

PERFILES VERTICALES DE TEMPERATURA EN UNA ATMOSFERA SEMIGRIS CON UNA CAPA DE NUBES¹

por

Joaquín Pelkowski* & Juan Carlos Anduckia Avila**

Resumen

Pelkowski, J. & J.C. Anduckia: Perfiles verticales de temperatura en una atmósfera semigris con una capa de nubes. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **24**(93): 505-520, 2000. ISSN 0370-3908.

Se establecen perfiles verticales de temperatura para una atmósfera semigris y de tres capas paralelas utilizando la hipótesis de equilibrio radiativo. La aproximación contiene el efecto invernadero, el esparcimiento en una dirección por una capa de nubes y la reflexión (isotrópicamente difusa) en la superficie planetaria. Tiene en cuenta también la absorción de radiación de onda corta en una de las tres capas, y extiende el trabajo realizado por uno de los autores.

Palabras clave: atmósferas planetarias, perfiles de temperatura, equilibrio radiativo.

Abstract

We extend earlier models of planetary layers in radiative equilibrium by including scattering within a homogeneous cloud layer in a single direction. The atmospheric layers above and below the cloud layer are taken to be in radiative equilibrium, whose temperature profiles may be calculated. Though the resulting profile, being discontinuous, is unrealistic, the model adds to the effects of the earlier models a cloud albedo, resulting from the scattering of short-wave radiation.

Key words: planetary atmospheres, temperature profiles, radiative equilibrium.

* Profesor Asociado, Departamento de Geociencias-Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Colombia, jpelko@ciencias.unal.edu.co

** Grupo de Investigación en Meteorología, Departamento de Geociencias-Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Colombia, janducki@uniandes.edu.co.

¹ Trabajo realizado dentro del marco del Grupo de Investigaciones en Meteorología - U.N., que cuenta con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y el BID, contrato COLCIENCIAS-U.N. No.391/99. Forma parte de los resultados del Proyecto de Investigación apoyado por COLCIENCIAS y el BID "Proyecciones climáticas e impactos socioeconómicos del cambio climático en Colombia", contrato COLCIENCIAS-U.N. No.321-98.

1. Introducción

La Tierra, como otros sistemas planetarios, se encuentra en un estado de equilibrio energético que depende del flujo incidente de radiación solar². Dicho equilibrio es sensible a variaciones en el valor del flujo, pudiendo resultar épocas de intenso calor, épocas intermedias y épocas en las cuales la cubierta de hielo avanza significativamente, llamadas glaciaciones. El Sol, una estrella de tipo espectral G2, es la fuente de esta energía y se puede considerar como un *cuerpo negro*, que se mantiene mediante reacciones termonucleares a una temperatura efectiva cercana a 5800 K. Esta temperatura, llamada también de *brillo* (*brightness temperature*), es característica de la fotosfera solar. El balance energético resultante para la Tierra, bien conocido, resulta en una temperatura efectiva de 255 K (-18°C).

La atmósfera, junto con los océanos (hidrosfera), la cubierta sólida (litosfera y biosfera) y los glaciares (criosfera), son los elementos de un sistema climático. Aquí nos interesaremos sólo por la primera.

La mayor parte de la energía que recibe la atmósfera es suministrada en forma de radiación de onda larga emitida por la superficie terrestre (radiación de cuerpo negro), que a su vez la absorbe como radiación de onda corta (solar) y de onda larga atmosférica (nubes y gases traza). Las transferencias de energía desde la superficie son una fuente de calor atmosférica, mientras que el enfriamiento infrarrojo en la troposfera media constituye un sumidero para la atmósfera.

En una escala climatológica, necesaria para que se haya llevado a cabo la redistribución de energía solar en la atmósfera (del orden de 6 días en la Tierra, de 0.14 días en Marte), el sistema Tierra con su atmósfera se considera en equilibrio térmico, de manera que la energía recibida o incidente debe igualar a la energía emitida por aquél.

Esta suposición es equivalente a un equilibrio radiativo global en el que la Tierra absorbe cerca de 70% de la energía solar incidente y refleja el 30% restante por albedo o poder reflectivo. El valor actual de este albedo global o planetario, promediado globalmente, es cercano a $A_0 = 0.3$ (Hartmann, 1994).

Asimismo, todos los planetas del sistema solar exhiben un gradiente de temperatura en sus envolturas gaseosas (Fig.1). Si se prescinde de considerar procesos de trans-

ferencia energética que no sean debidos a la propagación de energía electromagnética y se supone que volúmenes infinitesimales absorben la misma cantidad de energía electromagnética que la que emiten, representando por tanto estados en equilibrio, se tienen las bases de los modelos denominados de "equilibrio radiativo local".

En una contribución anterior (Pelkowski, 1998), bajo las hipótesis mencionadas, se habían calculado perfiles verticales de temperatura para la atmósfera terrestre libre de nubes y para el océano. El objetivo del presente desarrollo será extender la parte atmosférica calculando perfiles verticales para una atmósfera que contiene una capa continua de nubes.

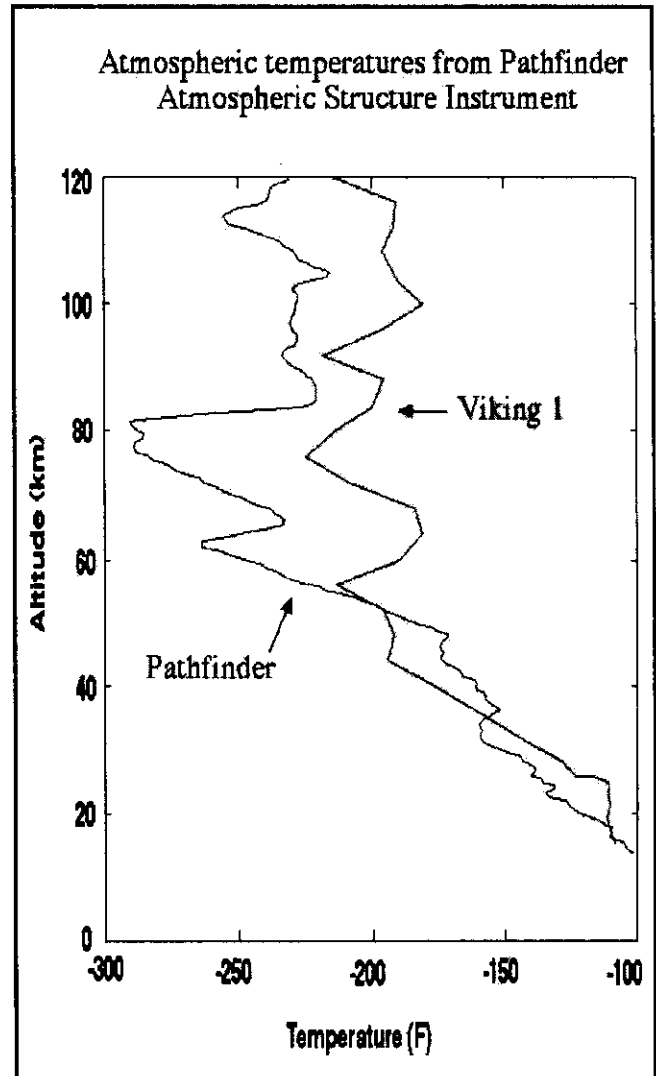


Figura 1. Temperaturas atmosféricas marcianas según las misiones Viking y Pathfinder

² Ni Júpiter ni Saturno cumplen con esta propiedad debido a que se presume poseen fuentes internas de energía.

2. Supuestos y modelo

El modelo de equilibrio radiativo local que elegiremos supone coeficientes de absorción independientes de la longitud de onda, supuesto que se conoce como *emisión gris* en la teoría de la radiación. Puesto que la atmósfera terrestre deja pasar una fracción importante de la radiación solar, pero no toda³, es razonable, como una primera aproximación y simplificación, suponer que el coeficiente de absorción del planeta tiene dos valores no nulos en el visible y en el infrarrojo, esto es, que la atmósfera es *semigris*. Para tener en cuenta la fracción de energía solar absorbida por la atmósfera (unos 20% de la incidente), se supone un coeficiente de absorción respecto de ondas cortas, que represente una fracción de la fuerte absorción en el infrarrojo.

Además de estas simplificaciones físicas, se considera que la atmósfera está compuesta de capas planas y paralelas. Dichas capas se caracterizan por su homogeneidad horizontal y por la isotropía horizontal del campo de radiación, de manera que cualquier variable dependiente sólo puede variar espacialmente en dirección perpendicular a la capa. Se trata entonces de una atmósfera de espesor suficientemente delgado, comparado con el radio del planeta correspondiente (Figs. 2-3).

