ALGUNOS PROBLEMAS DE PRESERVACIÓN LINEAL SOBRE LOS ESPACIOS DE MATRICES SIMÉTRICAS, ANTISIMÉTRICAS Y HERMITIANAS

por

Humberto Sarria Zapata[1]

Resumen

Sarria Zapata H.: Algunos problemas de preservación lineal sobre espacios de matrices simétricas, antisimétricas y hermitianas. Acad. Colomb. Cienc. **26**(99): 261-270, 2002. ISSN 0370-3908.

El teorema central de este artículo caracteriza las transformaciones lineales que preservan simultáneamente matrices simétricas y antisimétricas complejas. También, damos algunas caracterizaciones para las transformaciones ortogonales complejas y unitarias que preservan matrices simétricas y hermitianas respectivamente.

Palabras clave: Matrices simétricas, antisimétricas y hermitianas, problemas de preservación lineal.

Abstract

The central theorem in this paper characterizes linear transformations preserving both symmetric and skewsymmetric complex-matrices. We also give some characterizations for complex orthogonal and unitary transformations preserving symmetric or Hermitian matrices.

Key words: Symmetric matrices, skewsymmetric matrices, Hermitian matrices, linear preserver problems.

---

1 Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Financiado por la Universidad Nacional de colombia. E-mail: hsarriaz@matematicas.unal.edu.co. AMS Subject Classification: 15A57; 15A27; 15A18.

1. Introducción

Los problemas de preservación lineal, hacen parte de un área de investigación de la teoría de matrices y operadores. En esta área, se estudian las caracterizaciones de los operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial de matrices, que preservan ciertas propiedades, subconjuntos o relaciones. En [1] y [2], Chi-Kwong Li, et al. hacen una excelente introducción al tema, e incluyen algunos problemas abiertos.

Fröbenius, en 1887, inicia el estudio de los problemas de preservación lineal, caracterizando los operadores lineales $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ (en donde $\mathcal{M}_n(C)$ representa el espacio de las matrices con entradas complejas $n \times n$) que preservan el determinante , y adicionalmente caracteriza aquellos que preservan el espectro. Una versión actualizada de sus resultados puede encontrarse en [3]. Una caracterización de los operadores lineales que preservan matrices hermitianas, la da D.Hill en [4]. En cuanto a los operadores lineales que preservan matrices normales, M.Kunicki y D.Hill, en [5], hacen un estudio completo de este problema.

En el presente artículo se plantean algunas caracterizaciones interesantes para los operadores lineales que preservan simultáneamente matrices simétricas y antisimétricas complejas. Además, se suministra un método práctico y sencillo, que permite, en términos de la matriz de representación del operador en la base canónica, determinar si éste efectúa o no la preservación. Adicionalmente, consideramos los operadores lineales que preservan la estructura espectral y probamos que estos son ortogonales complejos (respectivamente, unitarios) si, y solo si, preservan matrices simétricas complejas (respectivamente, hermitianas).

2. Preliminares y notaciones

A lo largo de este artículo, $S_n(C)$ denotará el subespacio de las matrices simétricas de $\mathcal{M}_n(C)$ con elementos complejos. La *traspuesta* de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(C)$ la denotamos por A^{tr} y su *adjunta hermitiana* por A^* , $\bar{A}$ denotará la matriz cuyas componentes son los conjugados de las componentes de A. El *producto de Kronecker* de un par de matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(C)$ es la matriz, que denotaremos por $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n^2}(C)$, tal que

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

Es importante tener en cuenta que en todo el artículo se usará el mismo símbolo para representar tanto a un operador lineal como a su correspondiente matriz de representación en la base canónica.

Definición 2.1. *A cada matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(C)$, le asociamos el vector $\mathrm{vec}\,(A) \in C^{n^2}$ definido por*

$$\mathrm{vec}\,(A) := [a_{11}, \ldots, a_{n1}, a_{12}, \ldots, a_{n2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}]^{\mathrm{tr}}.$$

Usaremos también la siguiente extensión del producto interior euclidiano

Definición 2.2. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(C) \times \mathcal{M}_n(C) \to C$ la función determinada por la ecuación*

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{vec}\,(B)^* \mathrm{vec}\,(A)$$

donde $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$.

Definición 2.3. *Diremos que una colección de n^2 autovectores para un operador lineal*

$$\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$$

es completa, si los autovectores que conforman la colección son linealmente independientes.

Algunas relaciones entre el producto interior y la traza que serán útiles posteriormente, se plantean en la siguiente proposición. La prueba es consecuencia inmediata de la definición de producto interior dada arriba.

Proposición 2.1. *Para todo $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$,*

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(B^* A) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{tr}} \bar{B}).$$

Proposición 2.2. *$S_n(C)^\perp$ coincide con el espacio de las matrices antisimétricas.*

