

DETERMINISMO, CAOS E IMPREDICTIBILIDAD

por

Diógenes Campos*

Resumen

Diógenes Campos: Determinismo, caos e impredictibilidad. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **26**(98) 85-103, 2002. ISSN 0370-3908.

Los modelos deterministas se usan en diferentes disciplinas. Estos modelos, en tiempo continuo o discreto, pueden exhibir comportamiento regular o caótico. Un sistema caótico tiene sensibilidad a las condiciones iniciales y por lo tanto su estado es impredecible en el futuro distante. Ilustro la impredictibilidad con el modelo de Lorenz y con el circuito de Chua. Uso la ionización de un átomo alcalino unidimensional, en presencia de un campo electromagnético, como un ejemplo de un sistema que presenta cierta clase de predictibilidad, no obstante que su comportamiento es caótico.

Palabras clave: Modelos en las ciencias, sistemas caóticos, impredictibilidad.

Abstract

Deterministic models are used in various disciplines. These continuous –or discrete– time models can exhibit regular or chaotic behavior. A chaotic system has sensitivity to initial conditions and, therefore, its state in the distant future is unpredictable. I illustrate this unpredictability with the Lorenz model and the Chua circuit. I use the ionization of a onedimensional alkali atom by microwave field as an example of a system that features a certain kind of predictability, nevertheless, its behavior is chaotic.

Key words: Models in the science, chaotic systems, unpredictability

* Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Física, Bogotá. E-mail: dcamposr@ciencias.unal.edu.co

1. Introducción

La física ha tenido un impacto decisivo en la ciencia y en la filosofía, afirmación que es especialmente válida en el caso de la mecánica clásica en sus diferentes formulaciones: newtoniana, lagrangiana y hamiltoniana. Desde sus inicios, los éxitos de la teoría hicieron que la mecánica se convirtiera en un paradigma que conllevó a la idea de *la mecanización de la naturaleza*, según la cual el Universo se concibe como un gigantesco dispositivo mecánico que, al igual que un reloj, funciona con perfecta sincronización y armonía. Esta imagen de la naturaleza desbordó los límites de la física y se convirtió en el modelo a seguir por otras ciencias.

Con el transcurrir del tiempo surgieron nuevos paradigmas. El enunciado *el mundo es estadístico* sintetizaba hacia fines del Siglo XIX (1900) el éxito de la unificación de la mecánica y la termodinámica originada en los trabajos de Boltzmann (1844-1906). Unos años después, hacia 1910, se decía que *el mundo es relativo*, como consecuencia del impacto que el trabajo de Einstein (1879-1955) de 1905 sobre la "Electrodinámica de los cuerpos en movimiento" había tenido sobre la manera de pensar y concebir el universo. Unos veinte años después, hacia 1930, *el mundo era cuántico* ya que unos pioneros de la física (en la que participaron Max Planck, Born, Schödinger, Heisenberg) cambiaron de manera significativa el entendimiento sobre el mundo, el cual dejó de regirse por las reglas del sentido común para gobernarse por misteriosas propiedades cuánticas. Hoy en día *el mundo es no lineal y complejo*, enunciado que refleja el impacto que tiene el reconocimiento de que el comportamiento caótico es la norma y no la excepción en la mayoría de los sistemas de las ciencias naturales y de otras disciplinas.

Con excepción del último, los paradigmas citados relegaron la mecánica a un segundo plano, teoría que se consideró como una ciencia cerrada y culminada que difícilmente podía aportar nuevo conocimiento. Hoy en día se sabe que la mayoría de los sistemas mecánicos son no lineales y que lo mismo ocurre con sistemas de otras áreas del conocimiento, como las ciencias naturales y la ingeniería. Es paradójico que la mecánica clásica resurge en virtud del comportamiento no lineal de los sistemas que estudia, en contraste con la "mecánica cuántica" (otro pilar de la física contemporánea) que describe la evolución temporal de los sistemas cuánticos con base en la ecuación de Schrödinger que es una ecuación diferencial lineal. En este punto es interesante anotar que la teoría cuántica incluye a la mecánica clásica como un caso límite bajo condiciones apropiadas, lo cual conlleva el reto de entender el principio de correspondencia en el caso de los sistemas clásicamente caóticos.

En la próxima sección se hace una breve presentación de la historia de la mecánica clásica en los últimos 300 años y de sus puntos de contacto con el surgimiento de la dinámica no lineal. Las demás secciones incluyen conceptos y ejemplos de sistemas deterministas no lineales con comportamiento caótico, propiedades que conllevan la impredecibilidad de largo plazo.

2. Elementos históricos de la mecánica clásica y de los sistemas dinámicos

Un *sistema dinámico* es un sistema mecánico u otro sistema más general (biológico, ecológico, químico, ingeniería, ...) cuya evolución temporal se describe mediante un conjunto de reglas matemáticas *deterministas*, bien definidas, que establecen la manera como el estado del sistema cambia con el tiempo.

La historia y el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos ha estado ligada de manera estrecha con la evolución de la mecánica celeste [1]. Entre los pioneros tenemos a Nicholas Copernicus (1574-1642), Galileo Galilei (1564-1642) y Johannes Kepler (1571-1630) quienes, en mayor o menor grado y con mayor o menor prudencia, se enfrentaron a los "pares" de la época que defendían un Universo geocéntrico, mágico, místico y teológico.

Isaac Newton (1642-1727) escribió los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, publicados en 1687, trabajo en el cual establece la ley de gravitación universal según la cual todos los objetos en el universo se atraen unos a otros con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. En la época de Newton tal enunciado era extraño y difícil de comprender. Esa afirmación, que cambió la manera de entender el universo, se reconoce como uno de los descubrimientos más importantes en la historia de la ciencia. En esencia, Newton solucionó el problema no perturbado de dos cuerpos.

La ley de gravitación incrementó el poder de predicción del hombre, en particular el conocimiento de las órbitas de los planetas. Halley (1656-1742) observó en 1682 el cometa que lleva su nombre, calculó su órbita y predijo que regresaría en 1758, lo cual se confirmó y se convirtió así en uno de los primeros grandes éxitos de la teoría de Newton.

Otro de los grandes éxitos de Newton fue la invención del cálculo, al cual contribuyó posteriormente de manera significativa el matemático Leonhard Euler (1707-1783). Mientras era Director de la Academia de Ciencias de Berlín, los trabajos de Joseph Louis Lagrange

(1736-1813) le llamaron profundamente la atención y en 1766 lo recomendó como su reemplazo en la Academia de Ciencias.

Lagrange continuó los trabajos de Euler usando métodos analíticos en mecánica. Una de sus grandes contribuciones es la introducción de coordenadas generalizadas, ya que hasta ese entonces y según su naturaleza cada problema tenía que ser resuelto en un conjunto particular de coordenadas (polares, cilíndricas, esféricas). El libro "Mecánica Analítica" publicado en 1788 resume sus contribuciones y se caracteriza además por no incluir ningún diagrama, a diferencia de la mayoría de los libros anteriores de mecánica.

El desarrollo de la mecánica continúa con Pierre Simon Laplace (1749-1827) quien en su obra "Mecánica Celeste" reúne en una teoría unificada los trabajos hasta entonces dispersos de Newton, Halley, D'Álambert, Euler, entre otros, sobre las consecuencias del principio de gravitación universal. La intensa relación entre *determinismo y predictibilidad* alcanza su apogeo cuando Laplace afirma (citado en [2]): "Debemos pues considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que debe seguirlo. Una inteligencia que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen y que, por otra parte, fuera suficientemente amplia como para someter esos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y la de los átomos más ligeros; nada le sería incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante ella".

William Rowan Hamilton (1805-1865) reformula la mecánica clásica derivada de la teoría de Lagrange en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones de Hamilton), en el cual las coordenadas generalizadas y los impulsos generalizados son las cantidades fundamentales que facilitan la descripción de la dinámica de los sistemas mecánicos en un espacio de estados (espacio de fase); el hecho de que en ese espacio las trayectorias de los sistemas autónomos no se crucen hace de la mecánica hamiltoniana una teoría de gran belleza conceptual y aplicabilidad.

En la primera parte del Siglo XVIII el determinismo y la predictibilidad estaban fuertemente arraigados en la ciencia. Dado un sistema mecánico formado por un conjunto de N partículas con fuerzas de interacción conocidas, y dadas las condiciones iniciales de posición y velocidad, se pensaba que con el uso de las ecuaciones diferenciales y en virtud de la unicidad de su solución se podía determinar la posición y velocidad de las partículas para cualquier instante de tiempo. De acuerdo con el clima intelectual de la época se pensaba que el Uni-

verso era un sistema gigante cuya dinámica se podía resolver completamente; ya que alguien que tuviera la motivación, la inteligencia y la tenacidad suficiente, tarde o temprano tendría éxito en solucionar el problema de N -cuerpos. Científicos como Laplace, Lagrange, Simeón Denis Poisson (1781-1840), Spiru Haretu (1851-1912), habían intentado analizar la estabilidad del sistema solar estudiando el problema de N cuerpos, pero no tenían resultados concluyentes.

En la práctica todo funcionaba a las mil maravillas para uno o dos cuerpos, incluyendo el caso hipotético en que el sol y la tierra fueran los únicos objetos en el sistema solar. Pero la pesadilla en la mecánica comenzaba cuando se trataban sistemas con tres o más partículas, como es el caso del sistema sol-tierra-luna. Haretu mostró que los métodos que se usaban estaban condenados al fracaso y, en consecuencia, el desarrollo de nuevos métodos era una necesidad sentida, urgente e importante en la época.

Por otro lado, los desarrollos de Ludwig Boltzmann (1844-1906) sobre termodinámica estadística permitieron comprender que la mecánica y la visión mecanicista de la naturaleza tenían límites y que era necesario incorporar en la teoría, en el caso de sistemas de muchas partículas, un tratamiento estadístico de la información y el uso de funciones de distribución.

El rey Oscar II de Suecia y Noruega abre una convocatoria internacional e informa que otorgará un premio y una medalla a la primera persona que obtenga una solución al problema general de N cuerpos. La convocatoria se publicó en alemán y en francés en el volumen 7 (1885-86) de la revista *Acta Mathematica* y una traducción al inglés en la revista *Nature* de julio de 1885, 302-303, al igual que en otros idiomas [3].

La pregunta, que fue propuesta por Weierstrass (1815-1897), se enuncia así: "Para un sistema arbitrario de masas puntuales que se atraen unas a otras de acuerdo a las leyes de Newton y bajo la suposición de que nunca chocan dos puntos, encontrar las coordenadas de las partículas individuales para todos los tiempos como la suma de una serie uniformemente convergente construida con funciones conocidas".

La pregunta está conectada con la estabilidad o inestabilidad del sistema solar, en particular de un sistema de tres cuerpos considerados como objetos puntuales que se atraen el uno a otro de acuerdo con la ley de gravitación de Newton. En el caso general (tres estrellas, tres planetas, sol-tierra-luna) no hay restricción sobre las masas o las condiciones iniciales; pero este problema es muy difícil y es necesario conformarse con el estudio del problema restringido en el cual una partícula es mucho menos masiva que las otras dos.