El modelo para una atmósfera sin nubes y con reflexión en superficie, suponiendo reflexión isotrópica de los rayos incidentes, fue resuelto por Pelkowski (1998). Se pretende aquí incorporar el *esparcimiento*⁴ por una capa *continua* de nubes y la reflexión de energía solar en la superficie de la Tierra, como se indica en la Fig. 3.

El esparcimiento de la radiación visible, responsable de los colores diurnos, especialmente del azul celeste, es un problema de difícil tratamiento matemático. En nuestro caso, siguiendo las indicaciones de Houghton (1986), llegamos a ecuaciones susceptibles de soluciones analíticas, obtenidas como un caso particular de la expresión general del esparcimiento. Anulando el albedo de la superficie, el albedo de la capa de nubes y el coeficiente de absorción en el visible, se reconstituyen los modelos anteriores.

De acuerdo con el modelo atmosférico esbozado, se pueden considerar como dos cantidades fundamentales en el tratamiento de la transferencia radiativa atmosférica a los flujos de radiación ascendente y descendente (Pelkowski, 1998):

$$F^{\uparrow}(\tau) = 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^1 I_{\lambda}(\tau, \mu) \mu d\mu d\lambda \quad (1)$$

$$F^{\downarrow}(\tau) = -2\pi \int_0^{\infty} \int_{-1}^0 I_{\lambda}(\tau, \mu) \mu d\mu d\lambda$$

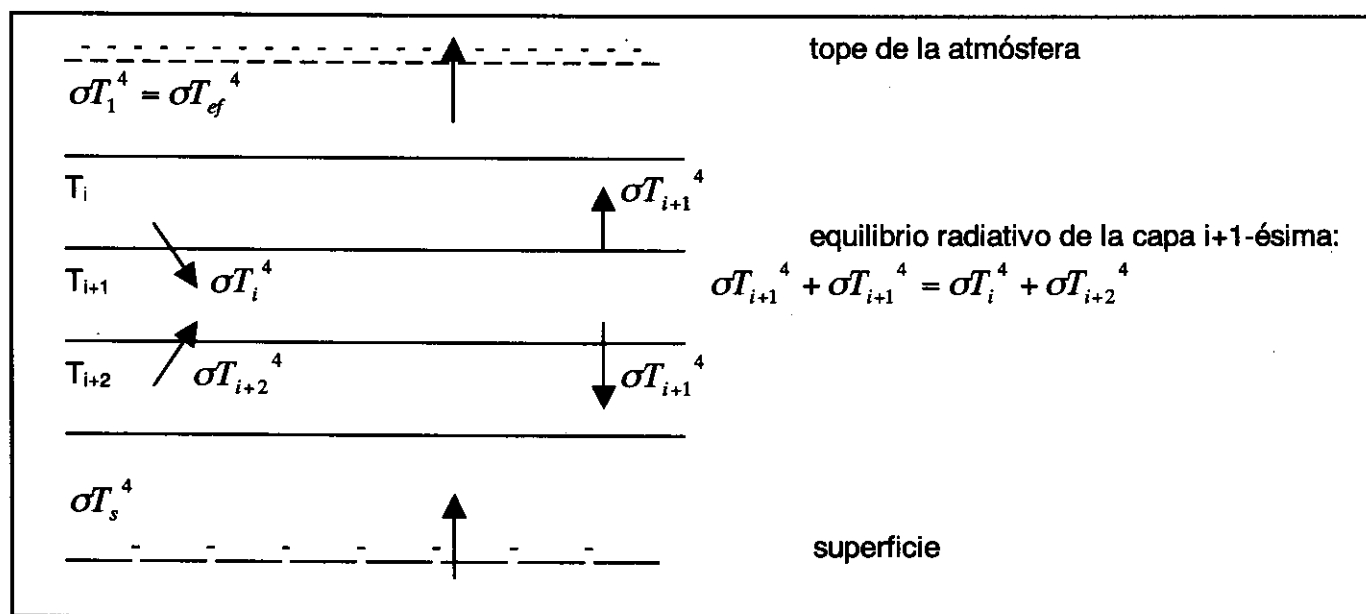


Figura 2. Modelo de capas

³ El ozono, por ejemplo, absorbe radiación ultravioleta en bandas de 200 a 300 nm.

⁴ Llamado a veces también "dispersión" o "difusión", utilizaremos la palabra "esparcimiento" para no confundirlo con el proceso físico de dispersión cromática de la luz blanca, o con el de difusión de contaminantes en la atmósfera.

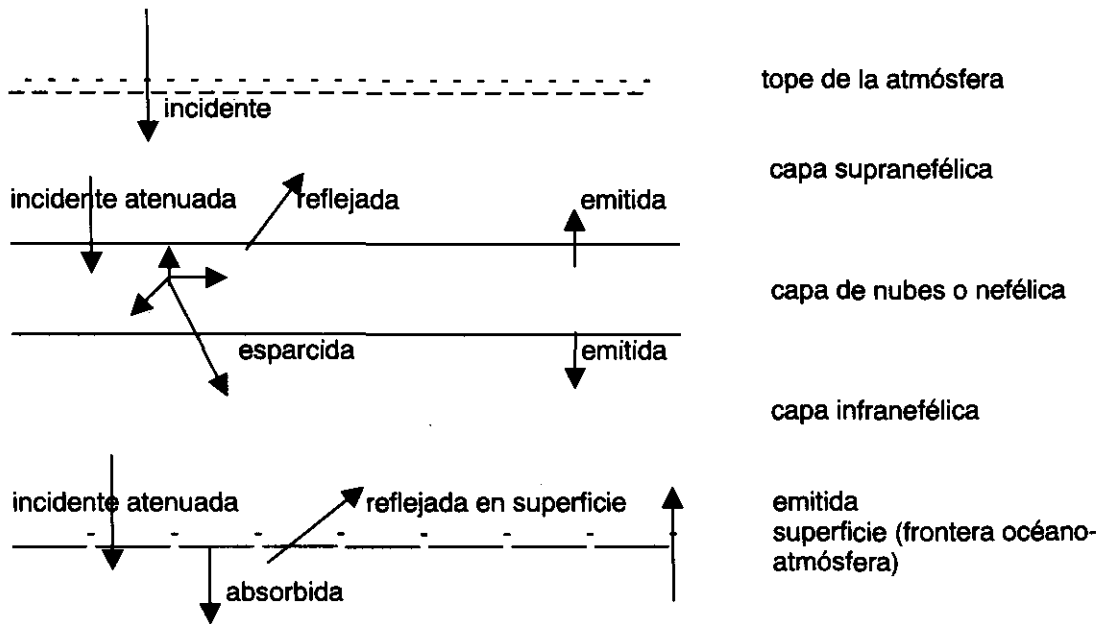


Figura 3. Procesos atmosféricos considerados

Estos flujos se obtienen realizando integraciones hemisféricas de la *intensidad* o *radiancia monocromática* del campo de radiación $I_\lambda = I_\lambda(x, y, z, \theta, \varphi, t)$, que depende de la longitud de onda (índice λ), de la posición en el espacio (x, y, z) por la cual está pasando la onda electromagnética, de la dirección (θ, φ) de dicha onda, y del tiempo t . Bajo el supuesto de la atmósfera estratificada de las Figs. 2-3, no hay variación de intensidad en el plano horizontal ($\partial I_\lambda / \partial x = 0; \partial I_\lambda / \partial y = 0$), lo cual implica que la intensidad es independiente del ángulo acimutal φ . De modo que en una atmósfera estratificada y en la que las variaciones temporales de la radiancia son despreciables, como es el caso de la atmósfera terrestre, la intensidad monocromática se reduce a una función de tres variables $I_\lambda(z, \theta)$.

La condición de equilibrio radiativo en términos de estos flujos para cualquier estrato atmosférico implica la constancia de F :

$$F = F^\downarrow - F^\uparrow = \text{constante} \quad (2)$$

$F > 0$ indica que la capa inferior recibe energía neta; $F < 0$ implica pérdida de energía radiante.