Prueba. Denotemos por $\widehat{S}$ el subespacio de las matrices antisimétricas. Sean $A \in S_n(C)$ y $B \in \widehat{S}$. Nótese que por ser B antisimétrica $B = \dfrac{B - B^{\mathrm{tr}}}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(B^* A) &= \mathrm{Tr}\Big(\frac{B^* - \bar{B}^{\mathrm{tr}}}{2} A\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(B^* A) - \mathrm{Tr}(\bar{B} A)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{tr}} \bar{B}) - \mathrm{Tr}((A\bar{B})\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(A\bar{B}) - \mathrm{Tr}(A\bar{B})\Big) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos de la última igualdad que $\widehat{S} \subseteq S_n^\perp$. Sea $B \in S_n^\perp$, entonces $\mathrm{Tr}(B^* A) = 0$ para todo $A \in S_n$. Sean, $B = (b_{i,j})_{n \times n}$, $r, s \in N$ tales que $1 \leq r, s \leq n$

con $r \neq s$ y $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})_{n\times n}$, tal que $\tilde{a}_{r,s} = \tilde{a}_{s,r} = 1$ y $\tilde{a}_{i,j} = 0$ para $(i,j) \neq (r,s)$ y $(i,j) \neq (s,r)$. Entonces, por hipótesis, $\text{Tr}(B^*\tilde{A}) = 0$. En consecuencia, $b_{rs} + b_{sr} = 0$, es decir $b_{rs} = -b_{sr}$. Ahora definamos los elementos de $\tilde{A}$ de la siguiente manera, tomemos $\tilde{a}_{rr} = 1$ y $\tilde{a}_{ij} = 0$ para $(i,j) \neq (r,r)$. Por hipótesis, tenemos $\text{Tr}(B^*\tilde{A}) = 0$, por lo tanto, $b_{rr} = 0$. De lo anterior, podemos concluir que $b_{ij} = -b_{ji}$, para $i \neq j$ y que $b_{ii} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Esto significa que la matriz B es antisimétrica. ◇

El siguiente resultado será útil posteriormente, y su prueba es inmediata.

Proposición 2.3. *Todo autovector del operador de trasposición T es o una matriz simétrica o una matriz antisimétrica.*

3. Caracterizaciones

Teorema 3.1 *Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ una transformación lineal. Entonces, ϕ preserva simetría y antisimetría si y sólo si $\phi T = T\phi$, donde T denota el operador de trasposición.*

Prueba. Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ una transformación lineal que preserva simetría y antisimetría, y sea $X \in \mathcal{M}_n(C)$. Sabemos entonces que existen $X_s \in S_n(C)$ y $X_a \in S_n(C)^\perp$ tales que $X = X_s + X_a$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\phi T(X) &= \phi T(X_s + X_a) = \phi T(X_s) + \phi T(X_a) \\
&= \phi(X_s) + \phi(-X_a) = \phi(X_s) - \phi(X_a) \\
&= T\phi(X_s) + T\phi(X_a) = T\phi(X_s + X_a) \\
&= T\phi(X).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\phi T = T\phi$. Si X es una matriz simétrica, entonces

$$\phi(X) = \phi T(X) = T\phi(X).$$

Concluimos de lo anterior que ϕ preserva simetría. Si X es una matriz antisimétrica, entonces

$$\phi(X) = \phi(-T(X)) = -T\phi(X).$$

Concluimos de lo anterior que ϕ preserva antisimetría. ◇

Las siguientes dos proposiciones pueden encontrarse en [6, pág. 103] y en [7, pág. 215], respectivamente, y serán útiles en la caracterización de los operadores normales que preservan matrices simétricas.

Proposición 3.1. *Sean A y B dos matrices normales de orden n. Entonces, $AB = BA$ si, y sólo si, A y B tienen una base común de autovectores ortonormales.*

Proposición 3.2. *Sean, V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior, y $\phi : V \to V$ un operador lineal. Entonces, ϕ es normal si, y solo si para todo subespacio invariante $W \subseteq V$ de ϕ, $W^\perp$ es también un subespacio invariante de ϕ.*

Teorema 3.2. *Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador normal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *ϕ preserva simetría.*
(b) *ϕ preserva antisimetría.*
(c) *Existe una base ortonormal de autovectores de ϕ, conformada por matrices simétricas o antisimétricas.*

Prueba. La equivalencia entre (a) y (b) sigue directamente de las proposiciones 2.2 y 3.2. Para probar que (a) implica (c), supongamos que ϕ preserva simetría. Entonces por el Teorema 3.1, ϕ conmuta con el operador de trasposición T. De aquí y las proposiciones 2.3 y 3.1, existe un conjunto ortonormal con n^2 autovectores de ϕ linealmente independientes, conformado por matrices simétricas o antisimétricas. Probemos ahora que (c) implica (a). Supongamos que $\{V_1, V_2, \cdots, V_{n^2}\}$ es un conjunto ortonormal de n^2 autovectores de ϕ, conformado por matrices que son simétricas o antisimétricas. Por el teorema espectral

$$\phi = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \,\text{vec}\,(V_i)\text{vec}\,(V_i)^*,$$

donde λ_i es el autovalor correspondiente al autovector V_i. Sea S una matriz simétrica. Entonces,

$$\phi(S) = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i \,\text{vec}\,(V_i)\text{vec}\,(V_i)^*\text{vec}\,(S).$$

Nótese que en la última igualdad, los sumandos que tienen un autovector V_i antisimétrico se anulan, por ser los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas ortonormales. En consecuencia, solo nos quedan sumandos con autovectores simétricos. Obsérvese además, que el término $V_i^* S \in C$. Entonces, si V_i es una matriz simétrica, es evidente que $V_i V_i^* S$ es también una matriz simétrica. Concluimos de lo anterior que $\phi(S)$ es simétrica. En consecuencia ϕ preserva simetría. De forma análoga se puede probar que ϕ preserva antisimetría.◇

Para el caso de los operadores lineales diagonalizables, no podemos afirmar algo tan fuerte, como lo que se afirma en el teorema anterior:

Teorema 3.3. *Sea $L : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador lineal diagonalizable. Si L preserva simetría y antisimetría, entonces tiene una colección completa de autovectores que son matrices simétricas o matrices antisimétricas.*