Entra en escena Henri Poincaré (1854-1912) quien había desarrollado nuevas técnicas para estudiar ecuaciones diferenciales, las cuales le podían dar la fundamentación necesaria para estudiar el problema motivo de la convocatoria. Después de más de dos años de trabajo comienzan a aparecer los primeros resultados limitados al caso de 3 cuerpos. Poincaré encuentra que *no existe* un número suficiente de constantes de movimiento que permitan reducir el problema a uno soluble de menor dimensión. Este resultado contradice la filosofía predominante por la época, según la cual los sistemas mecánicos tienen, en principio, un número suficiente de constantes globales de movimiento para permitir la solución de las ecuaciones de movimiento por cuadratura. Poincaré realmente no respondió la pregunta formulada en el concurso pero dió razones para demostrar que la serie que se buscaba no existía (no era convergente), en oposición a todo lo que esperaba en la época.

El 20 de enero de 1889 se anunció el resultado oficial de la convocatoria, declarando a Henri Poincaré como ganador. Se inicia la preparación del volumen de *Acta Mathematica* en que se publicarían las memorias, con un costo de unas 3500 coronas. En el mismo año Poincaré descubre que tenía un serio error en una parte del trabajo, informa sobre ello, y acepta pagar los costos que conlleva suprimir la publicación de la revista, costos que sobrepasan en unas 1000 coronas el monto del premio que había recibido. Poincaré corrige el error, prepara una nueva versión del trabajo, el cual se publica finalmente en el volumen 13 de *Acta Mathematica* de noviembre de 1890.

Poincaré usa con gran eficacia una aproximación geométrica en el espacio de fase. Por ejemplo, en lugar de examinar completamente la órbita de un planeta (una partícula), mira las veces que el planeta pasa a través de una superficie perpendicular a la órbita, introduciendo así lo que se conoce hoy en día como sección de Poincaré.

Los resultados de los estudios de Poincaré sobre la estabilidad del sistema solar fueron sorprendentes. En particular, encontró que bajo ciertas condiciones se presenta un fenómeno conocido con el nombre de resonancias, el cual da origen a un movimiento inesperado, altamente irregular (caótico, en lenguaje moderno), caracterizado por una fuerte *sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales*. En sus propias palabras, en un trabajo de 1908 titulado *Ciencia y método*, escribe: "Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos prever, y entonces decimos que dicho efecto se debe al azar" (ver [4]). La descripción determinista del mundo (leyes de Newton) daba lugar de manera natural al azar, lo cual implicaba la impredecibilidad de largo plazo y la necesidad de una descripción probabilística. En otras palabras, el problema de la sensibilidad a cambios en las

condiciones iniciales convierten la predicción del futuro distante en algo imposible, ya que una pequeña modificación de la condición inicial conduce a grandes cambios en la evolución posterior del sistema.

Es de anotar que con anterioridad a Poincaré, el matemático Jacques Hadamard (1865-1963), en un artículo de 1898, había incluido de forma explícita la observación de que si existe cualquier error en la condición inicial, entonces el comportamiento a largo plazo del sistema no puede predecirse (ver [4]). Igualmente, Pierre Duhem en un libro de 1906 sobre filosofía de la ciencia, en una sección titulada "Ejemplo de deducción matemática que nunca debe utilizarse" y refiriéndose al billar de Hadamard, escribe: "Una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos prever, y entonces decimos que dicho efecto se debe al azar".

Poincaré descubrió las primeras manifestaciones del comportamiento caótico de ciertos sistemas, el cual muestra que determinismo no implica predictibilidad de largo plazo, esto es, no conlleva el poder hacer predicciones precisas para el futuro distante.

Los descubrimientos de Poincaré son el fundamento de la teoría moderna de sistemas dinámicos. Pero estas ideas permanecieron inactivas durante muchos años hasta que Kolmogorov (1954), Arnold (1963) y Moser (1962), en trabajos independientes, hicieron nuevos desarrollos que conllevan al teorema KAM, pieza fundamental dentro de la investigación moderna de sistemas mecánicos con comportamiento caótico [5, 6]. Estos autores contestaron en parte la pregunta del concurso en que participó Poincaré, pregunta que buscaba determinar si un sistema integrable, con un número arbitrario de grados de libertad, sobrevive a pequeñas perturbaciones. El teorema establece que la respuesta es positiva y que la invariancia con respecto a pequeñas perturbaciones (estabilidad) depende de las frecuencias naturales del sistema $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_f)$ y de su interrelación; si las frecuencias llegan a ser linealmente dependientes $\sum_{k=1}^f n_k \omega_k = 0$, donde n_k son enteros, los toroides racionales (resonantes) dejan de ser estables ante una pequeña perturbación externa y se presenta el fenómeno de resonancia que es responsable por el surgimiento del movimiento caótico.

En 1963 Edward Lorenz [7] estudia el proceso de conducción de calor en la atmósfera y después de un conjunto de aproximaciones a las ecuaciones de la hidrodinámica propone, por primera vez, un sistema de tres ecuaciones diferenciales que es autónomo y exhibe comportamiento caótico. Lorenz emplea modestos computadores de la época y resuelve por integración numérica el sistema de ecuaciones, realizando aproximadamente una iteración cada segundo. Después de descartar ex-

plicaciones alternativas, asignables a mala programación o mal funcionamiento del computador, encuentra que el sistema dinámico estudiado presenta sensibilidad a condiciones iniciales (un requisito para que el sistema sea caótico). Este trabajo es paradigmático y constituye el punto de partida para la aplicación de los computadores al estudio de los sistemas caóticos.

La teoría de los sistemas dinámicos se ha desarrollado en buena medida en el contexto de la mecánica celeste, comenzando con la noción de ecuación diferencial. Sin embargo, la mecánica celeste es de carácter observacional y no es experimental, de tal manera que no constituye en sí un marco de referencia apropiado para someter a prueba ideas y conceptos de la ciencia no lineal.

Por lo anterior, un gran adelanto conceptual tuvo lugar unos 20 años después de la contribución de Lorenz, cuando Leon O. Chua descubre un objeto físico real que se construye posteriormente en 1985 [8], el cual es capaz de reproducir el comportamiento caótico predicho por la teoría. Desde entonces el circuito de Chua y sus generalizaciones ha sido ampliamente estudiados y son un paradigma para diferentes tipos de comportamientos dinámicos, en especial los de naturaleza caótica [9].

Hoy en día sabemos que el comportamiento caótico es común a diferentes disciplinas, en problemas descritos por sistemas deterministas no lineales. La imagen de un Universo mecanicista y predecible ha terminado. Tenemos la visión de un futuro distante incierto, ya que pequeñas modificaciones en las actuales condiciones iniciales pueden generar grandes cambios en el comportamiento futuro de un sistema determinista. El paradigma predominante en esta época es el de un mundo no lineal, caótico y complejo.

En las siguientes secciones profundizaremos en estos conceptos y mostraremos ejemplos de sistemas dinámicos con comportamiento caótico, ejemplos que se seleccionarán de diferentes disciplinas.

3. Modelos en la ciencia y determinismo

En el espíritu de lo enunciado por von Neumann [10], entendemos por *modelo* una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe de manera simplificada el sistema objeto de estudio. Este término tiene significados que dependen del contexto en que se use pero en el presente trabajo se acepta que para la construcción de un *modelo dinámico* se requieren los siguientes elementos:

1. Introducir una variable independiente denominada "*tiempo*" (t), el cual puede ser discreto o continuo, según la naturaleza del sistema en estudio.
2. Identificar los *parámetros* que caracterizan el sistema y su relación con el *resto del universo o medio ambiente* del sistema, $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\sigma)$.
3. Seleccionar las variables dependientes $x := (x_1, x_2, \dots, x_g)$ que identifican en cada instante de tiempo t el *estado del sistema*. En concordancia introducir el *espacio de estados*, llamado también *espacio de fase*, el cual es una variedad localmente equivalente a un espacio euclidiano \mathbb{R}^g que se utiliza para la representación del comportamiento dinámico del sistema.
4. Deducir o construir las *ecuaciones de movimiento* que determinan la manera como el estado del sistema se transforma con el tiempo.

Tal como se anotó en la sección anterior, la teoría de los *sistemas mecánicos* ha tenido una larga evolución y existe hoy en día un marco de referencia conceptual bien establecido agrupado en la mecánica clásica (mecánica newtoniana, lagrangiana y hamiltoniana). Las leyes que gobiernan la evolución de estos sistemas son conocidas (ecuaciones de Newton, Lagrange, Hamilton) y permiten reducir el número de suposiciones y aproximaciones en el proceso de modelamiento. Como consecuencia, los sistemas mecánicos son prototipos naturales que sirven de guía para la construcción de modelos en otras áreas de la ciencia.

La *teoría de circuitos eléctricos* es posiblemente un prototipo alternativo en el proceso de modelamiento. Esta teoría comenzó en marzo 20 de 1800 cuando el físico italiano Alessandro Volta (1745-1827) anunció su invención de la batería eléctrica, magnífico invento que permitió la producción de corriente eléctrica y dió al mundo uno de sus grandes beneficios. Un circuito eléctrico o electrónico se modela como un dispositivo que consta de dos o más elementos (resistencias, inductancias, condensadores) conectados por "conductores perfectos" que tienen resistencia nula y permiten el flujo libre de las corrientes eléctricas. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los circuitos se determinan mediante las leyes de (Gustav) Kirchhoff (1824-1887): (a) la suma de las corrientes que entran a un nodo (punto de conexión de dos o más elementos del circuito) es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo; (b) la suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es cero.

En otras disciplinas la construcción de modelos no es tarea fácil. Por un lado, se desconocen las leyes generales

que regulan la evolución del estado del sistema con el tiempo; por otro, la matematización de la descripción es en sí una barrera. No obstante, hay avances importantes en disciplinas como la ecología, la biología, la medicina.

En un sistema dinámico de tiempo continuo, la evolución del estado se describe por un conjunto bien comportado de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mu), \quad (1)$$

donde \mathbf{x} representa el *estado* del sistema y \mathbf{F} las fuerzas o causas que generan el cambio de estado; tanto \mathbf{x} como \mathbf{F} son vectores columna con g componentes.

El *teorema de existencia y unicidad* de una solución al sistema de ecuaciones diferenciales (1) garantiza que, bajo condiciones apropiadas, existe una solución única

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t; \mu), \quad (2)$$

que permite determinar el estado $\mathbf{x}(t)$ en el instante de tiempo t , a partir del estado inicial $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ que corresponde al instante inicial t_0 .

El *sistema dinámico* (1) es *determinista* pues la existencia de la solución (2) permite determinar en principio el estado del sistema en cualquier tiempo futuro $t > t_0$, o en cualquier tiempo pasado $t < t_0$, a partir del conocimiento del estado inicial \mathbf{x}_0 .