Al atravesar la atmósfera, la intensidad de la radiación experimenta cambios descritos por la ecuación diferencial conocida como "ecuación de transferencia radiativa":

$$\frac{dI_\lambda}{dr} = -\rho k_\lambda I_\lambda + \eta_\lambda \quad (3)$$

El primer término del miembro derecho representa el debilitamiento por absorción de la intensidad que se propaga a lo largo de un "rayo de luz", cuya longitud puede describirse mediante el parámetro de arco r (ley de Lambert-Bouguer). El segundo representa las fuentes de intensificación de la energía de un rayo monocromático dentro del medio material. La función η_λ tiene en cuenta la emisión y el esparcimiento atmosféricos; dividida por el factor ρk_λ , se denomina "función fuente" J_λ . Si el medio se encuentra en equilibrio termodinámico y no hay esparcimiento, la emisión se describe espectralmente mediante la función de Planck $B_\lambda(T)$, de modo que $\eta_\lambda = \rho k_\lambda B_\lambda(T)$, la ley de

Kirchhoff. Se suele emplear como función fuente a esta expresión, aun cuando la atmósfera en conjunto jamás se encuentra en equilibrio térmico. Se postula entonces que *localmente* se dan las condiciones del equilibrio térmico, y se obtiene así la ecuación de transferencia radiativa:

$$\frac{dI_\lambda}{dr} = \vec{\omega} \cdot \nabla I_\lambda = \rho k_\lambda (B_\lambda - I_\lambda) \quad (4)$$

Esta es la ecuación básica de la teoría de transferencia radiativa, siempre que sea lícito descartar el esparcimiento de los rayos electromagnéticos, es decir, cuando éstos no son desviados de sus trayectorias de propagación, bien sea por moléculas (esparcimiento de Rayleigh) o por partículas en suspensión (esparcimiento de Mie).

Puesto que el modelo no admite dependencia horizontal de campos, el operador en cuestión se reduce a $\frac{dI_\lambda}{dr} = \mu \frac{\partial I_\lambda}{\partial z}$, donde $\mu = \cos\theta$ es el coseno del ángulo cenital, o componente vertical del vector unitario de propagación del haz de radiación $\vec{\omega}$.

3. Profundidad óptica

Las variaciones en la transparencia atmosférica pueden influenciar a largo plazo cambios en la transferencia radiativa. Estas variaciones se reflejan en la *profundidad óptica*, que se define como la integral:

$$\tau_\lambda(z) = \int_z^{H_1} \rho k_\lambda dz' \quad (5)$$

Esta nueva variable *independiente* tiene en cuenta tanto la cantidad de materia absorbente por unidad de área ($\int \rho dz'$, ρ : densidad de los gases atmosféricos absorbentes),

como la capacidad de absorción (a través del coeficiente de absorción k_λ). H_1 representa la altura de la frontera superior de la atmósfera, y $\tau(0) = \tau_b$ es la *profundidad óptica* de toda la capa en cuestión. Las profundidades ópticas τ_λ suelen ser funciones espectrales bastante irregulares, lo que dificulta el tratamiento analítico. Para dar una descripción completa debería conocerse la estructura de bandas de los distintos componentes atmosféricos sumados, lo cual está por fuera de los límites de este trabajo, así que supondremos que k es constante a lo largo de todo el espectro.

Con la introducción de la profundidad óptica independiente de la longitud de onda, la ecuación de transferencia radiativa se puede expresar como una ecuación diferencial no lineal de primer orden en el "espacio óptico", llamada ecuación de Schwarzschild:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau} = I_\lambda(\tau, \mu) - B_\lambda(\tau) \quad (6)$$

En ella la función fuente depende de la profundidad óptica, a través de la temperatura que aparece en la función de Planck, cuya distribución vertical se puede representar en términos de τ . Esta composición funcional es muy útil en el presente tratamiento pues para cada relación entre la profundidad óptica y la altura atmosférica, es posible deducir el perfil de temperatura correspondiente.

A modo de ilustración, en una atmósfera como la de Venus, en la cual la temperatura superficial es cercana a 750 K, y con temperaturas medidas de 230 K en el tope de su atmósfera, la profundidad óptica resulta ser igual a 224. En el caso terrestre la profundidad óptica es cercana a la unidad, con una temperatura superficial cercana a 288 K y efectiva de 255 K. La Tabla 1 presenta esta situación (los datos de temperatura son tomados de Houghton, 1986; el cálculo de la profundidad es nuestro).

Tabla 1. Profundidades ópticas de algunos planetas interiores

Planet a	Temperatura superficial [K]	Temperatura efectiva observada [K]	Características atmosféricas	Profundidad óptica
Venus	750	230	90% CO ₂ , cubierta completa, nubes de azufre	224
Tierra	280	250	78% N ₂ , 21% O ₂ , cubierta parcial (50%), nubes de H ₂ O	1.15
Marte	240	220	80% CO ₂ , nubes tenues de H ₂ O	0.83

Las temperaturas efectivas que figuran en la Tabla 1, se basan en mediciones radiométricas de la radiación emitida por el planeta, y se obtienen mediante la ley de Stefan-Boltzmann.

En una atmósfera *gris* se supone que el coeficiente de absorción no depende de la frecuencia de la radiación, sea ésta incidente o emitida, así que en lugar de infinitos valores de la profundidad óptica, se opera con un solo valor promedio, constante a lo largo de todo el espectro, o, en un caso más general como el propuesto aquí, con dos valores representativos de las características distintas de la absorción en el visible y el infrarrojo.

Se designará a la profundidad óptica en la región espectral de las ondas largas (el infrarrojo) con las letras τ_u para la capa supranefélica⁵ (arriba de las nubes), y τ_l para la capa infranefélica (debajo de las nubes). En el visible se usarán los símbolos $\tau_{\theta u}$ y $\tau_{\theta l}$, respectivamente, y se supondrá que ambas profundidades son proporcionales (Goody & Yung, 1989):

$$\tau_{\theta u} = \varepsilon_u \tau_u, \quad \tau_{\theta l} = \varepsilon_l \tau_l \quad (7)$$

Si $\varepsilon_u \neq 0$, se tiene el caso de la absorción semigris en la capa supranefélica. Si $\varepsilon_u = 1$ se tiene el caso de la absorción gris, y análogamente para la capa infranefélica. Para simplificar un poco el desarrollo se supondrá en este trabajo $\varepsilon_l = 0$. Aunque el resultado es menos general, las ecuaciones resultantes son menos complicadas. La suposición implica que no hay absorción de radiación solar en la capa infranefélica.

4. Separación de ondas cortas y largas

Puesto que los espectros de la energía solar incidente y de la energía telúrica emergente corresponden a temperaturas muy distintas (5780 K y 255 K, respectivamente), al promediarse con respecto a las distintas direcciones de propagación posibles, se traslapan en un pequeño intervalo. Este hecho permite separar el flujo total de radiación en flujos de onda corta o solar, centrada alrededor de $0,5 \mu\text{m}$, designados por $Q(\tau)$, y flujos infrarrojos que resultan de integrar el espectro de ondas largas (alrededor de $10 \mu\text{m}$), designados por $R(\tau)$. Las flechas indican dirección descendente (\downarrow) y ascendente (\uparrow) en cualquier capa. El flujo total es entonces

$$F(\tau) = Q(\tau) + R(\tau) = Q^\downarrow(\tau) - Q^\uparrow(\tau) + R^\downarrow(\tau) - R^\uparrow(\tau) \quad (8)$$

Se puede calcular el balance de la radiación total en un nivel determinado de la profundidad τ , si se conoce o se supone alguna relación válida para $\tau(z)$, la profundidad óptica atmosférica a la altura z .

5. Ondas cortas

Para calcular el flujo de radiación solar, teniendo en cuenta que no hay fuentes atmosféricas de radiación solar, nótese que en la ecuación de transferencia radiativa la función fuente se anula. Para cualquier nivel en la capa absorbente en el visible (para el caso, la supranefélica) la solución es inmediata⁶:

$$Q^\downarrow(\tau_u) = \mu_{\theta 0} Q_0 e^{-\varepsilon_u \tau_u / \mu_{\theta 0}} \quad (9)$$

El flujo ascendente de radiación solar, puesto que la reflexión es isotrópicamente difusa tanto en el tope de la capa de nubes como en superficie, está dado por⁷ (Pelkowski, 1998):

$$Q_u^\uparrow(\tau_u) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\lambda^\theta(\tau_u, \mu) e^{-\varepsilon_u(\tau_u - \tau_u) / \mu_{\theta 0}} \mu d\mu d\varphi = 2r_o Q^\downarrow(\tau_u) E_3(\varepsilon_u(\tau_u - \tau_u))$$

$$Q_l^\uparrow(\tau_l) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\lambda^\theta(\tau_l, \mu) e^{-\varepsilon_l(\tau_l - \tau_l) / \mu_{\theta 0}} \mu d\mu d\varphi = 2r_o Q^\downarrow(\tau_l) E_3(\varepsilon_l(\tau_l - \tau_l))$$

(10)

Si $\varepsilon_l = 0$, la cantidad en superficie se reduce a:

$$Q_l^\uparrow(\tau_b) = 2r_o Q^\downarrow(\tau_b) E_3(0).$$

Puesto que $E_3(0) = \frac{1}{2}$, se tiene $Q_l^\uparrow(\tau_b) = r_o Q^\downarrow(\tau_b)$, tal como sucede siempre que la radiación reflejada atraviese inalterada la capa atmosférica correspondiente.

