y  $p \rightarrow \langle p \rangle$ .



**Figura 2:** Valor medio de energía del estado  $n_i = 30$  del átomo de potasio tras la aplicación de un impulso de Dirac. Resultados cuánticos. ( $\square$ ) Resultados clásicos. ( $\blacktriangle$ ).

neto de energía (al igual que la probabilidad de ionización) no depende de la polaridad del impulso (o del campo); los estados acotados tienen un valor medio nulo de momentum.

La figura 2 muestra que para un  $n_i$  fijo el valor medio de energía aumenta de manera cuadrática con el impulso, como era de esperarse. Igualmente indica que los valores de  $\langle E \rangle$ , al ser calculados tanto clásica como cuánticamente, coinciden con las predicciones de la aproximación impulsiva (5).

#### 4.2 Átomo alcalino bajo un tren de Dirac

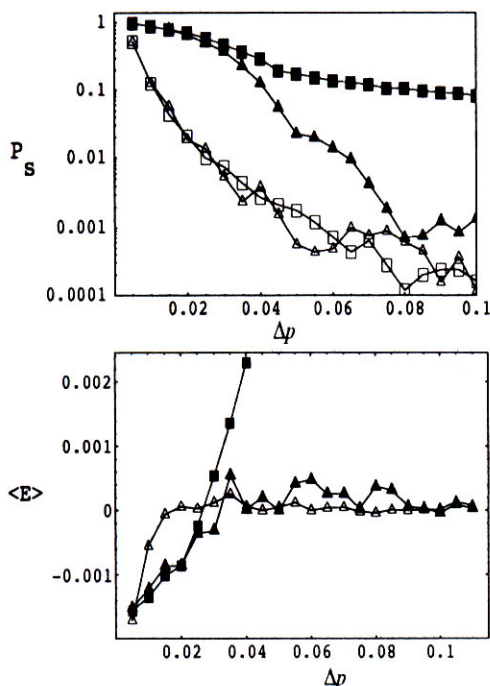
*Impulso positivo  $\Delta p > 0$ .*

La figura 3, que considera un átomo de potasio preparado inicialmente en  $n_i = 30$ , presenta la probabilidad de supervivencia del átomo como función de la magnitud  $|\Delta p|$  del impulso para un tren de 50 pulsos con período igual al período natural del sistema no perturbado,  $T = T_{n_i} = 2\pi(n_i - 1 + \lambda)^3 / Z_\sigma^2$ .

Los pulsos ( $\Delta p > 0$ ) aumentan el momentum del electrón activo y las probabilidades de supervivencia clásica y cuántica disminuyen de manera rápida con la magnitud del impulso. Aunque los resultados cuánticos sólo coinciden con los clásicos en un rango limitado de valores de  $\Delta p$ , la probabilidad de supervivencia clásica no se aleja de la probabilidad cuántica de manera significativa, en el rango de valores mostrado en la figura. Por otro lado, los valores medios de energía cuánticos (figura 3) no siguen el rápido crecimiento de los valores clásicos, ya que sólo aumentan inicialmente y luego os-



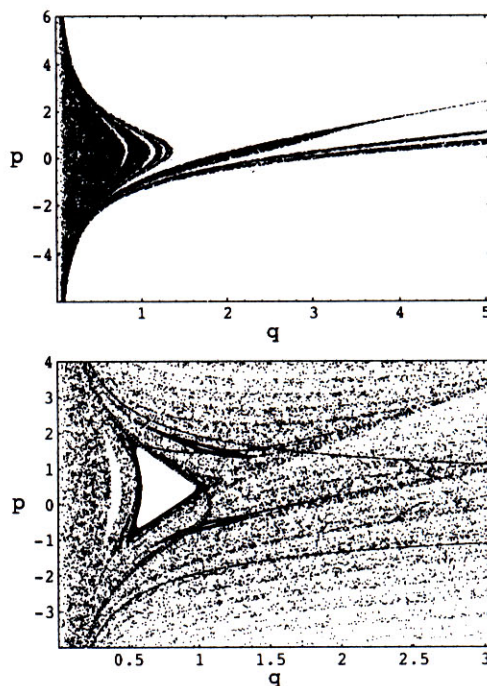
cilan ligeramente arriba del umbral de ionización.