El demonio de Laplace. En la afirmación anterior está implícita la *suposición* de que existe un ser (demonio de Laplace) que tiene las siguientes habilidades:

- El demonio puede medir o conocer el estado inicial \mathbf{x}_0 del sistema con infinita precisión.
- El demonio tiene la capacidad de determinar el pasado y el futuro pues puede aplicar con “infinita precisión” las reglas que transformación del estado del sistema; esto es, dispone de un computador que maneja las operaciones con un número infinito de cifras significativas.

Esto significa que el demonio de Laplace puede calcular el estado de un sistema de N partículas para cualquier instante futuro, con el grado de precisión deseado.

Modelos en tiempo discreto. Para establecer la relación con las cascadas (“maps”), y a título de ejemplo, vamos a considerar un sistema mecánico con hamiltoniano

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - k) \quad (3)$$

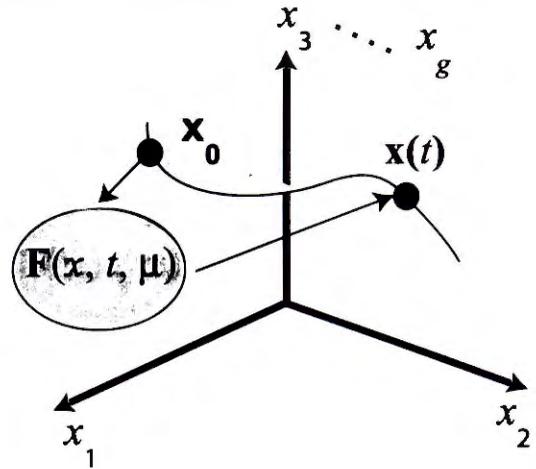


FIGURA 1. El sistema dinámico (1) se puede visualizar como una “caja negra” que recibe un estado inicial $x_0 = x(t_0)$ y genera el estado $x(t)$, el cual con el transcurrir del tiempo describe una trayectoria en el espacio de fase g dimensional del sistema.

que describe una partícula que es forzada de manera periódica en forma impulsiva (“kick”) con un potencial de forzamiento $V(q)$; suponemos que $T > 0$ es el período con que se aplica el forzamiento. Las variables $x := (q, p)$ designan el estado del sistema, donde q y p son las coordenadas y los impulsos generalizados de la partícula, respectivamente.

Las ecuaciones de Hamilton se pueden integrar empleando el hecho de que el forzamiento sólo aparece en los instantes $t = nT$ y que la partícula se mueve libremente en cualquier intervalo de tiempo $nT < t < (n + 1)T$. Al designar por q_n y p_n los valores de $q(t)$ y $p(t)$ justo antes de $t = nT$, y por q_{n+1} y p_{n+1} los valores justo antes de $t = (n + 1)T$, se encuentra que las ecuaciones de Hamilton generan las cascadas ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + \frac{T}{m} p_{n+1} \\ p_{n+1} &= p_n - T V^{(1)}(q_n), \end{aligned} \quad (4)$$

donde $V^{(1)}(q_{n+1})$ es la derivada de la energía potencial con respecto a q , evaluada en la posición q_n . La primera ecuación describe el cambio de la posición de una partícula que viaja con velocidad constante, p_{n+1}/m , mientras que la segunda representa el cambio en el impulso que se origina a causa de la fuerza impulsiva que actúa en el instante $t = nT$.

El sistema anterior de ecuaciones, que está definido en tiempo discreto, constituye también un *sistema determinista* pues el conocimiento de un estado inicial $x_0 := (q_0, p_0)$ permite conocer el estado en cualquier otro instante $t = nT$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. El impulso p_{n+1} permanece constante en el intervalo $nT < t < (n+1)T$, pues la partícula viaja libremente durante ese lapso.

Los modelos en las ciencias se introducen con el propósito de describir fenómenos observados, entender procesos y mecanismos que ocurren en el mundo real, construir teoría como elemento unificador en un campo dado, comprender el pasado y hacer predicciones con relación al comportamiento futuro del sistema objeto de estudio.

El mundo real es excesivamente complejo y hay una variedad de fenómenos involucrados, de tal manera que la construcción de modelos conlleva un conjunto de suposiciones y simplificaciones, pero este proceso es parte fundamental de la creación de conocimiento científico.

Dado un fenómeno o “misterio” a estudiar, el primer paso consiste en construir un modelo que sea lo más sencillo posible pero capaz de explicar el fenómeno que se desconoce. El éxito del modelo depende no sólo de su relación con la realidad sino también de su aplicabilidad. En principio se pueden incorporar cantidad de detalles para modelar un fenómeno pero esto puede convertirlo en inútil si oscurece o apantalla los aspectos importantes. En principio a medida que el modelo se hace más complejo por incorporar datos y variables adicionales, él se hace a su vez más difícil de entender y analizar.

Esto es, un modelo es útil y eficaz si representa la realidad de manera esquemática, conectando las cantidades fundamentales por medio de leyes que adoptan la forma de ecuaciones matemáticas (ecuaciones algebraicas, diferenciales, parciales, estocásticas, etc). La estructura y solución de las ecuaciones proporciona información cuantitativa y cualitativa sobre el sistema objeto de estudio y sus propiedades.

Los modelos no se deben confundir con el mundo real ya que sólo representan una “idealización” y una “descripción simplificada” de una parte aislada de la realidad [11]. Sin embargo, un buen modelo debe permitir extraer información importante del mundo real, como lo ilustra el caso del oscilador de Chua que es un sistema descrito en la teoría pero construido en el laboratorio.

4. Determinismo e impredictibilidad

El *determinismo* es una propiedad de los sistemas dinámicos tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto. En ambos casos los sistemas se caracterizan por la existencia de reglas matemáticas bien definidas que es-

tablecen la manera como se transforma el estado del sistema en el transcurso del tiempo, reglas que permiten determinar cualquier estado futuro en términos del conocimiento del estado presente.

El demonio (suposición) de Laplace rigió los destinos de la ciencia (en especial de la mecánica) y de la filosofía durante más de dos siglos. Hoy en día sabemos que el demonio de Laplace, capaz de predecir el futuro con infinita precisión, es una idealización extrema que contradice lo que es posible para los seres humanos en el mundo de las ciencias naturales y demás ciencias afines.

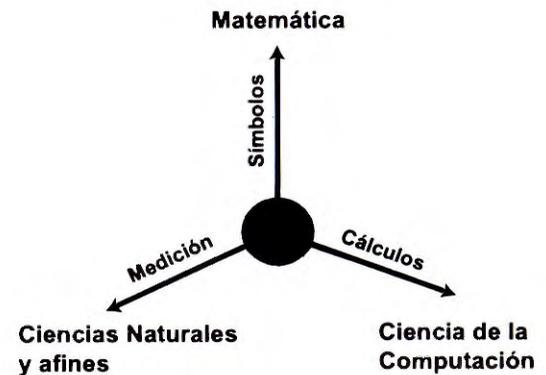


FIGURA 2. Tres Mundos interrelacionados: Matemática, Ciencias Naturales, Computación.

Sin embargo, en aras de la discusión, podemos suponer que el demonio de Laplace puede existir en el *Mundo de la Matemática* de sistemas deterministas, en la medida en que se limite a trabajar con símbolos, definiciones y ecuaciones, cuyas propiedades y reglas de transformación se cumplen de manera rigurosa y con infinita precisión. Por ejemplo, dada la cascada logística $x_{n+1} = r x_n(1 - x_n)$ y el estado inicial x_0 , el demonio puede predecir de manera simbólica los estados $x_1 = r x_0(1 - x_0)$, $x_2 = r x_1(1 - x_1)$, \dots , $x_{1000001} = r x_{1000000}(1 - x_{1000000})$ y así sucesivamente. ¿Pero que ocurre si x_0 es igual a $\pi/4$ o toma el valor $\sqrt{2}$?

La figura 2 ilustra la necesidad de diferenciar tres Mundos cuyos dominios no se superponen completamente: el de la Matemática, el de las Ciencias Naturales y afines, y el de la Computación.

En el campo de las ciencias naturales y ciencias afines es necesario hacer *mediciones de los observables*, ya que el experimento es uno de los pilares dentro del método científico. Pero en la práctica es imposible tener sólo instrumentos de medida que trabajen con precisión

infinita. Por otro lado, hay razones de primeros principios que hacen imposible la medición simultánea de ciertas magnitudes físicas que se denominan canónicamente conjugadas; las variables de posición e impulso sirven de ejemplo ya que deben cumplir el principio de incertidumbre de Heisenberg. Como consecuencia de la precisión finita de los procesos de medición es imposible determinar con "precisión matemática" el estado inicial $x_0 = x(t_0)$ de un sistema dinámico y, en general, el estado del sistema en cualquier instante de tiempo t .

Por otro lado, el desarrollo de los computadores ha permitido al hombre de ciencia ampliar sus posibilidades. Mediante la *simulación* puede construir *mundos artificiales* que obedecen con alta precisión las leyes de la naturaleza: sistemas sin fricción; átomos unidimensionales, bidimensionales o multidimensionales; estructuras microscópicas perfectas. De esta manera, a través de la simulación se gana conocimiento por imaginación (en crear el modelo), al igual que por razonamiento y análisis de los datos resultantes.

En el mundo de la simulación (o computación) no siempre se pueden realizar los enunciados que vienen de la matemática ya que no existen computadores (y es imposible construirlos) que calculen con infinito número de cifras significativas. Además, e independiente del grado de desarrollo técnico, las contribuciones de Gödel de 1931 indican que dentro de cualquier rama formal de la matemática siempre existen algunas proposiciones que no se pueden probar que sean verdaderas o sean falsas (la verdad de tales enunciados es indecible).

Para ilustrar lo expresado en los párrafos anteriores consideremos el número π . Este ente existe en el mundo de la matemática como un ente simbólico que tiene cierto significado y propiedades. Sin embargo, en el mundo de las ciencias naturales su medición requiere la determinación, por ejemplo, del área de un círculo de radio uno, operación que sólo se puede hacer de manera aproximada. En el mundo de la computación el número π se ha calculado hoy en día hasta con unas 500 cifras decimales, pero aún así es sólo una aproximación.

5. La no linealidad de los sistemas dinámicos

Considerar un sistema dinámico determinista en tiempo continuo (TC) o en tiempo discreto (TD),

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mu), \quad \text{TC}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n; \mu), \quad \text{TD}. \quad (6)$$

Los sistemas dinámicos se clasifican como *lineales* o *no lineales* según la estructura de las ecuaciones de movimiento. En estas expresiones el *estado del sistema* se describe por el conjunto de variable $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_g)$ en TC, y $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(g)})$ en TD. En este último caso x_n se refiere al estado en el instante de tiempo t_n .