⁶ Q_0 es la denominada constante solar y su valor es de $1370 \text{ Wm}^{-2}\text{s}^{-2}$. El ángulo cenital promedio $\mu_{\theta 0}$ varía según las efemérides terrestres y es distinto para los distintos planetas del sistema solar y para diferentes inclinaciones del sol, pero aquí trabajaremos con un valor promedio igual a 0.25.

⁷ Las funciones $E_n(x)$ son llamadas *integrales exponenciales (de orden n)*.

⁵ De Néfele, divinidad griega de las nubes.

El flujo neto de radiación solar hacia la capa atmosférica situada por debajo de la altura correspondiente

$$\begin{aligned} Q(\tau_u) &= Q^\downarrow(\tau_u) - Q^\uparrow(\tau_u) = Q^\downarrow(\tau_u = 0) \left[e^{-\varepsilon_u \tau_u / \mu_0} - 2r_c e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_0} E_3(\varepsilon_u(\tau_{ub} - \tau_u)) \right] && \text{supranefélica} \\ Q(\tau_l) &= Q^\downarrow(\tau_l) - Q^\uparrow(\tau_l) = Q^\downarrow(\tau_l = 0) \left[e^{-\varepsilon_l \tau_l / \mu_0} - 2r_o e^{-\varepsilon_l \tau_{lb} / \mu_0} E_3(\varepsilon_l(\tau_{lb} - \tau_l)) \right] && \text{infranefélica. (11)} \end{aligned}$$

6. Cálculo del albedo planetario

Para calcular el albedo global planetario obsérvese nuevamente (Fig.3) el modelo atmosférico considerado, recordando que la cubierta de nubes es continua. Primero se intentará hallar una expresión para la cantidad de radiación solar que llega a la superficie planetaria. En el tope de la atmósfera incide $Q^\downarrow(0)$, definida por la ecuación (9). En el tope de la capa de nubes se recibe $t_u Q^\downarrow(0)$, donde para simplificar $t_u = e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_0}$ representa la transmisividad de la radiación solar directa en la capa supranefélica. Se transmite a la capa infranefélica una cantidad $t_c t_u Q^\downarrow(0)$. Incide por "primera vez" sobre la superficie una cantidad $t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$, donde t_l representa la transmisividad para la radiación solar directa descendente en la capa infranefélica.

Para la capa de nubes se supondrá que no hay diferencia entre las transmisividades respecto de la radiación solar directa descendente y la radiación solar difusa ascendente, por tanto $t_c^\downarrow = t_c^\uparrow = t_c$. Así mismo, el albedo es idéntico para la radiación de onda corta que incide sobre el tope (radiación solar directa) que para aquella que incide sobre la base (radiación solar difusa). Estos dos parámetros, transmisividad y albedo de las nubes, se calculan más adelante.

La primera reflexión de la radiación incidente en superficie da lugar a sucesivas incidencias en superficie, debido a que parte es reflejada nuevamente por las nubes hacia la superficie. En el tratamiento de estas múltiples reflexiones es necesario tener en cuenta que, puesto que la reflexión es isotrópicamente difusa, la transmisividad es ahora como en las ecuaciones (10), y como recordatorio se utiliza el subíndice d.

La primera reflexión en superficie es entonces $r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$. Incide desde abajo sobre la base de la nube una cantidad $t_{ld} r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$, donde $t_{ld} = 2E_3(\varepsilon_l(\tau_{lb} - \tau))$.

a la profundidad τ es entonces igual a la diferencia de los flujos descendente y ascendente:

Se refleja hacia la superficie $r_c t_{ld} r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$. Incide por segunda vez sobre la superficie una cantidad $t_{ld} r_c t_{ld} r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0) = r_c t_{ld}^2 r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$. Iterando este procedimiento, la tercera incidencia en superficie resulta ser $r_c^2 t_{ld}^4 r_o^2 t_l t_c t_u Q^\downarrow(0)$, y así sucesivamente. Sumando todos estos términos se tiene entonces la cantidad de radiación total incidente en superficie Q_s :

$$Q_s = t_l t_c t_u Q^\downarrow(0) + r_c t_{ld}^2 r_o t_l t_c t_u Q^\downarrow(0) + r_c^2 t_{ld}^4 r_o^2 t_l t_c t_u Q^\downarrow(0) + \dots$$

Recordando que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, con $x < 1$, la suma anterior resulta ser:

$$Q_s = t_l t_c t_u Q^\downarrow(0) [1 + r_c r_o t_{ld}^2 + r_c^2 r_o^2 t_{ld}^4 + \dots] = \frac{t_l t_c t_u}{1 - r_c r_o t_{ld}^2} Q^\downarrow(0)$$

La cantidad de energía que escapa, por reflexión, de la atmósfera puede obtenerse a partir de la expresión anterior considerando su: reflexión en superficie, atenuación en la capa infranefélica, transmisión ascendente en la nube y atenuación en la capa supranefélica, y sumando la primera y única reflexión en la capa de nubes, a su vez atenuada al ascender y escapar. Entonces la energía total reflejada al espacio es:

$$Q_r = t_u r_c t_{ud} Q^\downarrow(0) + r_o t_{ld} t_c t_{ud} Q_s = t_u r_c t_{ud} Q^\downarrow(0) + \frac{r_o t_l t_{ld} t_c^2 t_u t_{ud}}{1 - r_c r_o t_{ld}^2} Q^\downarrow(0)$$

El albedo global es entonces

$$A = \frac{Q_r}{Q^\downarrow(0)} = t_u r_c t_{ud} + \frac{r_o t_l t_{ld} t_c^2 t_u t_{ud}}{1 - r_c r_o t_{ld}^2} \quad (12)$$

una función complicada del albedo superficial r_o y del albedo de las nubes r_c .

Habiendo considerado el flujo de radiación solar, que es un flujo asociado sobre todo con radiación de onda corta, hay que considerar la radiación de onda larga, radiación que corresponde a la temperatura del planeta y es llamada infrarroja. Por lo general, las atmósferas planetarias absorben esta radiación con mayor eficacia que la radiación solar, de modo que pueden considerarse en el infrarrojo como ópticamente opacas. Pero antes se hace necesario el tratamiento del espacamiento por una capa de nubes.

7. Espacamiento dentro de una capa de nubes

Al incluir el espacamiento en la descripción de la transferencia radiativa para el caso de independencia acimutal de la radiación, la ecuación (3), luego de integrar sobre todo el espectro, toma la forma siguiente:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - J \quad (13)$$

donde ahora la función fuente J viene dada por (Salby, 1996; Liou, 1980):

$$J = (1 - \omega)B + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') I d\mu' \quad (14)$$

La función $P(\mu, \mu')$ representa la distribución angular de energía esparcida desde una dirección μ a una μ' ; es por tanto una función de fase normalizada de acuerdo con $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') d\mu' = 1$. Si se adopta una convención famosa en este tipo de tratamiento, conocida como hipótesis de Eddington, según la cual las intensidades de la radiación son hemisféricamente isotrópicas, se puede definir una intensidad incidente en el tope de la capa nubosa como $I^-(\tau_c = 0) = \frac{Q^-(0)}{\pi}$, de modo que la transmisividad de la capa de nubes ha de interpretarse como una transmisividad de radiación difusa, y no de radiación directa.

Definiendo la siguiente función de fase (Anduckia & Pelkowski, 2000):

$$P(\mu, \mu') = 2[f\delta(1-\mu) + (1-f)\delta(1+\mu)]H(\mu) + 2[f\delta(1+\mu) + (1-f)\delta(1-\mu)][1-H(\mu)] \quad (15)$$

donde $H(\mu)$ es la función de Heaviside (o "escalón unitario"), igual a la unidad para valores positivos del argumento e igual a cero para los negativos, y siendo δ la función delta de Dirac definida por su efecto en una integral, para cualquier función g :

$$\int_{-1}^1 g(\mu)\delta(1 \pm \mu)d\mu = g(\mu \pm 1) \quad (16)$$

Efectuando ahora la integración de la ecuación (13) respecto a μ con la función de fase definida anteriormente en la función fuente, y distinguiendo los casos $\mu > 0$ y $\mu < 0$, se obtienen las ecuaciones para los flujos ascendentes y descendentes de radiación solar:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^+}{d\tau} + Q^+ &= (1-\omega)\pi B + \omega[fQ^+ + (1-f)Q^+] \\ -\frac{dQ^-}{d\tau} + Q^- &= (1-\omega)\pi B + \omega[(1-f)Q^+ + fQ^-] \end{aligned} \quad (17)$$

Despreciando la emisión de ondas cortas en la capa, las ecuaciones son⁸:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^+}{d\tau} + Q^+ &= \omega[fQ^+ + (1-f)Q^+] \\ -\frac{dQ^-}{d\tau} + Q^- &= \omega[(1-f)Q^+ + fQ^-] \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\omega = \frac{\sigma}{\sigma + k}$ es el "albedo de espacamiento simple", expresado en términos de los coeficientes σ, k de espacamiento y de absorción respectivamente; f es la fracción de radiación esparcida hacia adelante ($0 \leq f \leq 1$). Para espacamiento isotrópico debe tenerse $f = \frac{1}{2}$.