Prueba. Sea $L : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador diagonalizable. Supongamos que L preserva simetría y antisimetría. Entonces, por hipótesis existe una matriz no singular $S \in M_{n^2}$ tal que

$$S^{-1}LS = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^2}\}\ , \tag{1}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n^2}$ son los autovalores de L. Probaremos que por cada autovector V de L con autovalor λ, donde V no es ni una matriz simétrica ni una antisimétrica, existe un autovector simétrico V_s y un autovector antisimétrico V_a, ambos con autovalor λ. Sea V un autovector de L el cual no es simétrico ni antisimétrico. Entonces existen una matriz simétrica V_s y una matriz antisimétrica V_a no nulas, tales que $V = V_s + V_a$. De lo cual se sigue que

$$L(V) = \lambda V = \lambda V_s + \lambda V_a\ . \tag{2}$$

Por otro lado tenemos que

$$L(V) = \lambda L(V_s) + \lambda L(V_a).$$

Concluimos que $L(V_s) = \lambda V_s$ y que $L(V_a) = \lambda V_a$. De acuerdo con la ecuación (1), las columnas de la matriz S conforman una colección completa de autovectores para L.

Denotemos con $S_1, S_2, \ldots, S_{n^2}$ las columnas de S. Probaremos que existe una colección completa de autovectores para L, $\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_{n^2}\}$, en donde $\tilde{S}_j$ para $1 \leq j \leq n$ es una matriz simétrica o una matriz antisimétrica. La colección $\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_{n^2}\}$ puede construirse de la siguiente manera:

Caso 1: Si S_j es simétrica o antisimétrica entonces tomamos $\tilde{S}_j = S_j$.

Caso 2: Si S_j no es simétrica ni antisimétrica, entonces por lo que hemos demostrado arriba, existe un par de matrices no nulas V_s y V_a simétrica y antisimétrica, respectivamente, las cuales son autovectores de L, tales que $S_j \in \langle\{V_s, V_a\}\rangle$. Además, debe existir un único $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$, tal que $S_k \in \langle\{V_s, V_a\}\rangle$. En caso contrario, tendríamos que $\{S_1, S_2, \ldots, S_{j-1}, S_{j+1}, S_{n^2}\} \cup \{V_s, V_a\}$ es una colección completa de autovectores para L, lo cual es una contradicción. Nótese, que no puede existir $r \neq j, k$, tal que $S_r \in \langle\{V_s, V_a\}\rangle$, pues de lo contrario $S_r \in \langle\{S_j, S_k\}\rangle$, lo cual es absurdo. En este caso podemos hacer $\tilde{S}_{\text{mín}\{k,j\}} = S_a$ y $\tilde{S}_{\text{máx}\{k,j\}} = S_s$. $\diamond$

Observación 1. El recíproco del teorema anterior es falso. Para ver esto, tomese el operador lineal

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza en la forma

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

En esta igualdad claramente se observa, que la colección

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\},$$

está conformada por matrices simétricas y antisimétricas, y es un conjunto completo de autovectores de T, ya que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Además,

$$T(I_2) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} 2 \end{bmatrix}^{\text{tr}}$$

no es una matriz simétrica.

Observación 2. Una pregunta que surge del teorema 3.3 es si todos los operadores diagonalizables que preservan simetría y antisimetría son normales. El siguiente ejemplo la responde negativamente. Considérese el operador

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Obsérvese que este operador no es normal, ya que

$$\phi\phi^* - \phi^*\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Sin embargo, ϕ es diagonalizable pues sus autovalores

$$0, 1, \quad \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}), \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) ,$$

son todos distintos.

3.1. Una caracterización general

Usaremos un procedimiento similar al de D. Hill en [4], para caracterizar los operadores lineales que preservan simetría y antisimetría.

Haremos uso de la siguiente notación: sea

$$\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$$

un operador lineal. Representaremos a ϕ mediantte la estructura matricial en bloques

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} ,$$

en donde $\phi_{ij} = (q_{kl}^{ij})_{n\times n}$. Escribiremos $\phi = ((q_{kl}^{ij}))_{n\times n}$ para representar esta estructura.

Teorema 3.1.1. *Un operador lineal $\phi = ((q_{kl}^{ij}))_{n\times n}$ sobre $\mathcal{M}_n(C)$, preserva simetría y antisimetría si, y solo si $q_{kl}^{ij} = q_{ij}^{kl}$ para $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n$.*

Prueba. Sean, ϕ un operador lineal que preserva matrices simétricas y antisimétricas y E_{ij} la matriz con un 1 en la posición (i, j) y cero en las demás posiciones. Entonces, $\phi(E_{jl} + E_{lj})$ es una matriz simétrica y $\phi(E_{jl} - E_{lj})$ es una matriz antisimétrica. Observemos que

$$\phi(E_{jl} + E_{lj}) = \begin{bmatrix} q_{1l}^{1j} + q_{1j}^{1l} & q_{1l}^{2j} + q_{1j}^{2l} & \cdots & q_{1l}^{nj} + q_{1j}^{nl} \\ q_{2l}^{1j} + q_{2j}^{1l} & q_{2l}^{2j} + q_{2j}^{2l} & \cdots & q_{2l}^{nj} + q_{2j}^{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{nl}^{1j} + q_{nj}^{ll} & q_{nl}^{2j} + q_{nj}^{2l} & \cdots & q_{nl}^{nj} + q_{nj}^{nl} \end{bmatrix}$$

y

$$\phi(E_{jl} - E_{lj}) = \begin{bmatrix} q_{1l}^{1j} - q_{1j}^{1l} & q_{1l}^{2j} - q_{1j}^{2l} & \cdots & q_{1l}^{nj} - q_{1j}^{nl} \\ q_{2l}^{1j} - q_{2j}^{1l} & q_{2l}^{2j} - q_{2j}^{2l} & \cdots & q_{2l}^{nj} - q_{2j}^{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{nl}^{1j} - q_{nj}^{1l} & q_{nl}^{2j} - q_{nj}^{2l} & \cdots & q_{nl}^{nj} - q_{nj}^{nl} \end{bmatrix} .$$