Por definición, la función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mu)$ es lineal si cumple las siguientes propiedades:

$$\mathbf{F}(a \mathbf{x}, t; \mu) = a \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mu), \quad (7)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t; \mu) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mu) + \mathbf{F}(\mathbf{y}, t; \mu), \quad (8)$$

para cualquier número real o complejo a , y estados arbitrarios \mathbf{x} y \mathbf{y} . La forma general de un sistema dinámico lineal en tiempo continuo (TCL) es:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}(t; \mu) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t; \mu), \quad \text{TCL}. \quad (9)$$

El principal principio de la descripción de la naturaleza mediante sistemas lineales es el *principio de superposición*, el cual establece que: si $x(t)$ y $y(t)$ son dos soluciones linealmente independientes entre sí, de las leyes de movimiento (9), entonces $a x(t) + b y(t)$ es también una solución (solución general), para números reales o complejos arbitrarios a y b . Muchos sistemas físicos satisfacen el principio de superposición, por ejemplo: los fenómenos electromagnéticos (ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo) y los fenómenos cuánticos descritos por la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica.

El comportamiento no lineal de ciertos sistemas es un hecho conocido que se remonta a los orígenes mismos de la mecánica. Es el caso de la ley de gravitación universal de Newton o la ecuación que describe el movimiento de un péndulo de longitud ℓ en el campo gravitacional g de la tierra,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \quad (10)$$

donde θ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical. La no linealidad, que se manifiesta en la presencia de $\sin \theta$, hace que esta ecuación sea difícil de solucionar. El estudio de este sistema se limitó en buena medida a las pequeñas oscilaciones, esto es, a ángulos para los cuales se cumple la aproximación $\sin \theta \approx \theta$, la cual conduce a un movimiento armónico de periodo $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$.

El ejemplo descrito sirve para ilustrar el hecho de que durante un par de siglos las ciencias físicas se orientaron de manera predominante hacia el estudio de sistemas lineales, en buena medida debido a la existencia o al desarrollo de métodos analíticos apropiados para estos sistemas. Los sistemas no lineales eran conocidos pero esta propiedad constituía en sí una molestia. Dentro

del *paradigma lineal* la ciencia estaba llamada a buscar relaciones y dependencias simples que permitieran explicar los fenómenos, al igual que buscar belleza, orden y predictibilidad.

La situación comienza a cambiar con la invención del computador (década de 1950) y con su uso en la ciencia. Con este instrumento Lorenz descubre un comportamiento dinámico extraño en un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que había propuesto para modelar ciertos procesos atmosféricos:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - b x_3.\end{aligned}\quad (11)$$

En este modelo las *variables de estado* (x_1, x_2, x_3) no son coordenadas espaciales sino magnitudes físicas que son proporcionales a la intensidad del movimiento de convección en la atmósfera, a la variación horizontal y a la variación vertical de la temperatura. La no linealidad se manifiesta en la presencia de los términos $x_1 x_3$ y $x_1 x_2$ que intervienen en las ecuaciones.

Los sistemas lineales son una excepción y la mayoría de los sistemas naturales son no lineales. La no linealidad destruye el principio de superposición y los efectos dejan de ser proporcionales a las causas. Por ejemplo, pequeños desplazamientos de nieve pueden generar una avalancha. En un ejemplo de Maxwell, el desplazamiento de los “puntos” de un tren que se descarrila y choca contra otro puede causar una tragedia.

Durante las últimas dos o tres décadas la no linealidad (o teoría del caos) se ha convertido en un paradigma de la ciencia, el cual no es exclusivo de la física, ya que la no linealidad aparece en diversas disciplinas: en la acústica, en los instrumentos musicales; en óptica, en especial en la dinámica no lineal del laser; en la hidrodinámica, incluyendo el problema de la turbulencia y el proceso de conducción de calor tipo Rayleigh-Bénard; en la ingeniería, por ejemplo en máquinas y estructuras vibrantes; en la electrónica, circuitos electrónicos y técnicas de comunicación; en la mecánica celeste, comportamiento de tres o más cuerpos celestes; en la ecología, poblaciones en competencia; en la física, en el dominio atómico, en microestructuras.

6. Estabilidad e inestabilidad de un sistema

La *estabilidad* es una palabra genérica que se usa en diferentes sentidos. Por un lado, para caracterizar la res-

puesta de un sistema a una perturbación. Si la evolución del sistema amplifica la perturbación y genera un gran cambio entonces el sistema es *inestable*. Si la perturbación se amortigua con el tiempo y resulta un cambio pequeño o despreciable, el sistema es *estable*.

La *estabilidad lineal* del sistema dinámico, (5) o (6), se estudia despreciando todos los términos no lineales que intervienen en las ecuaciones de movimiento y generando un sistema lineal. Se consideran dos soluciones $x(t)$ y $y(t)$ que se diferencian por las condiciones iniciales y se introduce un vector

$$\mathbf{u}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t), \text{ TC}, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_n := \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n, \text{ TD} \quad (13)$$

que “mide” la distancia entre las dos trayectorias a medida que transcurre el tiempo t . La inestabilidad local del movimiento se describe por una *aproximación lineal*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = \mathbf{J}(x, t; \mu) \mathbf{u}(t), \text{ TC} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}(x_n; \mu) \mathbf{u}_{n+1}, \text{ TD} \quad (15)$$

que está gobernada por la matriz jacobiano $\mathbf{J}(x, t; \mu)$ asociada con la solución $x(t)$ que sirve de “trayectoria de referencia”.

Bajo las condiciones enunciadas por Oseledec [13] existe en el espacio tangente una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g\}$ en la cual, para tiempos suficientemente grandes [14],

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\ell=1}^g \mathbf{e}_\ell c_\ell \exp(\lambda_\ell \tau), \quad \tau := (t - t_0) \gg 0, \quad (16)$$

donde los coeficientes $c_\ell = c_\ell(x(t_0))$ dependen de las condiciones iniciales. Los números reales $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$ se denominan *exponentes de Lyapunov*. En sistemas hamiltonianos de f grados de libertad la suma de los exponentes de Lyapunov se anula, $\sum_{\ell=1}^{2f} \lambda_\ell = 0$, hecho que refleja la conservación del volumen de cualquier región del espacio de fase (espacio de estados).

El sistema dinámico es (exponencialmente) *inestable* si por lo menos el mayor exponente de Lyapunov es mayor que cero ($\lambda_1 > 0$). En este caso una pequeña diferencia en las condiciones iniciales de las trayectorias $x(t)$ y $y(t)$ se amplifica con el tiempo y el sistema dinámico presenta entonces *sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales*, tal como se ilustra en la figura 3.

La estabilidad de la cascada (5) sobre un intervalo de tiempo se determina por iteración de la ecuación linealizada (15). Por ejemplo, una pequeña perturbación inicial \mathbf{u}_0 se convierte en el tiempo t_N en

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{J}_N \mathbf{u}_0, \quad (17)$$

donde $\mathbf{J}_N := \mathbf{J}(x_{N-1}) \dots \mathbf{J}(x_1)\mathbf{J}(x_0)$. La perturbación \mathbf{u}_n crece, y la perturbación es inestable sobre ese intervalo de tiempo, si la relación entre la longitud del vector \mathbf{u}_N y del vector inicial \mathbf{u}_0 es mayor que uno. Al igual que en el caso de sistemas continuos la cascada de g variables tiene g exponentes de Lyapunov; el sistema es inestable si el mayor exponente de Lyapunov es positivo.

Otros tipos de estabilidad. La estabilidad lineal de un sistema dinámico se refiere al comportamiento de estados individuales (puntos en el espacio de fase) con relación al tiempo. Pero un sistema dinámico tiene tipos adicionales de estabilidad, además de la lineal. Existe la *estabilidad asintótica de trayectorias* y la *estabilidad de familias de trayectorias (atractores)*. Se puede perturbar el estado del sistema (*estabilidad dinámica*) o se pueden perturbar los parámetros del sistema (*perturbación estructural*). Esto último puede generar cambios cualitativos en las propiedades del sistema, por ejemplo, pueden aparecer o desaparecer atractores. Tales eventos se llaman *bifurcaciones*.

7. Caos y pérdida de información

El comportamiento caótico de muchos sistemas (físicos, biológicos, económicos) ha sido objeto de estudio en las últimas décadas. El *comportamiento caótico* es un término que se utiliza para referirse a ciertas propiedades dinámicas en sistemas deterministas no lineales que tienen movimiento *acotado* en el espacio de fase y presentan inestabilidad (exponencial) de trayectorias; el número de variables de estado debe ser tres o más en sistemas de tiempo continuo o una o más en sistemas de tiempo discreto. Los exponentes de Lyapunov constituyen los mejores indicadores de caos; se requiere que al menos el mayor exponente de Lyapunov sea positivo ($\lambda_1 > 0$), lo que implica sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

El carácter no lineal de un sistema dinámico caótico permite que coexistan el movimiento acotado con la inestabilidad lineal. Las trayectorias vecinas tienden a separarse exponencialmente pero como el movimiento es acotado las trayectorias se ven obligadas a plegarse para no abandonar la región físicamente accesible en el espacio de fase. La dinámica caótica genera con frecuencia "conjuntos invariantes" que tienen una estructura geométrica complicada e interesante (atractores).

El comportamiento caótico conecta el determinismo con el azar, con lo fortuito, con lo aleatorio. Como las trayectorias vecinas se separan exponencialmente, un pequeño error o un pequeño cambio en las condiciones iniciales se amplifica con una rapidez exponencial y muy pronto alcanza proporciones macroscópicas. Dos

estados que sólo se diferencian de manera imperceptible en el presente, $\delta_0 := |\mathbf{u}(t_0)|$, pueden conducir a estados completamente diferentes en el futuro. Pequeños errores en la medición de un observable, o de cualquier otro origen, destruyen en la práctica el determinismo que rige en principio la dinámica del sistema. Después de un tiempo suficientemente largo el determinismo se anula en la práctica y sólo las predicciones de carácter estadístico son posibles.

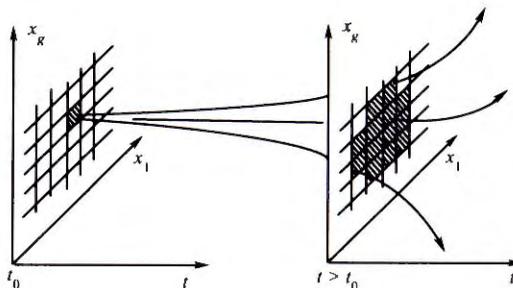


FIGURA 3. Trayectorias inicialmente vecinas se separan exponencialmente cuando uno o más exponentes de Lyapunov son positivos ($\lambda_1 > 0$).