Con $\frac{dQ}{d\tau} = \dot{Q}$, las ecuaciones anteriores se escriben apropiadamente:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^+ &= (\omega f - 1)Q^+ + \omega(1-f)Q^+ \\ -\dot{Q}^- &= \omega(1-f)Q^+ + (\omega f - 1)Q^- \end{aligned}$$

⁸ La forma completa de las ecuaciones con tratamiento del espacamiento puede consultarse en Salby (1996).

En forma matricial se escribe:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}^\downarrow \\ \dot{Q}^\uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^\downarrow \\ Q^\uparrow \end{bmatrix}$$

donde $a = \omega f - 1$, $b = \omega(1 - f)$.

El polinomio característico de esta matriz es $p(\alpha) = \alpha^2 - (\omega f - 1)^2 + \omega^2(1 - f)^2$ y un poco de trabajo algebraico sobre $p(\alpha) = 0$ lleva a los valores propios dados por $\alpha^2 = (1 - \omega)(1 + \omega - 2\omega f)$. Dos vectores

propios para este sistema son de la forma $\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$,

donde $\beta = -\frac{\alpha - 1 + \omega f}{\omega(1 - f)}$.

Se llega así a las soluciones:

$$\begin{aligned} Q^\downarrow &= C e^{-\alpha\tau} - \beta D e^{\alpha\tau} \\ Q^\uparrow &= -\beta C e^{-\alpha\tau} + D e^{\alpha\tau} \end{aligned} \quad (19)$$

Esta solución general puede simplificarse si se considera el caso de esparcimiento conservativo, que corresponde al límite $\omega = 1$. En dicho caso es inmediato notar que las ecuaciones (18) se reducen:

$$\begin{aligned} \frac{dQ^\downarrow}{d\tau} + (Q^\downarrow - Q^\uparrow)(1 - f) &= 0 \\ \frac{dQ^\uparrow}{d\tau} + (Q^\downarrow - Q^\uparrow)(1 - f) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Aprovechando que el flujo es constante e igual a c , y llevando a cabo las integraciones respectivas se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} Q^\downarrow(\tau_c) &= Q^\downarrow(\tau_c = 0) - c(1 - f)\tau_c \\ Q^\uparrow(\tau_{cb}) &= Q^\uparrow(\tau_c) - c(1 - f)(\tau_{cb} - \tau_c) \end{aligned} \quad (21)$$

Las condiciones de frontera se obtienen de manera análoga a como se obtuvo la ecuación (12) para el albedo global en el apartado anterior, esto es, sumando todas las contribuciones reflejadas e incidentes sobre el tope y la base de la capa nubosa; son las siguientes:

$$Q^\downarrow(\tau_c = 0)$$

$$Q^\downarrow(\tau_{cb}) = \frac{t_c}{1 - r_o r_c} Q^\downarrow(\tau_c = 0)$$

$$Q^\uparrow(\tau_c = 0) = (r_c + \frac{r_o t_c^2}{1 - r_o r_c}) Q^\downarrow(\tau_c = 0)$$

$$Q^\uparrow(\tau_{cb}) = \frac{r_o t_c}{1 - r_o r_c} Q^\downarrow(\tau_c = 0)$$

(21)

Estas condiciones permiten la búsqueda de los valores de *transmisividad* y *albedo* para la capa nubosa⁹, que resultan ser:

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{(1 - f)\tau_{cb}}{1 + (1 - f)\tau_{cb}} \\ t_c &= \frac{1}{1 + (1 - f)\tau_{cb}} \end{aligned} \quad (23)$$

donde $r_c + t_c = 1$ puesto que $\omega = 1$ y no hay emisión en la nube, es decir el caso de esparcimiento conservativo. τ_{cb} es la profundidad óptica de la nube en el visible. Si se puede ajustar un valor climatológico para el albedo de la nube, entonces se puede determinar la profundidad óptica.

En la Fig. 4 se reproduce, en dos casos posibles del esparcimiento (isotrópico y hacia delante), el comportamiento del albedo de la nube como función de su profundidad óptica, de acuerdo con la ecuación (23).

albedo nube ($\tau = 0.5$)

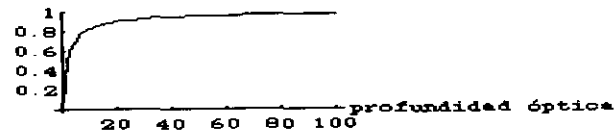


Figura 4. Valor del albedo de la capa de nubes en función de su profundidad óptica para esparcimiento isotrópico

⁹ Los valores de transmisividad y albedo de la capa de nubes son los mismos que los obtenidos en el caso en que no hay contribución reflejada que incide en la base de la nube (Houghton, 1986), indicando que la transmisividad y el albedo son independientes de la reflexión en superficie en el caso de esparcimiento conservativo.

8. Ondas largas

Se definen flujos infrarrojos $R^{\downarrow}, R^{\uparrow}$ de la misma manera que en la ecuación (1), con $R(\tau) = R^{\downarrow}(\tau) - R^{\uparrow}(\tau)$. Si las intensidades con ángulos cenitales menores que $\pi/2$ (de cosenos positivos) se llaman I^+ y aquellas con ángulos cenitales mayores que $\pi/2$ (de cosenos negativos) I^- , para que pueda haber flujos radiativos no nulos, es preciso que $I^+ \neq I^-$. La integración de la ecuación de Schwarzschild con respecto a μ y λ sobre una esfera, conduce a una ecuación para el flujo infrarrojo:

$$\frac{dR}{d\tau} = -4\pi(\mathfrak{S} - B) \quad (24)$$

donde $B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ es la emisión de Planck e

$\mathfrak{S}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} I_{\nu} d\mu d\nu = \frac{1}{2} (I^+ + I^-)$ define la intensidad (local) promedio suponiendo isotropía hemisférica, según la ya mencionada hipótesis de Eddington. De las ecuaciones (1) se obtienen los flujos ascendente y descendente:

$$R^{\uparrow}(\tau) = \pi I^+(\tau) \quad (25)$$

$$R^{\downarrow}(\tau) = \pi I^-(\tau) \quad (26)$$

Esta aproximación se conoce como "aproximación de dos corrientes" (Goody & Yung, 1989) y se utiliza en el siguiente apartado. Se puede definir de igual manera una temperatura efectiva mediante la ecuación: $\sigma T_{ef}^4 = R^{\uparrow}(0)$, y esta sería la temperatura que habría de tener un cuerpo negro para emitir la misma cantidad de energía (infrarroja) que la observada en el tope de la atmósfera.

9. Equilibrio radiativo

En equilibrio radiativo cualquier volumen infinitesimal de la capa en cuestión no pierde ni acumula energía (radiante). Por tanto, la divergencia del flujo radiativo se anula en todas partes. En el caso presente esta condición estacionaria se expresa (en función de τ) así:

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{dF^{\downarrow}}{d\tau} - \frac{dF^{\uparrow}}{d\tau} = 0 \quad (27)$$

donde $F(\tau) = Q(\tau) + R(\tau)$ representa el flujo total en términos de la profundidad óptica, y puesto que dicho flujo es constante se tiene

$$F(\tau) = F(0) = Q(0) + R(0) = \mu_0 Q_0(1 - A) + R^{\downarrow}(0) - R^{\uparrow}(0)$$

De la ecuación (24) resulta $B = -\frac{1}{4\pi} \frac{dR}{d\tau} + \frac{1}{2} (I^+ + I^-)$, y con intervención de las ecuaciones (25) y (26), junto con las expresiones para $F(\tau)$ e $\mathfrak{S}(\tau)$, se deduce que para $\tau = 0$:

$$B(0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{dR}{d\tau}(0) + \frac{R^{\downarrow}(0)}{\pi} + \frac{1}{2\pi} [Q(0) - F(0)]$$

Puesto que el flujo es constante se puede expresar la derivada del flujo infrarrojo con respecto a τ usando la expresión para el flujo de radiación solar como:

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau} = -\varepsilon_u Q^{\downarrow}(0) \left[\frac{e^{-\varepsilon_u \tau / \mu_0}}{\mu_0} + 2A_c e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_0} E_2(\varepsilon_u (\tau_{ub} - \tau)) \right]$$

con lo que el valor de frontera en cuestión se escribe:

$$B(0) = \frac{Q^{\downarrow}(0)}{2\pi} \left\{ 1 - A + \frac{\varepsilon_u}{2} \left[\frac{1}{\mu_0} + 2A_c e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_0} E_2(\varepsilon_u \tau_{ub}) \right] \right\} + \frac{R^{\downarrow}(0)}{\pi} - \frac{F(0)}{2\pi} \quad (28)$$