Concluimos que para $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n$,

$$q_{kl}^{ij} + q_{kj}^{il} = q_{il}^{kj} + q_{ij}^{kl} \tag{3}$$

y

$$q_{kl}^{ij} - q_{kj}^{il} = -(q_{il}^{kj} - q_{ij}^{kl}). \tag{4}$$

De las dos últimas igualdades se concluye que $q_{kl}^{ij} = q_{ij}^{kl}$. Ahora asumamos que $q_{kl}^{ij} = q_{ij}^{kl}$ para $i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, por (3) $\phi(E_{jl} + E_{lj})$ es una matriz simétrica, y por(4) $\phi(E_{jl} - E_{lj})$ es una matriz antisimétrica. Además, los conjuntos de matrices $\{E_{jl} + E_{lj}\}_{j<l}$, $\{E_{jl} - E_{lj}\}_{j<l}$, $\{E_{jj}\}$, donde $j, l = 1, 2, \ldots, n$ contienen todos los elementos que conforman las bases para los espacios de las matrices simétricas y antisimétricas. Concluimos de lo anterior, que ϕ preserva matrices simétricas y antisimétricas. $\diamond$

3.2. Ejemplos y aplicaciones

Ejemplo 1. El siguiente operador lineal preserva matrices simétricas y antisimétricas, pero no matrices hermitianas.

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & i & i & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & i & -1 \end{bmatrix} .$$

En efecto, una verificación directa sobre los elementos de ϕ, muestra que ϕ satisface el Teorema 3.1.1.

Ahora tomemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} \text{ entonces } \phi(A) = \begin{bmatrix} 1+2i & -1 \\ -1 & 1+2i \end{bmatrix} .$$

Podemos observar que A es una matriz hermitiana. Sin embargo, $\phi(A)$ no es hermitiana.

Ejemplo 2. El siguiente operador lineal preserva matrices hermitianas y simétricas, pero no matrices antisimétricas.

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & i & -i & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & i & -1 \end{bmatrix}$$

En efecto, sean $A \in H_2$ y $B \in S_2(C)$. Entonces,

$$A = \begin{bmatrix} a & b-ci \\ b+ci & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix},$$

en donde $a, b, c, d \in R$ y $e, f, g \in C$. Por lo tanto,

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} a-2c-d & d-a \\ d-a & a+2c-d \end{bmatrix}$$

y

$$\phi(B) = \begin{bmatrix} e-g & g-e \\ g-e & e-g \end{bmatrix}.$$

Así verificamos que ϕ preserva matrices hermitianas y simétricas. Ahora nótese que $\phi_{1,2}^{1,1} = i \neq -i = \phi_{1,1}^{1,2}$, de modo que ϕ no puede preservar antisimetría.

4. Otros problemas de preservación lineal

Nuestro interés en la presente sección, está centrado en las propiedades que caracterizan a los operadores ortogonales complejos $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$, que preservan los conos que se forman al hacer girar las matrices (vistas como vectores euclidianos) alrededor de la matriz idéntica. Veremos, que los operadores ortogonales que preservan estructura espectral hacen parte de esta familia, y que además, preservan conmutatividad y matrices simétricas. Los caracterizaremos como aquellos que pueden factorizarse en la forma $Q \otimes Q$ ó $Q \otimes QT$, donde Q es una matriz ortogonal compleja de orden $n \times n$ y T es la matriz asociada al operador de trasposición en la base canónica.

Observación 4.1. Haremos uso del siguiente resultado (véase [8, pág. 254]): Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(C)$. Entonces la ecuación matricial

$$AXB = C$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(B^{\text{tr}} \otimes A)\text{vec}\,(X) = \text{vec}\,(C).$$

Definición 4.2. *La superficie cónica asociada a una matriz $A \in \mathcal{M}_n(C)$, $A \neq 0$ es el conjunto*

$$SC(A) = \Big\{X \in \mathcal{M}_n(C) | \text{Tr}(A)\|X\|_F = \text{Tr}(X)\|A\|_F\Big\}.$$

Si $A = 0$ entonces $SC(A) = \{0\}$.

Definición 4.3 *El borde cónico asociado a una matriz $A \in \mathcal{M}_n(C), A \neq 0$ es el conjunto*

$$BC(A) = \Big\{X \in SC(A) | \text{Tr}(X) = \text{Tr}(A)\Big\}.$$

Si $A = 0$ entonces $BC(A) = \{0\}$.

4.1. Preservación de bordes cónicos

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$, entonces

$$\langle A, B\rangle = \text{vec}\,(B)^* \cdot \text{vec}\,(A) = \text{Tr}(B^* A)$$

y

$$\text{vec}\,(B)^{\text{tr}} \cdot \text{vec}\,(A) = \text{Tr}(B^{\text{tr}} A).$$

4.1.1. Caracterización

Proposición 4.1. *Si I es la matriz idéntica tenemos*

(a) $SC(I) = \Big\{\alpha I | \alpha \in R^{\geq 0}\Big\}$.
(b) $BC(I) = \{I\}$.