En efecto, de (16) concluimos que en promedio y para tiempos suficientemente grandes la magnitud del vector $\mathbf{u}(t)$ se comporta en la forma [14]

$$|\mathbf{u}(t)| \sim |\mathbf{u}(t_0)| \exp(\lambda_1 t) [1 + \mathcal{O}(\exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t))]. \quad (18)$$

El sistema es caótico si $\lambda_1 > 0$. En este caso existe una rápida amplificación (exponencial) de la pequeña diferencia en las condiciones iniciales $\delta_0 := |\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)|$ (ver figura 3) y el futuro distante ($t \gg t_0$) se torna impredecible. Si hacemos $\delta_0 := |\mathbf{u}(t_0)|$ y queremos predecir los estados del sistema con una tolerancia Δ (no muy grande), entonces la predicción es posible sólo en el intervalo $t_0 \leq t < T_p$, con *tiempo de predictibilidad*

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\Delta}{\delta_0} \right). \quad (19)$$

Esta ecuación indica que T_p está determinado básicamente por el mayor exponente de Lyapunov (λ_1) debido a que su dependencia de δ_0 y de Δ es muy débil.

Los conceptos se pueden precisar aún más si se introduce la *información de Shannon* [12, 15], para lo cual dividimos el espacio de estados g dimensional en cajitas de arista ℓ y volumen ℓ^g (ver figura 4), y medimos el estado del sistema a intervalos de tiempo constantes τ . Si designamos por $P(i_0, i_1, \dots, i_n)$ la probabilidad conjunta de que el estado $x(t_0)$ esté en la caja i_0 , el estado

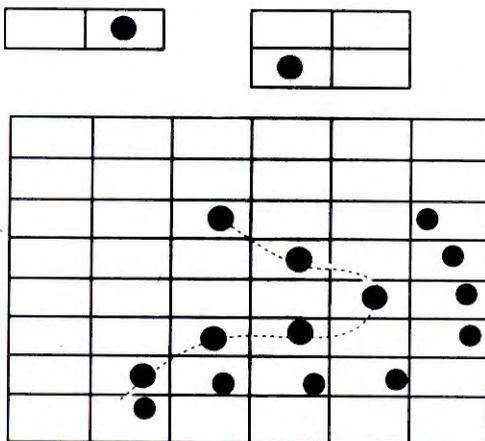


FIGURA 4. El espacio de fase g -dimensional se divide en cajitas de arista ℓ y volumen ℓ^g . Los puntos representan el comportamiento de dos trayectorias en el espacio de fase.

$x(t_1)$ en la caja i_1, \dots , el estado $x(t_n)$ en la caja i_n , la entropía de Shannon es

$$K_n := - \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n} P(i_0, i_1, \dots, i_n) \log P(i_0, i_1, \dots, i_n).$$

Esta entropía es proporcional a la *información* que se necesita para localizar el sistema en el espacio de estados sobre una *trayectoria específica* $\{i_0^*, i_1^*, \dots, i_n^*\}$, con precisión ℓ . La cantidad $K_{n+1} - K_n$ es la información adicional que se necesita para *predecir* la celda i_{n+1}^* en que encontraremos el sistema, sabiendo que la trayectoria pasó previamente por la sucesión de celdas $\{i_0^*, i_1^*, \dots, i_n^*\}$. Esto significa que $K_{n+1} - K_n$ mide nuestra pérdida de información sobre el estado del sistema al pasar del instante de tiempo t_n al instante t_{n+1} .

La entropía de Kolmogorov (entropía- K o entropía métrica) se define entonces como la rata promedio de pérdida de información,

$$K := \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) \quad (20)$$

$$= \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n. \quad (21)$$

La entropía- K tiene unidades de frecuencia y su magnitud está determinada por la suma (en general, una suma promediada con una densidad de estados) de aquellos exponentes de Lyapunov que toman valores positivos (se excluyen los exponentes negativos). El límite $\ell \rightarrow 0$ conlleva a que la entropía K sea independiente de la partición particular. Para sistemas en tiempo discreto (TD) $\tau = 1$ y se omite el límite $\tau \rightarrow 0$.

La entropía K es cero si no hay exponentes positivos de Lyapunov (comportamiento regular) y es mayor que cero en el caso en que el comportamiento del sistema sea caótico. En analogía con un fluido ordinario (por ejemplo, agua), si el sistema está ejecutando un movimiento regular, el flujo es laminar y $K = 0$. La aparición de una entropía positiva $K > 0$ está asociada con el cambio de flujo laminar a turbulento, es decir, el flujo en el espacio de fase pasa de un comportamiento regular a un comportamiento caótico.

El teorema de Alekseev-Brudno conecta inestabilidad exponencial ($K > 0$), caos e impredictibilidad. Este teorema establece que la información $C(t)$ (o complejidad algorítmica) asociada con un segmento de trayectoria de longitud t es asintóticamente igual a la entropía métrica [16]

$$\frac{C(t)}{|t|} \rightarrow K, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (22)$$

El tiempo de transición entre comportamiento determinista y comportamiento estadístico depende de la partición del espacio de fase en celdas, del tamaño de éstas, y de un parámetro de aleatoriedad $r := |t|/t_r$, donde $t_r := (\ln N)/K$ es una escala de tiempo; N es un entero grande cuyo valor es inversamente proporcional al tamaño elegido de las celdas en el espacio de fase. En el límite $r \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) el comportamiento es *determinista* para ($|t| \leq t_r$), mientras que en el límite $r \rightarrow \infty$ se tiene un comportamiento asintótico aleatorio para ($|t| \geq t_r$). En palabras, la entropía K mide el grado de caoticidad de un sistema dinámico e indica que con el transcurrir del tiempo se pierde inevitablemente información sobre el estado del sistema; en consecuencia, en un sistema caótico hay pérdida de predictibilidad sobre el futuro (o pasado) distante ($|t| > |t_r|$).

Ejemplo. La cascada de “desplazamientos binarios” es posiblemente el sistema dinámico no lineal más sencillo en tiempo discreto [17],

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad (\text{módulo } 1). \quad (23)$$

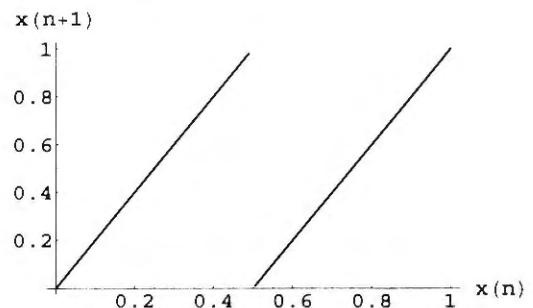


FIGURA 5. La aplicación “desplazamiento binario” $x_{n+1} = 2x_n$, módulo 1, es no lineal.

En cada etapa de la iteración ($n = 0, 1, 2, \dots$) el número precedente se multiplica por 2 y al número resultante se le calcula el módulo 1. La figura 5 muestra el comportamiento de la aplicación la cual es no lineal pues tiene una discontinuidad en $1/2$; el dominio y el rango de la aplicación lo restringimos al intervalo $0 \leq x_n \leq 1$.

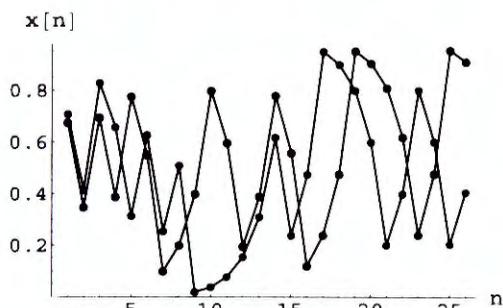


FIGURA 6. Sensibilidad del “desplazamiento binario” con relación a las condiciones iniciales irracionales, $x_0 = \sqrt{2}/2$ y $x_0 = \sqrt{2}/2.1$.

Considerar como estado inicial el número racional $x_0 = 809/1024 = 0.790039$ que reescribimos como un número binario 0.1100101001_2 con diez cifras de precisión. Cada iteración desplaza el grado de incertidumbre una posición hacia la izquierda de tal manera que después de diez iteraciones se ha perdido toda información sobre el estado del sistema (tabla 1). Esto es, a medida que la cascada progresa se destruye de manera progresiva la información. Nótese que una condición inicial racional genera ciclos y que sólo condiciones iniciales irracionales pueden conducir a comportamiento caótico.

TABLA 1. Pérdida de información en el “desplazamiento binario” durante las primeras iteraciones.

n	base 10	base 2
0	0.790039	0.1100101001
1	0.580078	0.100101001?
2	0.160156	0.00101001??
3	0.320313	0.0101001???
4	0.640625	0.101001????
5	0.28125?	0.01001?????
6	0.5625??	0.1001??????
7	0.125???	0.001???????
8	0.25????	0.01????????
9	0.5?????	0.1?????????
10	0.??????	0.??????????

En la figura 6 se muestra la sensibilidad a condiciones iniciales que genera la aplicación cuando comparando las trayectorias para dos condiciones iniciales irracionales, $x_0 = \sqrt{2}/2$ y $x_0 = \sqrt{2}/2.1$.

Algunos comentarios adicionales

Durante buena parte del desarrollo de las ciencias físicas (con posterioridad a Newton) se creyó que el determinismo era una propiedad sobre la cual se conocía lo suficiente. En principio, un conjunto de ecuaciones diferenciales bien comportado tenía solución única para unas condiciones iniciales dadas y, por lo tanto, la evolución futura del sistema estaba determinada de manera completa. En ese mundo determinista la predictibilidad del futuro estaba garantizada en principio al igual que la existencia de un mundo lleno de orden. Descubrir las leyes de ese mundo era un asunto que requería observación y experimentos controlados; el comportamiento al azar era sólo el resultado del desconocimiento que teníamos sobre las fuerzas o de unos cálculos imprecisos.

La teoría del caos ha cambiado esa conceptualización de manera drástica y hoy sabemos que el determinismo no implica predictibilidad de largo plazo, por varias razones:

- En general toda medición conlleva imprecisiones ya que no existen instrumentos perfectos que permitan hacer mediciones ideales con infinita precisión, en particular de las condiciones iniciales.
- Los sistemas dinámicos con comportamiento caótico son sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales; esto es, trayectorias inicialmente vecinas se separan exponencialmente con el transcurrir del tiempo y los pequeños “errores” iniciales se amplifican con la evolución temporal.
- La evolución temporal en los sistemas dinámicos conlleva una pérdida de información con el transcurrir del tiempo, lo cual se manifiesta en los experimentos numéricos. Empíricamente, si los cálculos se hacen con N bits de precisión, la correlación con los datos iniciales se pierde alrededor de $2N$ iteraciones en el caso de comportamiento regular y de N iteraciones en el caso de comportamiento caótico.
- Para requerir una determinada precisión en los datos finales es necesario incrementar de manera exponencial la precisión de los datos iniciales.
- Existen procesos de bifurcación (no comentados en este artículo) en los cuales pequeños cambios en los parámetros del sistema inducen grandes cambios en su dinámica.

8. Sistemas caóticos en diferentes disciplinas

En las ciencias naturales, en la ingeniería y en otras ciencias, intervienen modelos deterministas para explicar ciertas fenómenos. Se presentan ahora algunos ejemplos.