**Figura 3:** Probabilidad de supervivencia y valor esperado de energía del átomo de potasio ( $n_i = 30$ ) tras la aplicación de 50 pulsos de Dirac con  $T = T_{n_i}$  e impulso de magnitud  $|\Delta p|$ . Resultados cuánticos: pulsos de polaridad positiva ( $\Delta$ ), pulsos de polaridad negativa ( $\blacktriangle$ ). Resultados clásicos: pulsos de polaridad positiva ( $\square$ ), pulsos de polaridad negativa ( $\blacksquare$ ).

Desde el punto de vista clásico el rápido decaimiento de la probabilidad de supervivencia se debe a que el espacio de fase del átomo impulsado positivamente (figura 4a) es globalmente caótico y a la imposibilidad de que el electrón activo sea recapturado una vez ionizado. Por estas mismas razones, si el átomo es impulsado positivamente la probabilidad de supervivencia decae de manera rápida con el número de pulsos aplicados, como se aprecia en la figura 5(a). En la figura se observa que el decaimiento es algebraico (para  $k \gg 1$ ) y que la correspondencia clásico-cuántica se mantiene durante un número considerable de pulsos.

Si el átomo alcalino es forzado por impulsos positivos, la probabilidad de supervivencia clásica no depende de manera fuerte del período del tren de Dirac (figura 6(a)), lo cual es consecuencia del caos dinámico completo que presenta el sistema en tal caso. La res-

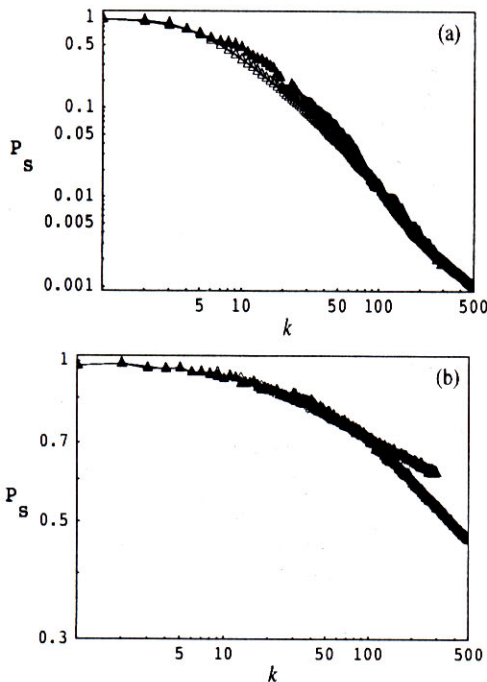


**Figura 4:** Diagramas de Poincaré del átomo alcalino pateado de potasio. El diagrama se genera con 2000 puntos de la órbita no perturbada ( $n_i = 30$ ) que se someten a 50 pulsos de período  $T = 0.45T_{n_i}$  e impulso (a) 0.015 y (b)  $-0.03$ . Las variables se han escalado como  $q/(n_i - 1 + \lambda)^2$  y  $(n_i - 1 + \lambda)p$ . También se muestra la órbita no forzada (línea gruesa) y la separatriz continuo-acotado (línea delgada).

pectiva probabilidad de supervivencia cuántica es más sensible a cambios en  $T$  y, aunque no se aleja extremadamente de los resultados clásicos, exhibe un marcado comportamiento oscilatorio alrededor o por encima de éstos últimos.