Derivando la ecuación (24) con respecto a τ se tiene:

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = -4\pi \left(\frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} - \frac{dB}{d\tau} \right)$$

Integrando la ecuación (6), después de multiplicarla por μ , con respecto al ángulo sólido y sobre una esfera, se obtiene:

$$\frac{4}{3}\pi \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} = -R$$

$$B(\tau) = B(0) - \frac{3F(0)}{4\pi}\tau + \frac{Q^\downarrow(0)}{4\pi} \left\{ \frac{\mu_\theta}{\varepsilon_u} \left(3 - \frac{\varepsilon_u^2}{\mu_\theta^2} \right) (1 - e^{-\varepsilon_u\tau/\mu_\theta}) + \right. \\ \left. + 2A_c e^{-\varepsilon_u\tau_{ub}/\mu_\theta} \left[\varepsilon_u [E_2(\varepsilon(\tau_{ub} - \tau)) - E_2(\varepsilon_u\tau_{ub})] - \frac{3}{\varepsilon_u} [E_4(\varepsilon_u(\tau_{ub} - \tau)) - E_4(\varepsilon_u\tau_{ub})] \right] \right\} \quad (30)$$

expresión general que permite establecer las formas analíticas de los perfiles de temperatura en la capa supranefélica.

10. Temperatura de las nubes y de la superficie planetaria

La temperatura del tope de las nubes es la misma que la temperatura efectiva de la capa nefélica. Puesto que se ha supuesto que ésta es térmicamente uniforme, la temperatura correspondiente no puede ser otra que la temperatura T_c (aproximar un perfil dentro de la nube puede convertirse en una extensión interesante del presente trabajo, pero no se realiza aquí). Esta temperatura no es una variable en un modelo del equilibrio radiativo, sino que está determinada por las condiciones impuestas al modelo. Para calcularla, a partir de las ecuaciones (25) y (26), se tiene:

$$T_c = \left(\frac{\mu_\theta Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A + (1 - A_c) e^{-\varepsilon_u\tau_{ub}/\mu_\theta} + \frac{3\mu_\theta}{2\varepsilon_u} \left(1 - e^{-\varepsilon_u\tau_{ub}/\mu_\theta} \right) - A_c e^{-\varepsilon_u\tau_{ub}/\mu_\theta} \frac{1}{\varepsilon_u} \left(1 - 3E_4(\varepsilon_u\tau_{ub}) \right) \right\}^{1/4} + \\ + R^\downarrow(0) - F(0) \left(1 + \frac{3}{4}\tau_{ub} \right) \quad (33)$$

¹⁰ En la contribución anterior (Pelkowski, 1998) se había establecido una relación parecida para la temperatura superficial que por error de imprenta contiene un factor que no debería estar presente, a saber $2\varepsilon(1 - E_2(\varepsilon\tau_b))$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$\frac{dB}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2R}{d\tau^2} + \frac{3}{4\pi} R \quad (29)$$

Integrando esta ecuación con respecto a τ , recordando que $R(\tau) = F(0) - Q(\tau)$ y la ecuación (11), se obtiene la función fuente:

$$\pi\mathcal{I}^+(\tau) = \frac{\pi}{2}(I^+ + I^-) - \frac{\pi}{2}(I^- - I^+) = \pi\mathfrak{S}(\tau) - \frac{R(\tau)}{2} \\ \pi\mathcal{I}^-(\tau) = \frac{\pi}{2}(I^+ + I^-) + \frac{\pi}{2}(I^- - I^+) = \pi\mathfrak{S}(\tau) + \frac{R(\tau)}{2}$$

de donde, en virtud de las ecuaciones. (24), (27) y de la condición $R(\tau) = F(0) - Q(\tau)$, se siguen las expresiones:

$$R^\downarrow(\tau) = \pi B(0) - \frac{R^\downarrow(0)}{4} - \frac{3}{4}F(0)\tau + \frac{3}{4}\int_0^\tau Q(t) dt - \frac{F(0)}{2} + \frac{Q(\tau)}{2} \\ R^\uparrow(\tau) = \pi B(0) - \frac{R^\downarrow(0)}{4} - \frac{3}{4}F(0)\tau + \frac{3}{4}\int_0^\tau Q(t) dt + \frac{F(0)}{2} - \frac{Q(\tau)}{2} \quad (31) \text{ y } (32)$$

Definiendo la temperatura T_c mediante la relación $R^\downarrow(\tau_{ub}) = \sigma T_c^4$ se puede derivar una ecuación para la temperatura efectiva de las nubes ¹⁰, aprovechando las ecuaciones (12) y (29):

en la ecuación (29) de dicho texto, y un corchete desplazado que no debe cobijar a los dos últimos términos en misma ecuación.

Sólo se consideran perfiles para los cuales $R^\downarrow(0) = F(0) = 0$ en la capa supranefélica, si se tiene en cuenta que la única contribución apreciable corresponde a un fondo de radiación cósmica de 2,7 K y una parte del espectro solar, que es despreciable en el balance. Para $\varepsilon_u \rightarrow 0$ se obtiene de la ecuación (33) la expresión:

$$T_c = \left\{ \left(\frac{\mu_\odot Q_0 (1 - A_c)}{\sigma} \right) \left(1 + \frac{3}{4} \tau_{ub} \right) - \left(\frac{\mu_\odot Q_0}{2\sigma} \right) \frac{r_o t_c^2}{1 - r_c r_o} \right\}^{1/4} \quad (34)$$

donde se ha usado

$$A \rightarrow A_c = r_c + \frac{r_o t_c^2}{1 - r_c r_o}$$

que corresponde al albedo de las dos capas inferiores en el modelo.

Este resultado refleja un efecto menor de invernadero: si aumenta la profundidad óptica de la capa supranefélica de la atmósfera (por aumento de la masa total de ciertos gases traza), la temperatura de la nube aumenta. Para calcular la temperatura superficial deberán tenerse en cuenta las condiciones de equilibrio en la capa infranefélica, distintas a las del conjunto. Más precisamente, la

condición de equilibrio radiativo local para esta capa se simplificará suponiendo que no hay fuentes de radiación solar ($\varepsilon_l \rightarrow 0$). Esta suposición implica que el flujo neto infrarrojo es una constante:

$$R(\tau_l = 0) = \text{constante}$$

y por tanto la integración de la ecuación (6), cuyo resultado es $\frac{dR}{d\tau} = -4\pi(\mathfrak{S} - B)$, implica $\mathfrak{S} = B$.

Igualmente, a partir de $\frac{4}{3}\pi \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau} = -R$, por integración simple se sigue:

$$B(\tau) = B(0) - \frac{3}{4\pi} \int_0^\tau R(\tau') d\tau' \quad (35)$$

Con la aproximación de dos corrientes y teniendo en cuenta que

$$R(\tau) = R(0) = R^\downarrow(0) - R^\uparrow(0) = R^\downarrow(\tau_b) - R^\uparrow(\tau_b) = R(\tau_b)$$

se puede plantear para la capa infranefélica la ecuación:

$$B(\tau_l) = B(\tau_l = 0) - \frac{3}{4\pi} \int_0^\tau R(\tau_l = 0) d\tau' = \mathfrak{S}(0) - \frac{3}{4\pi} \int_0^\tau [R^\downarrow(\tau_l = 0) - R^\uparrow(\tau_l = 0)] d\tau'$$

Teniendo en cuenta los valores de frontera:

$$R^\downarrow(\tau_l = 0) = \sigma T_c^4$$

$$R^\uparrow(\tau_l = 0) = \sigma T_{le}^4$$

y puesto que:

$$B(\tau_l = 0) = \frac{1}{\pi} \sigma T_l^4$$

$$\mathfrak{S}(\tau_l = 0) = \frac{1}{2} [I^+(0) + I^-(0)] = \frac{1}{2\pi} [R^\uparrow(\tau_l = 0) + R^\downarrow(\tau_l = 0)]$$

se obtiene una expresión que relaciona la temperatura de la capa infranefélica con su temperatura efectiva, con una pequeña corrección debida a las nubes:

$$T_l^4 = T_{lef}^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau_l \right) + T_c^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \tau_l \right) \quad (36)$$

Considerando ahora la frontera inferior de la capa en cuestión, con las condiciones:

$$R^\downarrow(\tau_b) = R + R^\uparrow(\tau_b) = R^\downarrow(0) - R^\uparrow(0) + R^\uparrow(\tau_b)$$

$$R^\uparrow(\tau_b) = \sigma T_s^4$$

$$B(\tau_b) = \frac{1}{\pi} \sigma T_l^4 = \mathfrak{S}(\tau_b) = \frac{1}{2} [I^+(\tau_b) + I^-(\tau_b)] = \frac{1}{2\pi} [R^\uparrow(\tau_b) + R^\downarrow(\tau_b)]$$

se obtiene para la temperatura de superficie:

$$T_s^4 = T_{lef}^4 \left(1 + \frac{3}{4} \tau_{lb} \right) - T_c^4 \frac{3}{4} \tau_{lb} \quad (37)$$

expresión que contiene el efecto invernadero y que se reduce a la relación conocida entre temperatura superficial y profundidad óptica en el caso $T_c = 0$ y $\varepsilon_u = 0$.