8.1 Modelo de Lorenz

Consideramos las ecuaciones (11) y asignamos los siguientes valores a los parámetros: $\sigma = 3$, $r = 26.5$, $b = 1$. Queremos comparar la evolución temporal de este sistema para dos condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ que sólo se diferencian en una milésima parte en el valor de la segunda coordenada: $(0, 1, 1)$ y $(0, 1.001, 1)$. En ambos casos el sistema se integra de manera numérica en el intervalo $0 \leq t \leq 150$ y el resultado se muestra en las figuras 7 y 8. Aparentemente las gráficas son similares pero una cuidadosa observación muestra que la pequeña diferencia en las condiciones iniciales ha generado trayectorias que tienen comportamiento diferente en el futuro lejano. Este hecho se aprecia en las figuras 8 que muestran los respectivos segmentos de las trayectorias durante el lapso $140 \leq t \leq 150$. En conclusión, bajo las condiciones indicadas, las ecuaciones de Lorenz dan origen a un comportamiento caótico que hace imposible la predicción del futuro distante.

8.2 Un circuito de Chua modificado

Es posible diseñar circuitos electrónicos no lineales que tienen comportamiento irregular. Un sistema bastante popular es el circuito de Chua que se muestra en la figura 9, el cual genera una dinámica bastante compleja, aún en el caso en que la perturbación externa es nula, $V(t) = 0$. Su popularidad se debe a que se trata de un sistema real que se puede realizar en el laboratorio, hecho que contrasta con el modelo de Lorenz que describe procesos atmosféricos usando aproximaciones bastante drásticas.

El circuito de Chua consta de tres componentes energéticas: dos condensadores C_1 y C_2 y una inductancia L . Tiene además dos resistencias, R y r , y una resistencia no lineal R_{NL} que recibe el nombre de diodo de Chua, al cual se le aplica un voltaje V_1 .

En la literatura existen diferentes modificaciones y realizaciones experimentales del circuito de Chua. Elegimos el que se describe por el siguiente conjunto de ecuaciones [18]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -x - (K - 1)y - f(w), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x + (K - 2)y, \\ \varepsilon_c \frac{dz}{d\tau} &= -\varepsilon_r z - f(w), \end{aligned} \quad (24)$$

donde $w := x + Ky + z$ y K es un parámetro.

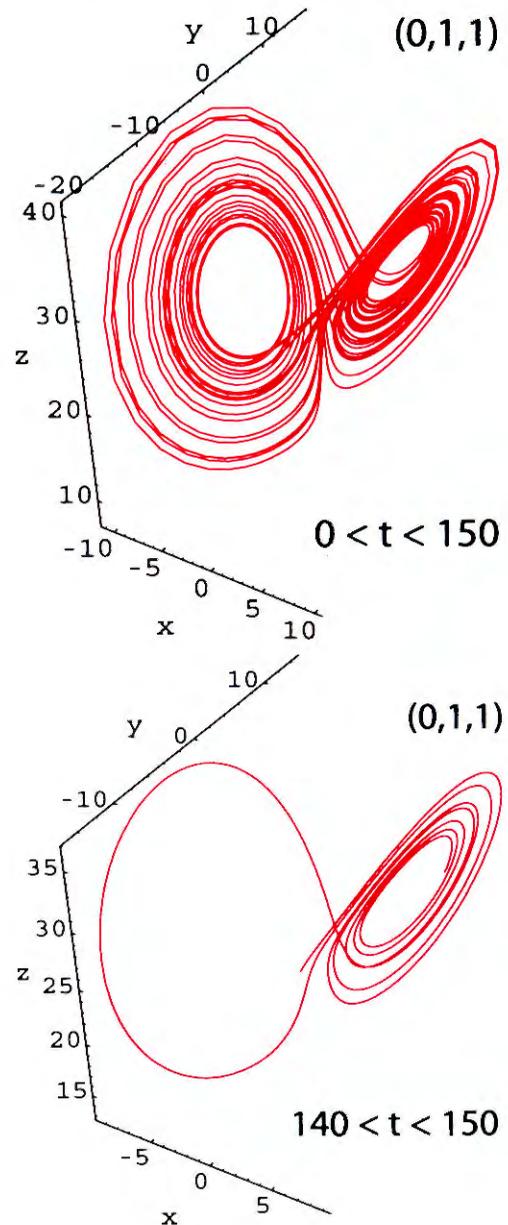


FIGURA 7. Comportamiento de las ecuaciones de Lorenz (11) para la condición inicial $(0, 1, 1)$ durante el lapso $0 \leq t \leq 150$ (figura superior) y $140 \leq t \leq 150$ (figura inferior).

El carácter no lineal del diodo de Chua se manifiesta en la función

$$f(w) = \alpha_1 w + \alpha_2 (|w + 1| - |w - 1|), \quad (25)$$

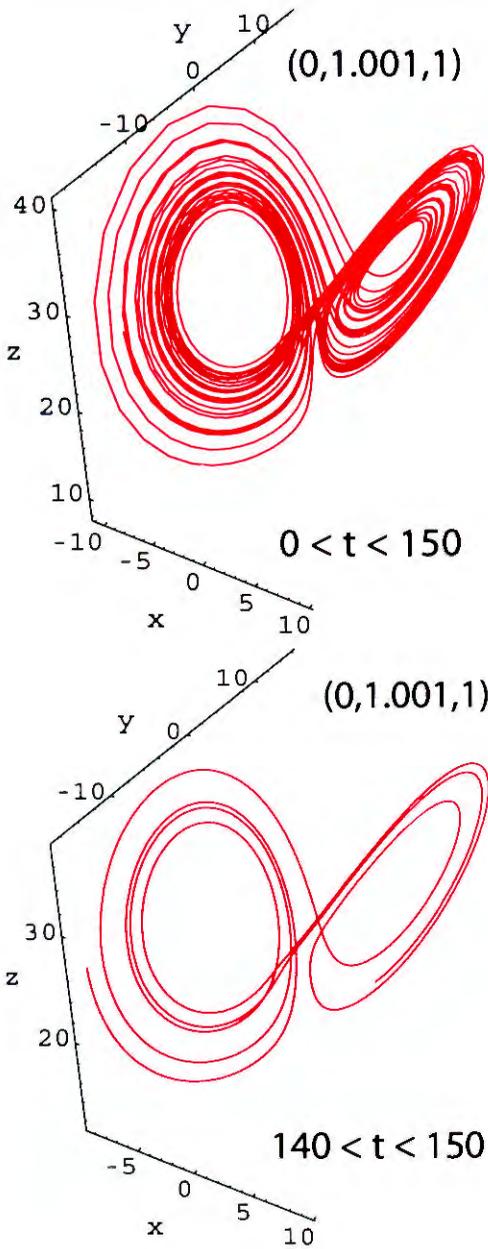


FIGURA 8. Comportamiento de las ecuaciones de Lorenz (11) para la condición inicial $(0, 1.001, 1)$ durante el lapso $0 \leq t \leq 150$ (figura superior) y $140 \leq t \leq 150$ (figura inferior).

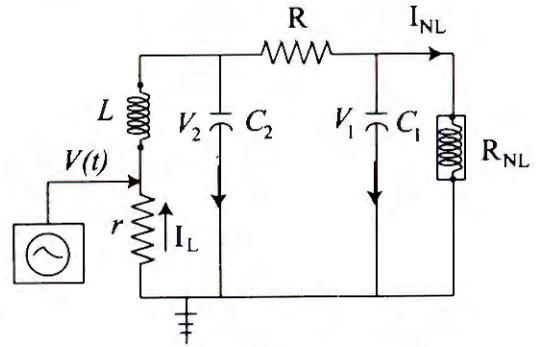


FIGURA 9. Ejemplo de un circuito de Chua que consta de dos condensadores C_1 y C_2 , una inductancia L , dos resistencias R y r , y una resistencia no lineal R_{NL} ; la perturbación externa es nula $V(t) = 0$.

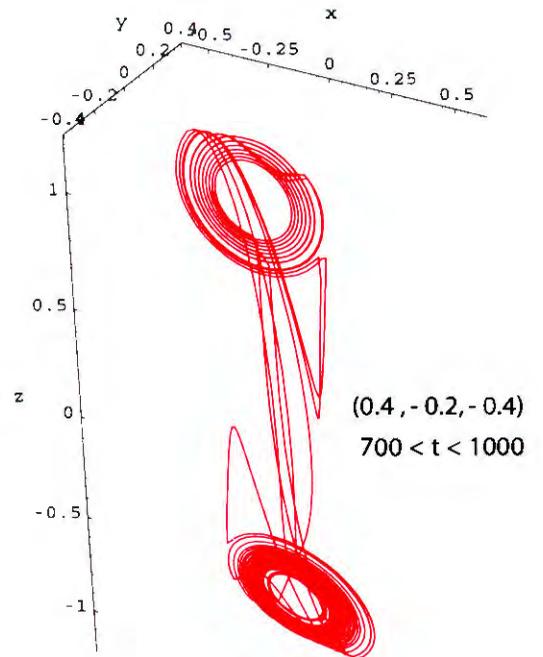


FIGURA 10. Comportamiento de una trayectoria del circuito de Chua con condición inicial $(0.4, -0.2, -0.4)$ en $t = 0$, durante el lapso $700 \leq t \leq 1000$.

que consta de la unión de tres segmentos de recta que se diferencian por sus pendientes. Los valores de los parámetros son: $K = 3.25$, $\varepsilon_r = 1/6$, $\varepsilon_c = 0.06$, $\alpha_1 = 0.8$, $\alpha_2 = -0.5$. En las figuras 10, 11 y 12 se muestra el comportamiento de dos trayectorias que se diferencian ligeramente en las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0))$, a las cuales asignamos los valores $(0.4, -0.2, -0.4)$ y $(0.4001, -0.2, -0.4)$.

Se observa que la pequeña modificación de la condición inicial $x(0)$ en la cuarta cifra decimal genera en el lapso $890 \leq t \leq 1000$ dos comportamientos esencialmente diferentes, tal como se observa en las figuras 11 y 12. El comportamiento caótico del sistema conlleva

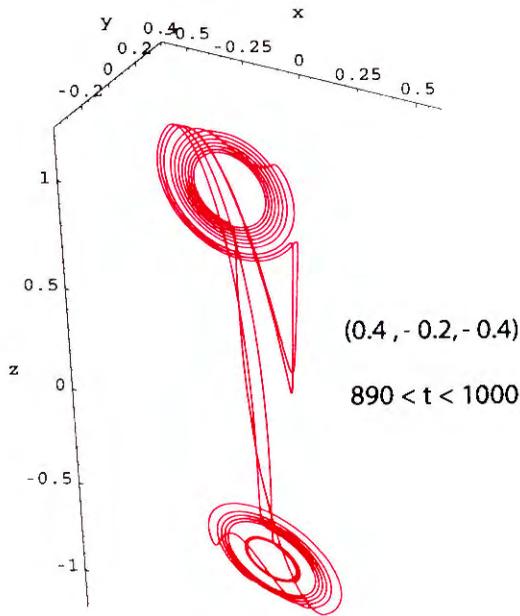


FIGURA 11. Comportamiento de una trayectoria del circuito de Chua con condición inicial $(0.4, -0.2, -0.4)$ en $t = 0$, durante el lapso $890 \leq t \leq 1000$.

sensibilidad en las condiciones iniciales y se manifiesta de nuevo en la impredecibilidad del futuro distante.