#### *Impulso negativo $\Delta p < 0$ .*

Si el impulso es negativo (dirigido hacia el tronco atómico), la probabilidad de supervivencia como función de la magnitud del impulso (figura 3) es mucho más grande que en el caso anterior, por lo menos para moderados valores de  $\Delta p$ . La correspondencia clásico-cuántica es bastante buena hasta  $|\Delta p| \lesssim 0.03$ , valor a partir del cual la curva cuántica disminuye de manera mucho más rápida que la clásica. Los valores esperados de energía cuánticos siguen los valores clásicos para pequeñas mag-



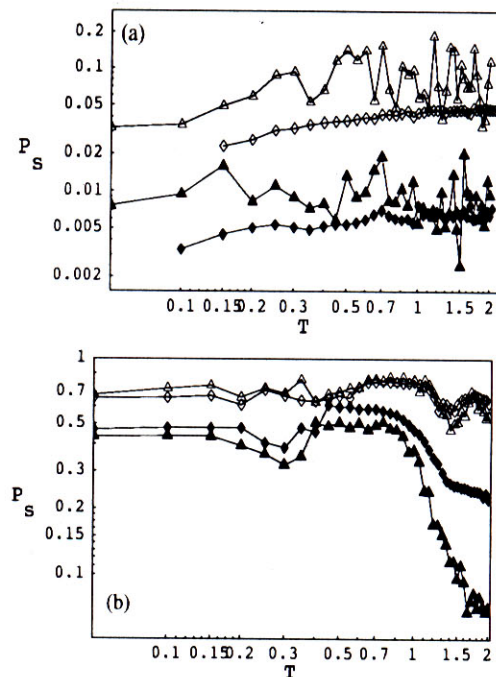
**Figura 5:** Probabilidad de supervivencia  $P_s$  del átomo de potasio ( $n_i = 30$ ) respecto al número de pateos de un tren de período  $T = 0.45T_{n_i}$ , e impulso (a)  $\Delta p = 0.015$  y (b)  $\Delta p = -0.03$ . Resultados cuánticos ( $\blacktriangle$ ), clásicos ( $\triangle$ ).

nitudes del impulso ( $|\Delta p| \lesssim 0.025$ ), pero luego se ubican ligeramente arriba de la energía umbral ( $E = 0$ ).

Desde el punto de vista clásico éste comportamiento se debe a la estructura mixta (figura 4(b)) que presenta el espacio de fase del electrón activo negativamente pateado. En este caso existen en el espacio de fase islas regulares insertadas en el mar caótico y es posible la recaptura del electrón que ha alcanzado energías positivas. Por otro lado, el electrón activo puede ser atrapado en estas zonas regulares afectando el viaje del electrón hacia el continuo y conllevando a que la probabilidad de supervivencia del átomo alcalino se incremente de manera importante con relación al caso de impulsos positivos.

El anterior resultado se verifica también en la curva de probabilidad de supervivencia como función del número de pulsos (figura 5(b)) la cual, en contraste con los resultados para  $\Delta p > 0$ , exhibe un comportamiento oscilatorio durante los primeros impulsos para luego decaer algebraicamente (de manera más lenta) con el número de impulsos. Se observa también que la corres-

pondencia clásico-cuántica es buena para los primeros pulsos ( $k \lesssim 35$ ), pero luego la probabilidad de supervivencia cuántica disminuye más rápidamente que la clásica.