11. Ligaduras climatológicas

Aproximadamente un 20% de la radiación solar es absorbida por la atmósfera. Dado que el albedo es cercano al 30%, la superficie terrestre absorbe aproximadamente la mitad de la radiación solar incidente en la frontera superior de la atmósfera, sea γ_0 esta fracción. Se puede suponer

$$A_0 = 0.3 = \frac{Q_r}{Q^\downarrow(0)} = t_u r_c t_{ud} + \frac{r_o t_l t_{ld} t_c^2 t_u t_{ud}}{1 - r_c r_o t_{ld}^2} = t_u t_{ud} (r_c + \frac{r_o t_l t_{ld} t_c^2}{1 - r_c r_o t_{ld}^2}) = t_u t_{ud} A_c$$

De acuerdo con Pelkowski (1998) expresaremos este albedo en términos de A_c y las transmisividades así:

$$A_0 = 0.3 = 2A_c e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_\Theta} E_3(\varepsilon_u \tau_{ub})$$

Balance de energía en la superficie del planeta
(ecuación 12):

$$\gamma_0 = 0.5 = \frac{Q(\tau_{lb})}{Q^\downarrow(0)} = (1 - r_o) \frac{t_l t_c t_u}{1 - r_c r_o t_{ld}^2}$$

Este balance en el tope de las nubes, considerando que la capa supranefélica absorbe un 20% de radiación solar, corresponde también con un 50% de la radiación inicial:

$$\gamma_c = 0.5 = \frac{Q(\tau_{ub})}{Q^\downarrow(0)} = (1 - A_c) e^{-\varepsilon_u \tau_{ub} / \mu_\Theta}$$

Para simplificar, se ha supuesto que no se absorbe radiación solar en la capa infranefélica, esto es, $\varepsilon_l = 0$, o sus equivalentes $t_l = 1$, $t_{ld} = 1$. Los valores de solución de este sistema de ligaduras acompañan a los gráficos correspondientes (Figs. 5-6). Hemos utilizado una temperatura de superficie $T_s = 288K$, un albedo superficial $r_o = 0.15$; hemos calculado un albedo de la capa de nubes $r_c = 0.34$, junto con un valor de $\varepsilon_u \tau_{ub} = 0.047$, que resulta

(ver Fig.3), además, que cerca de un 3% de la radiación incidente en el tope de la atmósfera es absorbida antes de tocar la cima de las nubes y que éstas a su vez absorben el 17% restante. En un estado climatológico, correspondiente al equilibrio radiativo global actualmente observado (el cual reproduce la temperatura efectiva del planeta, $T_{ef} = 255 K$), en el cual $Q_0 = 1370 W/m^2$; $\mu_\Theta = 0.25$; $A_0 = 0.3$, valen entonces las relaciones o ligaduras siguientes:

Albedo global (ecuación (12)):

de solucionar las ecuaciones para γ_c y A_0 . La temperatura efectiva de la capa inferior y la temperatura de las nubes se calculan con las ecuaciones (34) y (37) suponiendo una profundidad óptica infrarroja supranefélica igual a 0.09 unidades (con $\varepsilon_u = 0.5$) y una profundidad óptica infrarroja infranefélica igual a 0.84 unidades (de la ecuación (37)). Estos dos son los parámetros del sistema. (Nótese que de acuerdo con la Fig.4, con $f=0.98$, puesto que queremos que la mayor parte del esparcimiento se produzca hacia delante, el valor obtenido del albedo de la capa de nubes corresponde a nubes de poca profundidad óptica).

12. Perfiles de temperatura para una atmósfera terrestre en equilibrio radiativo

Capa supranefélica

El problema ha sido ya resuelto por Pelkowski (1998) para una atmósfera sin nubes y con un albedo superficial r_o . Cambian las condiciones de frontera inferiores, dado que la superficie es ahora el tope de las nubes, y la forma de $\tau(z)$, que es ahora debida al ozono.

Como la atmósfera no recibe radiación de onda larga apreciable en su frontera superior, es decir, $R^\downarrow(0) = 0$, la condición de equilibrio radiativo global se expresa como $F(0) = 0$, que implica $Q(0) = \sigma T_{ef}^4$.

Con estas condiciones de frontera, y teniendo en cuenta la hipótesis del equilibrio termodinámico local, es decir, la relación $B(\tau) = \frac{1}{\pi} \sigma T^4$, de la ecuación (30) y suponiendo una profundidad óptica solar $\tau(z) = 4.810^{-3}(16z + z^2 + 128)e^{-0.125z}$, válida para el ozono

$$T_u(z) = \left(\frac{\mu_\theta Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A + \frac{\epsilon_u}{2} \left[\frac{1}{\mu_\theta} + 2A_c e^{-\epsilon_u \tau_{ub}/\mu_\theta} E_2(\epsilon_u \tau_{ub}) \right] + \frac{\mu_\theta}{2\epsilon_u} \left(1 - e^{-\epsilon_u \tau(z)/\mu_\theta} \right) \left(3 - \frac{\epsilon_u^2}{\mu_\theta^2} \right) + A_c e^{-\epsilon_u \tau_{ub}/\mu_\theta} \left[\epsilon_u \left[E_2(\epsilon_u (\tau_{ub} - \tau(z))) - E_2(\epsilon_u \tau_{ub}) \right] - \frac{3}{\epsilon_u} \left[E_4(\epsilon_u (\tau_{ub} - \tau(z))) - E_4(\epsilon_u \tau_{ub}) \right] \right] \right\}^{1/4} \quad (38)$$

La Fig. 5 muestra este perfil de temperatura, de acuerdo con los parámetros comentados en la anterior sección¹¹.

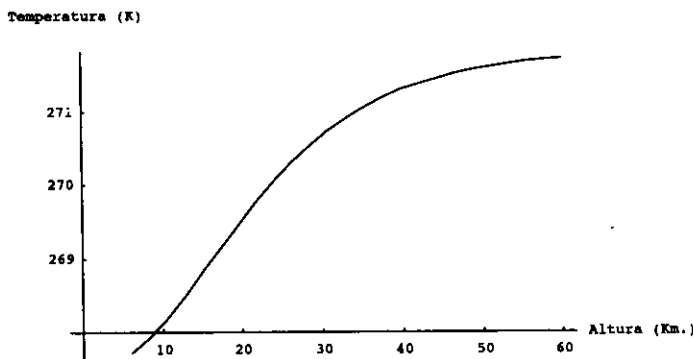


Figura 5. Distribución vertical de temperatura arriba de las nubes en una atmósfera terrestre en equilibrio radiativo, calculada para valores climatológicos de los parámetros y para $\tau(z) = 4.810^{-3}(16z + z^2 + 128)e^{-0.125z}$ (escala de altura = 8 km; $\epsilon_u = 0.5$; $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$; $A_c = 0.396$; $\tau_{ub} = 0.09$).

estratosférico (Grotjahn, 1991) se deduce la expresión analítica de la distribución vertical de temperatura atmosférica en función de la altura sobre el tope de las nubes ($z_c \leq z \leq H$):

La densidad del ozono utilizada en la representación anterior es de la forma $\rho_{O_3}(z) = Az^2 e^{-az}$, con $A = 0.0006 \text{ kg m}^{-3} \text{ km}^2$ y $a = 0.125 \text{ km}^{-1}$ (Grotjahn, 1991). De acuerdo con la definición de la profundidad óptica integrando por partes esta densidad con $k = 0.077 \left[\frac{\mu^2}{\text{kg}} \right]$ (correspondiente a $z_c = 6 \text{ km}$) se obtiene la relación empleada en la representación de la Fig. 5¹².