8.3 Predicción de ionización en un átomo alcalino

Los ejemplos anteriores muestran que en un sistema caótico no es posible predecir el futuro distante como consecuencia de la sensibilidad del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

En lo que sigue se presenta un ejemplo que sugiere la posibilidad de predecir el futuro distante en un sistema caótico [19], pero se trata de una clase de predictibilidad diferente a la situación que hemos considerado previamente (comparación de trayectorias que difieren muy poco en la condición inicial).

Un átomo alcalino de carga nuclear Z se describe mediante un modelo unidimensional con parámetros σ y C ,

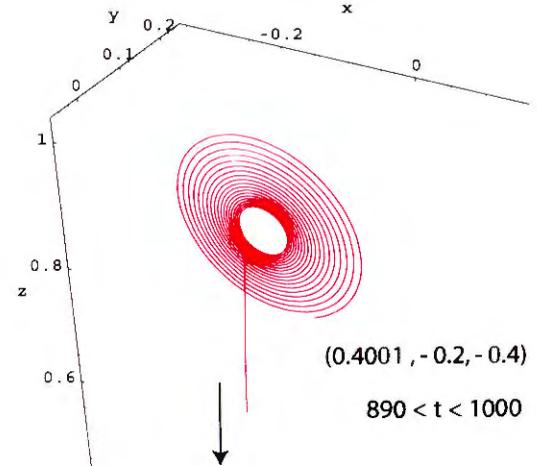


FIGURA 12. Comportamiento de una trayectoria del circuito de Chua con condición inicial $(0.4001, -0.2, -0.4)$ en $t = 0$, durante el lapso $890 \leq t \leq 1000$.

y se somete a un campo eléctrico dependiente del tiempo, caracterizado por frecuencia ω , intensidad \mathcal{F} y fase γ . El estado del electrón activo (masa reducida μ , carga $-e$, posición $z(t)$ y momentum $p(t)$), cambia en el tiempo según las ecuaciones deterministas [19]:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p}{\mu},$$

$$\frac{dp}{dt} = -(Z - \sigma)e^2 \frac{1}{z^2} + \frac{Ch^2}{\mu} \frac{1}{z^3} + e\mathcal{F} \sin(\omega t + \gamma). \quad (26)$$

El átomo no perturbado tiene hamiltoniano $H_0(z, p) = -E_0$, donde $-E_0$ designa la energía del estado Rydberg en que se prepara el átomo. En el instante de tiempo $t_0 = 0$ se conecta el campo eléctrico y el cambio de la energía del electrón activo se mide mediante la cantidad

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \frac{H_0(z(t), p(t), t)}{E_0} \\ &= -1 + \frac{e\mathcal{F}}{\mu E_0} \int_{t_0}^t dt' p(t') \sin(\omega t' + \gamma). \end{aligned} \quad (27)$$

Cuando el electrón alcanza las vecindades del tronco atómico, el electrón es catapultado hacia el exterior y experimenta saltos en el valor de su posición $z(t)$, tal como se muestra en la figura 13(b). Por su lado, el campo electromagnético puede darle o quitarle energía al electrón, lo cual conlleva a que $\varepsilon(t)$ presente una estructura oscilatoria, como se ilustra en las figuras 13(a, e).

La ionización ocurre cuando el átomo es excitado progresivamente a energías cada vez más altas y después de un tiempo suficientemente largo $t_I > t_0$ el electrón activo adquiere un movimiento no acotado, en el cual la posición crece de manera indefinida, y el impulso $p(t)$ y la energía $\varepsilon(t)$ llegan a ser positivos: $z(t) > 0$, $p(t) > 0$, $\varepsilon(t) > 0$, para $t > t_I$.

En [19] se formularon criterios para predecir con suficiente anterioridad, y bajo ciertas circunstancias, si una trayectoria dada conduce en el futuro distante a un estado no acotado (ionización) o a un estado acotado. Para esto consideramos un intervalo de tiempo $t_a < t < t_b$ y evaluamos a lo largo de una trayectoria el promedio temporal de la energía

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle(t_a, t_b) &:= \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} \varepsilon(t') dt' \\ &= \varepsilon(t_a) + \Delta \varepsilon(t_a, t_b), \end{aligned} \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon(t_a, t_b) &:= \frac{e\mathcal{F}}{\mu E_0} \frac{1}{t_b - t_a} \times \\ &\int_{t_a}^{t_b} dt' (t_b - t') p(t') \sin(\omega t' + \gamma) \end{aligned} \quad (29)$$

es el cambio neto de energía entre t_a y t_b . La cantidad $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t_b)$ da la "energía algebraica" en la cual la energía se cuenta como positiva si $\varepsilon(t') > 0$ y como negativa si $\varepsilon(t') < 0$. Como $t_b - t' > 0$, cuando $p(t') > 0$ las contribuciones algebraicas a la integral (29) están determinadas exclusivamente por la función $\sin(\omega t' + \gamma)$.

La predicción de ionización a lo largo de una trayectoria dada se fundamentó en el siguiente criterio, el cual se verificó realizando cálculos numéricos hasta un futuro

distante posterior al tiempo de ionización t_I . Sea t_a el tiempo en el cual el electrón alcanza la distancia más cercana al núcleo en el supuesto último salto; elegimos un conjunto de intervalos temporales $t_b = t_a + mT$ donde $T = 2\pi/\omega$ es el período del campo y $m = 1, 2, \dots$ es un entero que rotula una sucesión de intervalos; determinamos para cada intervalo la energía promedio,

$$\langle \varepsilon \rangle_m := \langle \varepsilon \rangle(t_a + (m - 1)T, t_a + mT). \quad (30)$$

El átomo se ionizará si la trayectoria clásica del electrón activo cumple las siguientes dos propiedades:

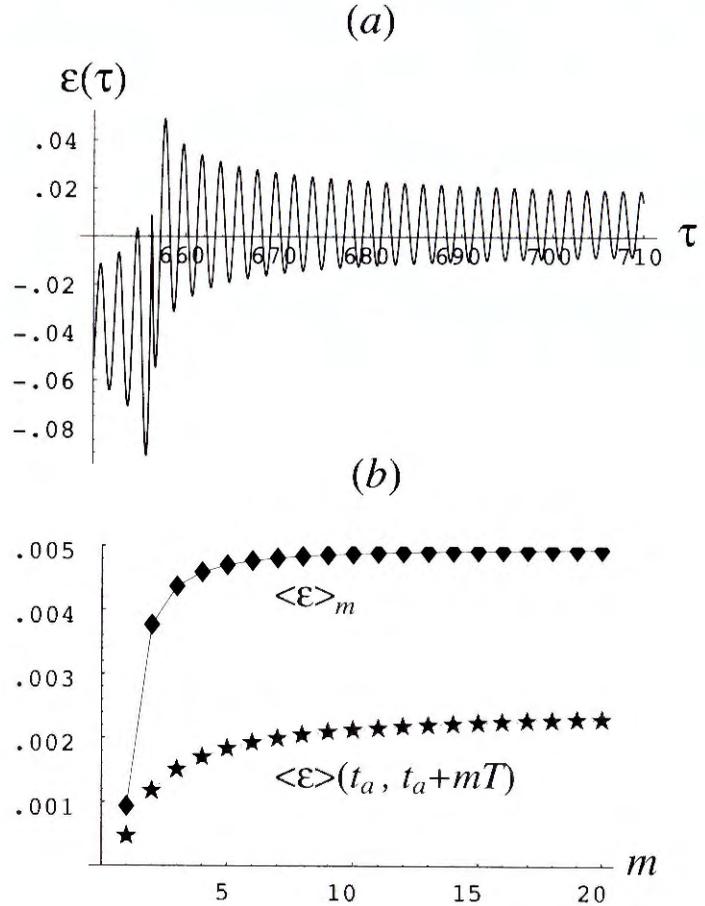


FIGURA 14. Comportamiento dinámico del electrón después del último salto con las mismas condiciones iniciales de la figura 13 y con fase $\gamma = 5\pi/4$. La figura (b) muestra el comportamiento de $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t_a + mT)$ y $\langle \varepsilon \rangle_m$ durante los primeros 20 ciclos del campo ($m = 1, 2, 3, \dots, 20$) contados a partir de t_a .