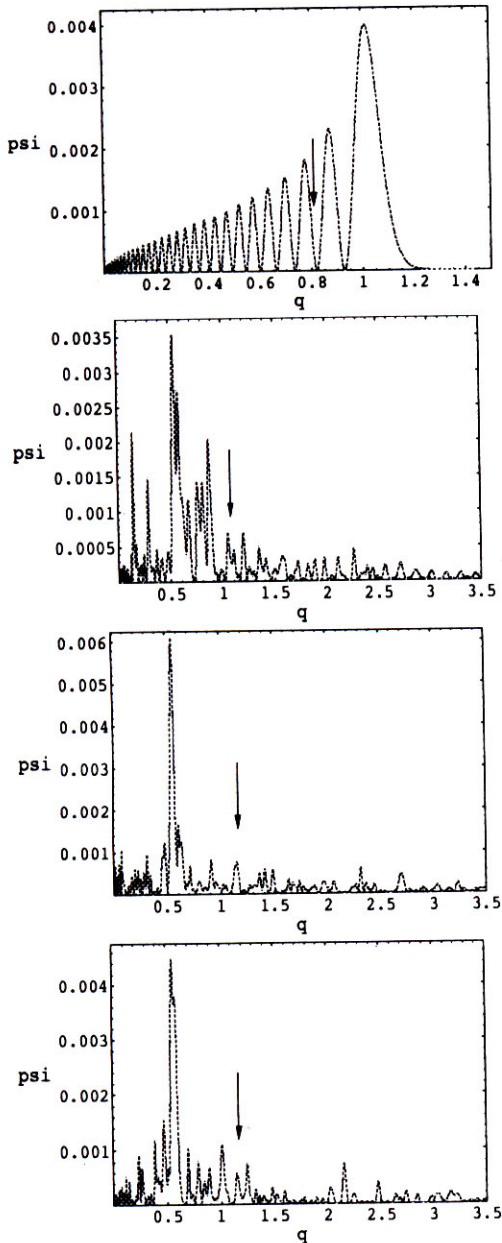


**Figura 6:** Probabilidad de supervivencia y valor esperado de la energía del átomo de potasio ( $n_i = 30$ ) con respecto al período del tren  $T$  tras la aplicación de 50 pulsos: (a) positivos, (b) negativos. Resultados cuánticos:  $|\Delta p| = 0.015$  ( $\triangle$ ),  $|\Delta p| = 0.03$  ( $\blacktriangle$ ). Resultados clásicos:  $|\Delta p| = 0.015$  ( $\diamond$ ),  $|\Delta p| = 0.03$  ( $\blacklozenge$ ).

Es interesante observar que la probabilidad de supervivencia depende fuertemente del período del tren de impulsos de Dirac tanto clásica como cuánticamente, como se aprecia en la figura 6(b). De hecho, la correspondencia clásico-cuántica es bastante buena y la probabilidad de supervivencia exhibe máximos y mínimos que dependen de la relación  $T/T_{n_i}$ . En particular, si el impulso es de  $-0.03$ , cuando el período del tren es de  $0.45T_{n_i}$ , la probabilidad de supervivencia es máxima, sugiriendo que el átomo alcalino se estabiliza para este conjunto de parámetros.

Clásicamente, la estabilización está asociada con el transplapamiento de la órbita inicial con las islas estables más prominentes que se forman en el espacio de fase del





**Figura 7:** Evolución de la función de onda del átomo de potasio ( $n_i = 30$ ) bajo un tren de pulsos negativos:  $T = 0.45T_{n_i}$ ,  $\Delta p = -0.03$ . (a) Función de onda inicial, justo antes del pulso 6 (b), 11 (c), 16 (d). Las flechas indican el valor esperado de posición del paquete.

átomo alcalino pateado negativamente. Las islas atrapan un número apreciable de condiciones iniciales de la órbita inicial como es visible en la figura 4(b) y la probabilidad de supervivencia del átomo se incrementa de manera importante.

Para los mismos valores de los parámetros se observa a nivel cuántico una complicada evolución de la función de onda (figura 7). En correspondencia con los resultados clásicos, la evolución es tal que el valor medio de posición con respecto a  $\psi(q, kT)$  no alcanza valores extremadamente altos durante los primeros pulsos del tren.

## 5. Conclusiones y perspectivas

El proceso de ionización del átomo alcalino debido a pulsos unipolares (positivos o negativos) es marcadamente distinto al de pulsos ópticos ultracortos. Esto se debe a que a diferencia de los últimos, los pulsos unipolares son capaces de transferir un momentum neto al electrón activo del átomo alcalino. El pulso redistribuye coherentemente la población inicial del átomo alcalino y es capaz de generar hasta un 100% de ionización. Los campos requeridos para originar una ionización apreciable varían como  $1/(n-1+\lambda)$ , tanto clásica como cuánticamente. Estos valores son extremadamente altos en comparación con los campos requeridos ( $1/n^4$ ) para originar ionización por pulsos ópticos [4] o por pulsos unipolares de mayor duración [10].