Si el albedo de las nubes fuese nulo se tendría:

$$T_u(z) = \left(\frac{\mu_\theta Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A - \frac{\epsilon_u}{2\mu_\theta} + \frac{\mu_\theta}{2\epsilon_u} \left(1 - e^{-\epsilon_u \tau(z)/\mu_\theta} \right) \left(3 - \frac{\epsilon_u^2}{\mu_\theta^2} \right) \right\}^{1/4}$$

En el límite $\epsilon_u \rightarrow 0$, esta última ecuación se reduce a:

$$T_u(z) = T_d \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau(z) \right)^{1/4}$$

¹¹ Puesto que la relación para el ozono es medida desde la superficie del planeta y puesto que en la ecuación (31) la altura $z' = 0$ es en realidad la altura atmosférica $z = 6 \text{ km}$, para efectos de la representación gráfica se ha usado la transformación $z' = z - 6$.

¹² Según Rodgers (1967) en lugar de μ se debería usar en el caso de la absorción debida al ozono la siguiente corrección $\rho_{O_3}(z) = Az^2 e^{-az} \sqrt{\frac{1224\mu^2 + 1}{35\mu}}$, expresión que no será utilizada aquí para simplificar.

Capa infranefélica

La condición de equilibrio radiativo local para la capa infranefélica debe tener en cuenta nuestra suposición de anular las fuentes de radiación solar ($\epsilon_l \rightarrow 0$). Esta suposición implica que el flujo neto infrarrojo es una constante:

$$R(\tau_l = 0) = \text{constante}$$

Como se ha mostrado ya en el apartado "Temperatura de las nubes y de la superficie", dada una temperatura

infranefélica efectiva mediante la ecuación $\sigma T_{lef}^4 = R^\uparrow(\tau_l = 0)$ entonces:

$$T_l^4(\tau) = T_{lef}^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau\right) + T_c^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\tau\right)$$

donde se puede suponer $\tau(z) = \tau_{lb} e^{-z/H_g}$, relación válida para el vapor de agua troposférico y para otros gases de efecto invernadero, especialmente el CO₂. Por tanto la expresión analítica de la distribución vertical de temperatura atmosférica en función de la altura debajo de las nubes es ($0 \leq z \leq z_c$):

$$T_l(z) = \left[T_{lef}^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau(z)\right) + T_c^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\tau(z)\right) \right]^{1/4} = \left[\frac{1}{2}(T_{lef}^4 + T_c^4) + \frac{3}{4}(T_{lef}^4 - T_c^4)\tau(z) \right]^{1/4} \tag{39}$$

La Fig. 7 muestra este perfil de temperatura, de acuerdo con los parámetros de la leyenda.

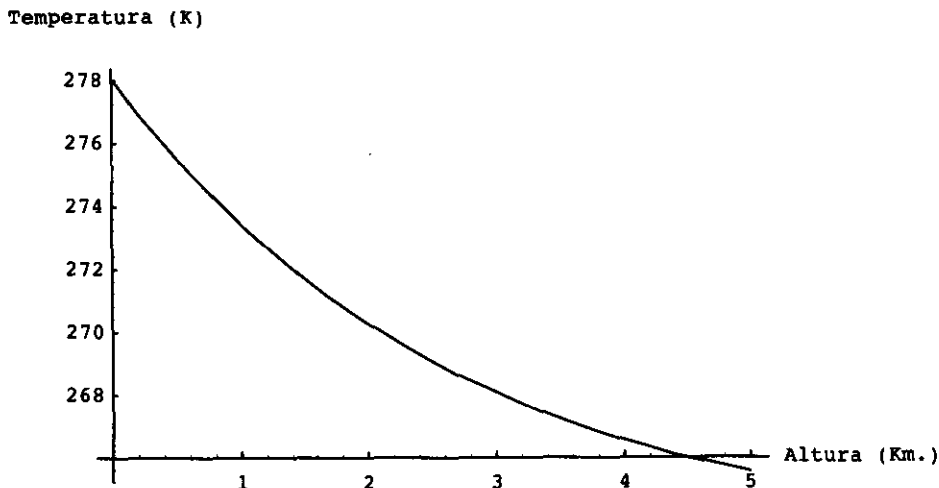


Figura 6. Distribución vertical de temperatura debajo de las nubes en una atmósfera terrestre en equilibrio radiativo, calculada para valores climatológicos de los parámetros y para $\tau(z) = \tau_{lb} e^{-z/H_g}$
 (Escala de altura $H_g = 2Km$; $T_{lef} = 275K$; $\tau_{lb} = 0.84$; $T_c = 250K$)

En relación con la Temperatura efectiva hay que señalar que si se va a utilizar el valor climatológico de la temperatura superficial como ligadura del modelo, no es posible elegir un valor independiente de aquélla, ya que, para respetar la ligadura de una capa infranefélica en equilibrio radiativo global, se debe cumplir la siguiente condición:

$$F_i(0) = 0 = Q_i(0) + R_i(0) \quad (40)$$

que es equivalente a:

$$T_{lef}^4 = T_c^4 + (1 - A_c) \tau_u \frac{Q^+(0)}{\sigma}$$

Para poder mantener el valor climatológico de la temperatura superficial se empleó un valor de $T_{lef} = 275K$.

$$T_i(z) = \left(\frac{\mu_\Theta Q_0}{2\sigma} \right)^{1/4} \left\{ 1 - A - \frac{\varepsilon_l}{2\mu_\Theta} + \frac{\mu_\Theta}{2\varepsilon_l} \left(1 - e^{-\varepsilon_l \tau_{lb} (e^{-z/H_s}) / \mu_\Theta} \right) \left(3 - \frac{\varepsilon_l^2}{\mu_\Theta^2} \right) \right\}^{1/4} \quad (41)$$

En el límite $T_c \rightarrow 0$ con $\varepsilon_l \rightarrow 0$, esta última ecuación se reduce a la expresión clásica (Goody & Yung, 1989):

$$T_i(z) = T_{lef} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau_{lb} e^{-z/H_s} \right)^{1/4}$$

Conclusiones

Las ecuaciones desarrolladas en este trabajo representan una extensión de trabajos anteriores que describen distintos aspectos de la teoría de la radiación aplicados a atmósferas planetarias, ilustrando de una manera elemental la física de los procesos radiativos de retroalimentación en términos de un conjunto dado de parámetros, a saber las profundidades ópticas encima y debajo de las nubes. Al incorporar la absorción de radiación solar encima de las nubes y por tanto el calentamiento estratosférico, una versión simplificada del esparcimiento atmosférico, así como los efectos de variaciones del albedo de las nubes, de la superficie y del planeta, se da cuenta de los cambios atmosféricos de transparencia, mostrando la interrelación de tres factores climáticos determinantes: gases de efecto invernadero, aerosoles y nubes; albedo superficial; y albedo global.

El modelo no pretende ser realista debido a las simplificaciones que contiene. Con un poco de trabajo adicional en ajustes de tipo convectivo cerca de la superficie, en la remoción de discontinuidades en las temperaturas de frontera (discontinuidades características del cualquier modelo de equilibrio radiativo), puede convertirse en una representación aceptable de los procesos radiativos en una atmósfera como la del planeta Tierra.

Obsérvese que estos dos valores no satisfacen la ecuación anterior; se sigue entonces que la capa y la superficie están recibiendo más energía de la que tendrían en equilibrio radiativo global, lo cual resultaría en un aumento de la temperatura superficial a menos que se postule un sumidero en la superficie. En otras palabras, para cumplir con el equilibrio radiativo de la capa infranefélica, habría que abandonar el valor climatológico para la temperatura de superficie. En tal caso esta es calculable mediante dicha ligadura y es igual a $T_s = 306K$.

La Fig.5, entonces, ha sido producida descartando la condición de equilibrio radiativo global para la capa infranefélica, ecuación (40).

Si el albedo superficial fuese nulo, como en los modelos hasta hoy publicados, se tendría de la ecuación

Referencias bibliográficas

- Anduckia J., & J. Pelkowski.** 2000. Algunos resultados de equilibrio radiativo en atmósferas con nubes. *Meteorol. Colomb.* 2:23-31. Bogotá, D.C. - Colombia.
- Goody, R.M. & Y.L. Yung.** 1989. *Atmospheric Radiation. Theoretical Basis.* Sec. ed., cap. 9. Oxford University Press, New York.
- Grotjahn, R.** 1991. *Global Atmospheric Circulations. Observations and Theories.* 224pp. Oxford University Press, New York.
- Hartmann, D.L.** 1994. *Global Physical Climatology.* Academic Press, San Diego.
- Houghton, J.T.** 1986. *The Physics of Atmospheres.* Segunda edición. Cambridge University Press, Cambridge.
- Liou, K.-N.** 1980. *An introduction to atmospheric radiation.* Academic Press, London.
- Pelkowski, J.** 1998. Atmósfera y océano en equilibrio radiativo, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 22 (82):53-67.
- Rodgers, C.D.** 1967. The use of emissivity in atmospheric radiation calculations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93:43-54.
- Salby, M. L.** 1996. *Fundamentals of Atmospheric Physics,* International Geophysics Series vol. 61, Academic Press, San Diego.