Prueba. (a) Sea $X \in SC(I)$. Entonces, si $X = 0$ evidentemente $X \in \Big\{\alpha I | \alpha \in R^{\geq 0}\Big\}$. Supongamos que $X \neq 0$. Entonces como por hipótesis $\text{Tr}(X)\sqrt{n} = n\|X\|_F$, resulta

$$\frac{\langle X, I\rangle}{\|X\|_F} = \sqrt{n}\,. \tag{5}$$

Por consiguiente,

$$\langle X, I\rangle = \sqrt{n}\|X\|_F\,.$$

Sean $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(R)$ tales que $X = X_1 + iX_2$, entonces

$$\langle X_1, I\rangle - i\langle X_2, I\rangle = \sqrt{n}\|X\|_F\,.$$

En consecuencia,

$$\langle X_1, I\rangle = \sqrt{n}\|X_1 + iX_2\|_F\,.$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_1)^2 &= n\langle X_1 + iX_2, X_1 + iX_2\rangle \\ &= n\Big(\langle X_1, X_1\rangle + \langle X_2, X_2\rangle + i\langle X_2, X_1\rangle \\ &\qquad -i\langle X_2, X_1\rangle\Big) \\ &= n\Big(\|X_1\|_F^2 + \|X_2\|_F^2\Big). \end{aligned} \tag{6}$$

Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Shwarz implica

$$|\text{Tr}(X_1)| \leq \sqrt{n}\|X_1\|_F\,,$$

de donde

$$\text{Tr}(X_1)^2 \leq n\|X_1\|_F^2. \tag{7}$$

Se concluye de (6) y (7) que $X_2 = 0$ y que $\text{Tr}(X_1)^2 = n\|X_1\|_F^2$. Entonces, $X = X_1$ y

$$\frac{|\langle X, I\rangle|}{\|X\|_F\|I\|_F} = 1. \tag{8}$$

Concluimos que $X = \alpha I$, para algún $\alpha \in R^{\neq 0}$. De (5) y (8) necesariamente se tiene que $\alpha > 0$.

(b) Se sigue directamente de (a) y de la definición de $BC(I)$. $\diamond$

Teorema 4.1. *Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador ortogonal complejo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\phi(I) = I$.
(b) $\text{Tr}(\phi(A)) = \text{Tr}(A)$, *para todo* $A \in \mathcal{M}_n(C)$.
(c) $\phi(BC(A)) = BC(A)$ *para todo* $A \in \mathcal{M}_n(C)$.
(d) $\phi(SC(A)) = SC(A)$ *para todo* $A \in \mathcal{M}_n(C)$.

Prueba. (a) $\Longrightarrow$ (b): Supongamos que $\phi(I) = I$, y que $A \in \mathcal{M}_n(C)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\phi(A)) &= \text{Tr}(\phi(A)^{\text{tr}}) \\ &= \text{Tr}(\phi(A)^{\text{tr}} I) \\ &= \text{Tr}(\phi(A)^{\text{tr}}\phi(I)) \\ &= \text{vec}\,(\phi(A))^{\text{tr}} \cdot \text{vec}\,(\phi(I)). \end{aligned} \tag{9}$$

Recordando que estamos usando ϕ para denotar a un operador lineal y a la matriz que lo representa en la base canónica, entonces

$$\begin{aligned} \text{vec}\,(\phi(A))^{\text{tr}} \cdot \text{vec}\,(\phi(I)) &= \Big(\phi\text{vec}\,(A)\Big)^{\text{tr}} \cdot \phi\text{vec}\,(I) \\ &= \text{vec}\,(A)^{\text{tr}}\phi^{\text{tr}}\phi\text{vec}\,(I) \\ &= \text{vec}\,(A)^{\text{tr}}\text{vec}\,(I) \\ &= \text{Tr}(A^{\text{tr}}I) \\ &= \text{Tr}(A). \end{aligned} \tag{10}$$

De (9) y (10), concluimos que $\text{Tr}(\phi(A)) = \text{Tr}(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}_n(C)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sea $X \in BC(A)$. Entonces, $X \in SC(A)$ y $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(A)$. Además, por hipótesis $\text{Tr}(\phi(X)) = \text{Tr}(X)$, y por ser ϕ ortogonal $\|\phi(X)\|_F = \|X\|_F$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X)\|A\|_F = \text{Tr}(A)\|X\|_F &= \text{Tr}(\phi(X))\|A\|_F \\ &= \text{Tr}(A)\|\phi(X)\|_F \end{aligned}$$

y

$$\text{Tr}(\phi(X)) = \text{Tr}(A).$$

Podemos concluir que $\phi(X) \in BC(A)$. Con esto hemos probado que $\phi(BC(A)) \subseteq BC(A)$. Nos queda por probar que $BC(A) \subseteq \phi(BC(A))$, lo cual es equivalente a demostrar que para todo $X \in BC(A)$ existe un $Y \in BC(A)$ tal que $X = \phi(Y)$. Sea $X \in BC(A)$. Primero observemos que existe $Y \in \mathcal{M}_n(C)$ tal que $\phi(Y) = X$ por ser ϕ una biyección . Entonces, $\text{Tr}(\phi(Y)) = \text{Tr}(X)$. Y por ser ϕ ortogonal $\|Y\|_F = \|\phi(Y)\|_F = \|X\|_F$. Además, por hipótesis $\text{Tr}(\phi(Y)) = \text{Tr}(Y)$. De lo anterior concluimos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X)\|A\|_F = \text{Tr}(A)\|X\|_F &= \text{Tr}(Y)\|A\|_F \\ &= \text{Tr}(A)\|Y\|_F \end{aligned}$$