Un átomo alcalino que se somete a un tren de impulsos sigue un proceso de ionización clásico bastante complejo que se ve reflejado en la estructura de su espacio de fase. Si el impulso es *positivo* no es posible recapturar al electrón ionizado y el espacio de fase del átomo alcalino es globalmente caótico. Como consecuencia [3], la probabilidad de supervivencia decae rápidamente con la magnitud del impulso, no depende de manera importante del período de repetición del tren; con estas dos cantidades fijas, presenta una gran tasa de decaimiento (algebraico) con el número de pulsos ( $k^{-1.5}$ ). Para magnitudes del impulso moderadas los resultados cuánticos siguen a los clásicos en un número considerable de pulsos. En contraste con los resultados clásicos, la probabilidad de supervivencia cuántica presenta una dependencia (aunque no muy fuerte) con el período tren de Dirac.

Si el impulso es *negativo* es posible recapturar el electrón que eventualmente ha ionizado y el espacio de fase exhibe una estructura mixta con zonas regulares inner-

sas en un mar caótico totalmente interconectado. La probabilidad de supervivencia disminuye con la magnitud del impulso de manera menos drástica y nuevamente los resultados cuánticos siguen a los clásicos por un número considerable de períodos del tren. Tanto los resultados cuánticos como los clásicos conducen a zonas en el espacio de parámetros del forzamiento en las cuales el átomo alcalino parece exhibir estabilización.

Desde el punto de vista clásico, la estabilización se asocia con el confinamiento de un número apreciable de condiciones iniciales en las islas estables del espacio de fase. En correspondencia, la función de onda del átomo alcalino exhibe un comportamiento complicado sin alejarse apreciablemente del tronco atómico durante el número de impulsos en que la curva de probabilidad de supervivencia presenta oscilaciones.

En este punto, funciones de distribución cuánticas en el espacio de fase, como por ejemplo la función de Husimi [12], constituyen una herramienta extremadamente útil con el fin de hacer comparaciones con la localización y estabilización en el espacio de fase clásico. La estabilización cuántica se debe a la localización de unos pocos estados de Floquet [8] (estados propios del operador de Floquet) y es de esperar que en tal caso las distribuciones cuánticas de tales estados se ubiquen alrededor de las islas estables clásicas. Un trabajo a lo largo de estas ideas está en desarrollo.

#### Agradecimientos.

Los autores agradecen a la Dirección Nacional de Investigación (DINAIN) de la Universidad Nacional de Colombia por su apoyo al Grupo "Caos y Complejidad" (C&C), al igual que a COLCIENCIAS. Agradecimientos a los integrantes del Grupo, en especial a la profesora Carolina Spinel por importantes anotaciones sobre el tema.

## Referencias

- [1] R. Blümel. *Chaos in atomic physics*. Cambridge University Press, Reino Unido (1997).
- [2] R.R. Jones, D. You y P.H. Bucksbaum, Phys. Rev. Lett. **70**, 1236 (1993).
- [3] M. T. Frey, F. B. Dunning, C. O. Reinhold, S. Yoshida, and J. Burgdörfer, Phys. Rev. A **59**, 1434 (1999).
- [4] R.R. Jones, Phys. Rev. Lett. **70**, 3927 (1999). J. Ahn, D.N. Hutchinson, et al., quant-ph/0009064 (2000).
- [5] D. Campos. *Teoría de sistemas cuánticos*. Universidad Nacional, Bogotá (1989).
- [6] D. Campos, M. C. Spinel y J. Madroñero, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 8101 (2001).
- [7] A. Castañeda *Dinámica cuántica de un átomo alcalino unidimensional en un tren de Dirac*. Trabajo de grado. Universidad Nacional, Bogotá (2001).
- [8] S. Yoshida, C.O. Reinhold, et al., Phys. Rev. A **59**, R4121 (1999).
- [9] M. Rotenberg, Adv. At. Mol. Phys. **6**, 233 (1970).
- [10] M. Melles, C.O. Reinhold et al., J. Phys. B:At. Mol. Phys **26**, L659 (1993).
- [11] N.E. Tielking y R.R. Jones, Phys. Rev. A **52**, 1371 (1995).
- [12] Lee H., Phys. Rep. **259**, 147 (1995).