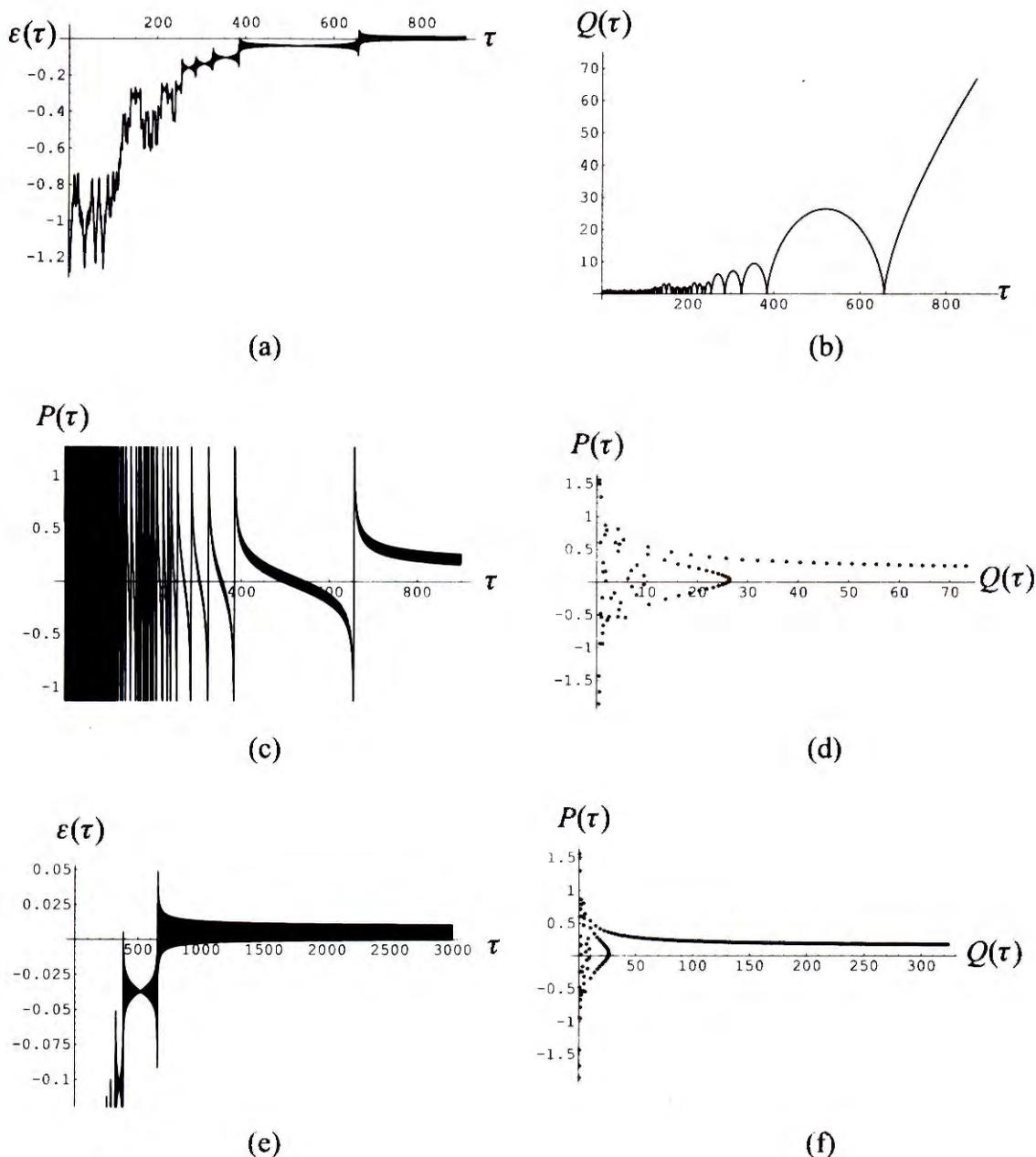


FIGURA 13. Ionización de Litio en un campo de microondas de frecuencia $\omega = 1.509 \times 10^{-6}$ au, fase inicial $\gamma = 5\pi/4$ y amplitud de campo eléctrico $\mathcal{F} = 6.08557 \times 10^{-10}$ au. Las figuras (a), (b) y (c) muestran el comportamiento con el tiempo de la energía $\varepsilon(\tau)$, la posición $Q(\tau)$ y el impulso $P(\tau)$, respectivamente. La figura (d) es un gráfico de la trayectoria en el espacio de fase. Las figuras (e) y (f) muestran el comportamiento de la energía y de la trayectoria para grandes tiempos, con el propósito de confirmar el proceso de ionización.

- El promedio temporal de la energía en el intervalo $t_a < t < t_b$ es mayor que cero; esto es, $\langle \varepsilon \rangle > 0$, para todo $t_b > t_a$.
- En cada intervalo el electrón toma energía del campo, $\langle \varepsilon \rangle_{m+1} - \langle \varepsilon \rangle_m > 0$ para todo m , de tal manera que en sucesivos ciclos las contribuciones negativas de la energía $\varepsilon(t)$ están disminuyendo.

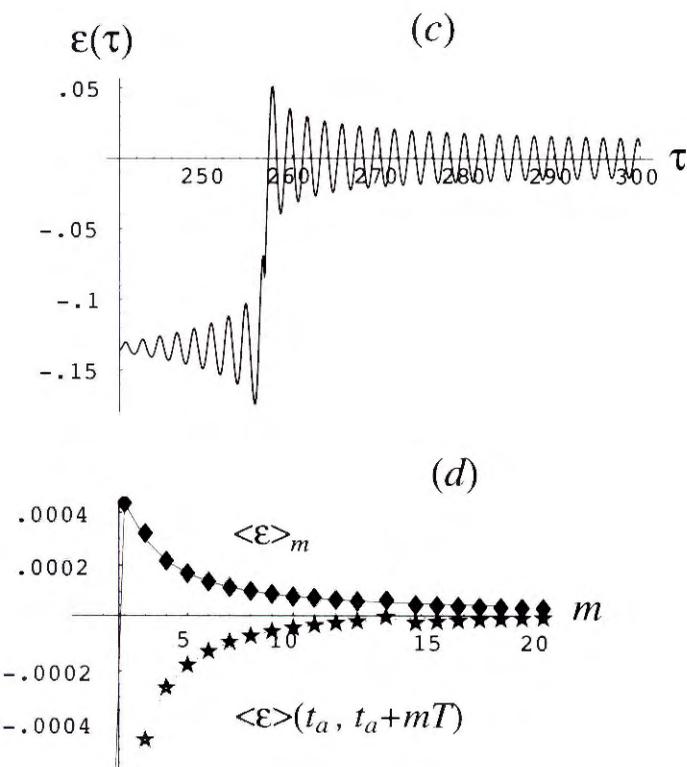


FIGURA 15. Comportamiento dinámico del electrón después del último salto con las mismas condiciones iniciales de la figura 13 y con fase $\gamma = (5\pi/4) + 0.06$. La figura (d) muestra el comportamiento de $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t_a + mT)$ y $\langle \varepsilon \rangle_m$ durante los primeros 20 ciclos del campo ($m = 1, 2, 3, \dots, 20$) contados a partir de t_a .

Las figuras 14 y 15 ilustran dos ejemplos en los que se aplica el criterio de ionización. El primer sistema ($\gamma = 5\pi/4$, figura 14a, b) corresponde a la situación de la figura 13 en la cual la ionización ocurre después de un tiempo t_I superior a 8000 unidades de tiempo. El segundo sistema ($\gamma = 5\pi/4 + 0.06$, figura 15 c, d) no

presenta ionización y el electrón es recapturado a pesar de que para ciertos tiempos se aleja a grandes distancias del tronco atómico.

Las figuras 14(b) y 15(d) muestran en cada caso el comportamiento de $\langle \varepsilon \rangle_m$ y $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t_a + mT)$. El electrón absorbe energía del campo principalmente en los primeros ciclos. Sin embargo sólo en el caso (b), en el que hay ionización, se cumple $\langle \varepsilon \rangle_{m+1} - \langle \varepsilon \rangle_m > 0$ y $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t_a + mT) > 0$ para todo $m = 1, 2, \dots, 20$. Esto es, sólo en el caso (b) la energía proporcionada por el campo ($\Delta\varepsilon$ en 28) es suficiente para que $\langle \varepsilon \rangle(t_a, t)$ llegue a ser positiva para todo $t > t_a$.

9. Conclusiones

Como herencia de Newton, Laplace y otros pensadores, en buena parte de la historia de la ciencia ha predominado una concepción mecanicista del Universo, en la cual esta entidad era un gigantesco reloj que obedecía a reglas previsible e inmutables (determinismo); concepción que se extrapoló en algunos casos a la política, a la economía, a la psicología y a otras áreas del conocimiento. En esta concepción determinismo conllevaba predecibilidad.

Los trabajos de Poincaré y de otros padres de la teoría del caos mostraron la existencia de sensibilidad de los sistemas dinámicos a pequeños cambios en las condiciones iniciales, implicando que determinismo no conlleva predictibilidad del futuro distante. Esta situación se ilustró en el caso del modelo de Lorenz y del circuito de Chua, comparando el comportamiento futuro de *dos trayectorias* inicialmente muy vecinas.

La relación entre determinismo y predictibilidad no es un debate cerrado. En efecto, un ejemplo de la interacción entre materia y radiación [19] muestra la posibilidad de predecir el futuro distante en un sistema atómico caótico, mediante el análisis de un observable a lo largo de *una trayectoria* en el espacio de estados. Esta clase de predictibilidad es diferente de la que usamos en el estudio de los sistemas de Lorenz y de Chua, para los cuales comparamos *dos trayectorias* que difieren un poco en la condición inicial.

Es posible afirmar que las teorías deterministas siguen siendo válidas. Sin embargo, en virtud del comportamiento caótico de la mayoría de los sistemas dinámicos (en muchas áreas de la ciencia) es conveniente y necesario hacer uso de distribuciones de probabilidad. Con su ayuda es posible tratar de manera adecuada las consecuencias de la sensibilidad de los sistemas caóticos a pequeños cambios en el estado del sistema, lo cual puede provenir, por ejemplo, de errores en las condiciones iniciales o errores de aproximación (número finito de cifras significativas). Lo que es un hecho es la pérdida permanente de información asociada con la evolución temporal de un sistema caótico.

Agradecimientos

El autor agradece a la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por su designación como Miembro de Número, al igual que al Académico Victor Albis por valiosas observaciones. Este trabajo forma parte del proyecto "Dinámica compleja en sistemas no lineales" cofinanciado por DINAIN (Universidad Nacional de Colombia).

Bibliografía

- [1] **F. Diacu, P. Holmes**, *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Princenton, Princenton University Press (1996).
- [2] **P. Février**, *Determinismo e indeterminismo*, Universidad Nacional Autónoma de México, México (1957).
- [3] **J. Barrow-Green**, *Poincaré and the Three Body Problem*, en *History of Mathematics*, vol. 11, AMS, London (1997).
- [4] **D. Ruelle**, *Azar y caos*, Alianza Editorial, Madrid (1993).
- [5] **A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman**, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, Berlin (1992).
- [6] **V. F. Lazukin**, *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Springer, Berlin (1991).
- [7] **E. N. Lorenz**, "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* *20* 130-141, (1963)
- [8] **G. Q. Zhong, F. Ayrom** "Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit", *Int. J. Circuit Theory Applic.* *13* (1) 93-98 (1985)
- [9] **L. O. Chua, L. Pivka, C. W. Wu**, "A Universal circuit for studying Chaotic Phenomena", *Phil. Trans.: Phys. Sc. and Eng.*, *353* (1701) 65-84 (1995)
- [10] **G. W. Flake**, *The Computational Beauty of Nature*, The MIT Press, Cambridge (1999)
- [11] **F. Verhulst**, "Methaphors for Psychoanalysis", *Nonlinear Science Today* *4* (1994), <http://gonzo.springer-ny.com/nst/>.
- [12] **J. D. Farmer**, "Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos", *Z. Naturforsch.* *37a*, 1304 (1982).
- [13] **V. I. Oseledec**, "A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems", *Trans. Moscow Math. Soc.* *19*, 197 (1968). Incluido en: **Y. G. Sinai** (editor), *Dynamical Systems (A collection of papers)*, World Scientific, Singapore (1991)
- [14] **G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni, A. Vulpiani** "Predictability: a way to characterize complexity", *Physics Reports* *356* 367 474 (2002)
- [15] **H. G. Schuster**, *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim (1995)
- [16] **B. Chirikov**, "Natural Laws and Human Prediction" en *Law and Prediction in the Light of Chaos Research*, P. Weingartner and G. Schurz (eds.), Springer, Berlin (1996)
- [17] **R. Shaw**, "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow", *Z. Naturforsch.* *36a*, 80 (1981).
- [18] **A. S. Elwakil, M.P. Kennedy**, "Chua's circuit decomposition: a systematic design approach for chaotic oscillators", *Journal of the Franklin Institute* *337* 251-265 (2000)
- [19] **D. Campos, M. C. Spinel, J. Madroñero**, "Ionization of one-dimensional alkali atoms by microwave fields", *J. Phys. A: Math. Gen.* *34*, 8101 - 8118 (2001)