y

$$\text{Tr}(Y) = \text{Tr}(A).$$

De donde se sigue que $Y \in BC(A)$.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Si $A = 0$, el resultado es evidente, supongamos entonces que $A \neq 0$. Sea $X \in SC(A)$, entonces

$$\text{Tr}(A)\|X\|_F = \text{Tr}(X)\|A\|_F. \tag{11}$$

Por otro lado $X \in BC(X)$, de donde por la hipótesis $\phi(X) \in BC(X)$. Por lo tanto $\text{Tr}(\phi(X)) = \text{Tr}(X)$. Además, por ser ϕ ortogonal a $\|\phi(X)\|_F = \|X\|_F$. Podemos concluir que

$$\text{Tr}(A)\|\phi(X)\|_F = \text{Tr}(\phi(X))\|A\|_F,$$

lo cual significa que $\phi(X) \in SC(A)$. Con esto hemos probado que $\phi(SC(A)) \subseteq SC(A)$.

Ahora tomemos $X \in SC(A)$, entonces la igualdad (11) se cumple. Por hipótesis, $X \in BC(X)$ implica $X \in \phi(BC(X))$. En consecuencia $X = \phi(Y)$ para algún $Y \in BC(X)$. Se sigue que

$$\text{Tr}(Y) = \text{Tr}(X).$$

Por otro lado tenemos que $\|X\|_F = \|Y\|_F$. Y Usando (11)

$$\text{Tr}(A)\|Y\|_F = \text{Tr}(Y)\|A\|_F,$$

lo cual significa que $Y \in SC(A)$, por lo tanto $X = \phi(Y) \in \phi(SC(A))$.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Por hipótesis, $\phi(SC(I)) = SC(I)$ y usando la proposición 4.1 tenemos $\phi(I) = \alpha I$ para algún $\alpha \in R^{\geq 0}$. Pero ϕ preserva norma, en consecuencia $\alpha = 1$. Concluimos que $\phi(I) = I$. $\diamond$

Corolario 4.1. *La colección de todos los operadores ortogonales que preservan bordes cónicos forman un subgrupo del grupo ortogonal.*

Prueba. Es directa del item (a) en el teorema anterior. $\diamond$

Observación 4.2. Es interesante observar, que si $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ es un operador unitario que preserva matrices hermitianas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\phi(I) = I$.
(b) $\mathrm{Tr}(\phi(A)) = \mathrm{Tr}(A)$ para todo $A \in \mathcal{H}_n$.
(c) $\phi(BC(A)) = BC(A)$ para todo $A \in \mathcal{H}_n$.
(d) $\phi(SC(A)) = SC(A)$ para todo $A \in \mathcal{H}_n$.

La prueba de esta afirmación, es similar a la del teorema 4.1 y sólo debemos tener en la cuenta, que si $A \in \mathcal{H}_n$ entonces $\mathrm{Tr}(\phi(A)) = \mathrm{Tr}(\phi(A)^*)$.

4.1.2. El operador $Q \otimes Q$, Q ortogonal

Si Q es una matriz ortogonal de orden n, es fácil ver que $Q \otimes Q$ es una matriz ortogonal de orden n^2. Visto como operador, $Q \otimes Q$ tiene algunas propiedades interesantes:

1. Preserva la matriz idéntica y en consecuencia preserva bordes cónicos.
2. Preserva estructura espectral y conmutatividad.
3. Preserva matrices simétricas.
4. El conjunto de los operadores ortogonales que factorizan en la forma $Q \otimes Q$, conforman un subgrupo del grupo ortogonal.

Estas propiedades conducen las siguientes preguntas:

1. ¿Existen operadores ortogonales que preserven bordes cónicos, y/o estructura espectral, y/o conmutatividad, y/o matrices simétricas que no factoricen en la forma $Q \otimes Q$, para alguna matriz ortogonal Q de orden n?

2. ¿Cuál es el subgrupo ortogonal más grande que preserva bordes cónicos y matrices simétricas, y/o estructura espectral, y/o conmutatividad?

Se resolverán algunas de estas preguntas en las siguientes proposiciones y teoremas. El objetivo inmediato consiste en probar la siguiente afirmación:

Un operador lineal que preserva la estructura espectral, factoriza en las formas $Q \otimes Q$ ó $Q \otimes QT$, donde Q es una matriz ortogonal compleja de orden $n \times n$ y T es la matriz asociada al operador de trasposición en la base canónica, si, y sólo si, preserva matrices simétricas.

Antes de presentar la prueba de esta afirmación, son necesarios algunos resultados preliminares.

Proposición 4.2. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$. Si $A \otimes B = I_{n^2}$ entonces existen escalares $\alpha, \beta \neq 0$ tales que $A = \alpha I_n$, $B = \beta I_n$.*

Prueba. Sean $A = (a_{ij})_{n\times n}$ y $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Por hipótesis, $a_{ij}B = 0$ para $i \neq j$ y $a_{ii}B = I_n$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $a_{ii}b_{jj} = 1$ para $i, j = 1, \ldots, n$. En consecuencia existen escalares $\alpha, \beta \neq 0$ tales que $a_{ii} = \alpha$, $b_{jj} = \beta$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Además, $a_{ij}\alpha = 0$ y $b_{ij}\beta = 0$ para $i \neq j$, por consiguiente $a_{ij} = b_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Concluimos que $A = \alpha I_n$, $B = \beta I_n$. ◇

Teorema 4.2. *Sean $\widehat{Q}$ una matriz ortogonal de orden $n^2 \times n^2$ y S una matriz no singular de orden $n \times n$ tales que $\widehat{Q} = S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}$. Entonces existe una matriz ortogonal Q de orden $n \times n$ tal que $\widehat{Q} = Q \otimes Q$.*

Prueba. Como $\widehat{Q}$ es ortogonal entonces

$$\begin{aligned} \left(S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}\right)\left(S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}\right)^{\mathrm{tr}} &= I_{n^2} \\ \left(S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}\right)\left((S^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} \otimes (S^{-1})^{\mathrm{tr}}\right) &= \\ \left(S^{\mathrm{tr}}S\right) \otimes \left(S^{-1}(S^{-1})^{\mathrm{tr}}\right) &= \end{aligned}$$

Por la proposición 4.2, existe un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $S^{\mathrm{tr}}S = \alpha I_n$, de aquí se sigue que $S^{-1} = \frac{1}{\alpha}S^{\mathrm{tr}}$. Hagamos $Q = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}S^{\mathrm{tr}}$, entonces $QQ^{\mathrm{tr}} = I_n$. Por consiguiente Q es ortogonal y $\widehat{Q} = Q \otimes Q$. ◇

Teorema 4.3. [Fröbenius 1897] *Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *ϕ preserva polinomios característicos.*
(ii) *ϕ preserva polinomios característicos de matrices hermitianas.*
(iii) *ϕ preserva determinante y traza.*
(iv) *Existe una matriz no singular $S \in \mathcal{M}_n(C)$ tal que $\phi(X) = S^{-1}XS$ ó $\phi(X) = S^{-1}X^{\mathrm{tr}}S$, para todo $X \in \mathcal{M}_n(C)$.*

De los teoremas anteriores se sigue el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sea $\phi : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ un operador lineal que preserva estructura espectral. Entonces, ϕ es ortogonal (respectivamente, unitario) si y sólo si ϕ preserva matrices simétricas (respectivamente, matrices hermitianas)*

Prueba. De acuerdo con el teorema de Fröbenius, existe una matriz no singular S, tal que o bien $\phi(X) = S^{-1}XS$ o $\phi(X) = S^{-1}X^{\mathrm{tr}}S$, para todo $X \in \mathcal{M}_n(C)$.

$\Longleftarrow$) : Sea $A \in S_n(C)$, entonces como ϕ preserva matrices simétricas tenemos que $(S^{-1}AS)^{\mathrm{tr}} = S^{-1}AS$, así $S^{\mathrm{tr}}A(S^{-1})^{\mathrm{tr}} = S^{-1}AS$ y de aquí

$$SS^{\mathrm{tr}}A = ASS^{\mathrm{tr}}. \tag{12}$$

Ahora vamos a probar que SS^{tr} es una matriz escalar no nula. Sea $U = (u_{ij})_{n\times n} = SS^{\mathrm{tr}}$ y hagamos $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, donde $\lambda_i \neq 0$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Por (12), $u_{ij}\lambda_i = u_{ij}\lambda_j$ para $i \neq j$, concluimos que $u_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Hagamos $A = (a_{ij})_{n\times n}$, donde $a_{ij} = 1$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Por (12), $u_{11} = u_{22} = \cdots = u_{nn}$. Se concluye que $SS^{\mathrm{tr}} = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$, donde λ es una constante no nula (si $\lambda = 0$, entonces $S = 0$ lo cual es una contradicción ya que S es invertible). Entonces, $\frac{1}{\lambda}SS^{\mathrm{tr}} = I_n$. Finalmente tomemos $Q = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}S$. Observemos que Q es ortogonal y que $\phi(X) = Q^{\mathrm{tr}}XQ$ ó $\phi(X) = Q^{\mathrm{tr}}X^{\mathrm{tr}}Q$. Por lo tanto, ϕ escrito en forma matricial es $Q^{\mathrm{tr}} \otimes Q^{\mathrm{tr}}$ ó $Q^{\mathrm{tr}} \otimes Q^{\mathrm{tr}}T$, en donde T representa el operador de trasposición el cual es ortogonal. Por consiguiente, ϕ es ortogonal.

$\Longrightarrow$) : Ahora supongamos que ϕ es ortogonal. Como ϕ preserva estructura espectral, por el teorema de Fröbenius existe una matriz no singular S, tal que $\phi = S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}$ ó $\phi = S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}T$. Nótese que si $\phi = S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}T$ entonces $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1} \in \mathcal{O}_{n^2}(C)$ (grupo de las matrices ortogonales de elementos en $\mathbb{C}$) por ser ϕ y T ortogonales. Por el teorema 4.4, $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}$ se puede escribir en la forma $Q \otimes Q$ en donde Q es una matriz ortogonal. Se sigue entonces que $\phi(X) = QXQ^{\mathrm{tr}}$ ó $\phi(X) = QX^{\mathrm{tr}}Q^{\mathrm{tr}}$ para todo $X \in \mathcal{M}_n(C)$, es decir, ϕ preserva simetría. $\diamond$

4.1.3. El Caso 2×2

El caso 2×2 tiene algunos aspectos muy particulares. En primer lugar tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.3.1. *El operador $\phi : \mathcal{M}_2(C) \to \mathcal{M}_2(C)$ preserva estructura espectral si, y sólo si, preserva traza y norma.*

Prueba. La proposición es una consecuencia directa del siguiente hecho: sean $\lambda_1 \leq \lambda_2$ los autovalores de $A \in H_2$. Nótese que si hacemos

$$m = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{2} \quad y \quad s = \sqrt{\frac{\|A\|^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}\right)^2},$$

entonces $\lambda_1 = m - s$ y $\lambda_2 = m + s$.

Teorema 4.3.1 *Sea $\phi : \mathcal{M}_2(C) \to \mathcal{M}_2(C)$ un operador ortogonal, tal que $\phi(I) = I$. Entonces:*

(i) *ϕ preserva estructura espectral.*
(ii) *ϕ factoriza en la forma $Q\otimes Q$ ó $Q\otimes QT$ donde Q es una matriz ortogonal de $\mathcal{M}_2(C)$ y T es la matriz asociada al operador de trasposición .*
(iii) *ϕ preserva simetría.*

Prueba. Por el teorema 4.2.1, ϕ preserva traza, y puesto que ϕ preserva norma, ϕ preserva estructura espectral de matrices hermitianas por la proposición 4.3. Entonces, por el teorema de Fröbenius, existe una matriz nosingular S tal que $\phi(X) = S^{-1}XS$ ó $\phi(X) = S^{-1}X^{\mathrm{tr}}S$ para todo $X \in \mathcal{M}_2$. concluimos que $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1} \in \mathcal{O}_n(C)$ o $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1}T \in \mathcal{O}_n(C)$, donde T denóta la matriz asociada al operador de trasposición en la base canónica. Por consiguiente, $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1} \in \mathcal{O}_n(C)$ ya que $T \in \mathcal{O}_n(C)$. De aquí y el Teorema 3.2, existe una matriz ortogonal Q de orden 2×2, tal que $S^{\mathrm{tr}} \otimes S^{-1} = Q \otimes Q$. De donde $\phi(X) = Q^{\mathrm{tr}}XQ$ ó $\phi(X) = Q^{\mathrm{tr}}X^{\mathrm{tr}}Q$. para todo $X \in \mathcal{M}_2(C)$, de aquí fácilmente se puede demostrar que ϕ preserva matrices simétricas.$\diamond$

Este teorema no se cumple para $n \geq 3$: en efecto, tomemos las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nótese que estas matrices son ortogonales entre sí. Podemos completar el conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ a una base ortogonal $\{A_1, A_2, A_3 \ldots, A_9\}$ de $\mathcal{M}_3(C)$. Sea $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(C)$, la matriz que tiene un 1 en la posición (i, j) y cero en la demás posiciones. El conjunto $\{E_{i,j} | i, j = 1, 2, 3\}$, forma una base para $\mathcal{M}_3(C)$. Tomemos un operador lineal $\phi : \mathcal{M}_3(C) \to \mathcal{M}_3(C)$ tal que

$$\begin{aligned} \phi(E_{1,1}) &= A_1, & \phi(E_{2,2}) &= A_2, & \phi(E_{3,3}) &= A_3, \\ \phi(E_{1,2}) &= A_4, & \phi(E_{1,3}) &= A_5, & \phi(E_{2,3}) &= A_6, \\ \phi(E_{2,1}) &= A_7, & \phi(E_{3,2}) &= A_8, & \phi(E_{3,1}) &= A_9. \end{aligned}$$

El operador ϕ es ortogonal, pues envía una base ortogonal en una base ortogonal. Nótese que

$$\phi(I) = \phi(E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3}) = A_1 + A_2 + A_3 = I,$$

pero ϕ no preserva conmutatividad ya que $\phi(E_{1,1})\phi(E_{2,2}) \neq \phi(E_{2,2})\phi(E_{1,1})$. En consecuencia, ϕ no factoriza en las formas $Q \otimes Q$ y $Q \otimes QT$, para alguna matriz ortogonal $Q \in \mathcal{M}_3(C)$ y por el teorema 4.4 no preserva estructura espectral.

Teorema 4.3.2. *Sea $\phi : \mathcal{M}_2(C) \to \mathcal{M}_2(C)$ un operador lineal que preserva matrices hermitianas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *ϕ preserva estructura espectral de las matrices hermitianas.*

(ii) *ϕ preserva la matriz idéntica y la norma de las matrices hermitianas.*

(iii) *$\phi(X) = U^*XU$ ó $\phi(X) = U^*X^{\text{tr}}U$, donde U es una matriz unitaria 2×2.*

Prueba. Se sigue de la proposición 4.3.1, del teorema de Fröbenius y de la observación 4.2. $\diamond$

Referencias

[1] **Chi-Kwong Li & S. Pierce**, *Linear preserver problems.* Amer. Mathe. Monthly, **108** (2001), .

[2] **Chi-Kwong Li & Nam-Kiu Tsing**, *Linear Preserver Problems: A Brief Introduction and Some Special Techniques.*

[3] **M. Marcus & B. Moyls**, *Linear tranformations on algebras of matrices.* Canad. J. Math. **11** (1959), 383–396.

[4] **D. Hill**, *Linear transformation which preserve Hermitian matrices.* Linear Algebra Ȧppl. **6** (1973), 257–262.

[5] **C. Kunicki & D. Hill**, *Normal preserving linear transformations.* Linear Algebra Appl. **170** (1992), 107–115.

[6] **R.A. Horn & C.R. Jonhson**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] **R. Grone, Ch. Johnson, M. Sa & H. Wolkowicz**, *Normal matrices.* Linear Algebra Appl. **87** (1987), 213-/225.

[8] **R.A. Horn & C. R. Jonhson**, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.