

APROXIMACIÓN DE LA POTENCIA ASINTÓTICA DE LA PRUEBA DEL RANGO SIGNADO DE WILCOXON

por

Moisés Aranda S.¹ & Jimmy Corzo S.²

Resumen

Aranda S., M. & J. Corzo S.: Aproximación de la potencia asintótica de la prueba de rango signado de Wilcoxon. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **26**(101): 555-563. ISSN 0370-3908.

Se estudia la potencia de la prueba del rango signado de Wilcoxon para muestras de una subfamilia simétrica de la distribución lambda generalizada. Se muestra que para un rango de valores del parámetro λ_4 de la subfamilia tanto la potencia como la consistencia de la prueba de RSW son funciones monótonas no decrecientes dentro del rango especificado de valores λ_4 .

Palabras clave: Pruebas de rango signado, pruebas de rango, función de potencia de una prueba, consistencia de una prueba, distribución lambda generalizada.

Abstract

The power of the Wilcoxon signed range test for samples of a symmetrical subfamily of the generalized lambda distribution is studied. It is shown that the power as well as the consistency of the test are non increasing monotonous functions depending on the symmetry and kurtosis of the generalized lambda distribution.

Key words: Signed rank tests, rank tests, power function of a test, consistency of a test, lambda distribution.

¹ Universidades Sergio Arboleda y Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

² Profesor Asociado Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. AMS *Subject Classification*: 62G10.

1. La prueba del rango signado de Wilcoxon

Sea X_1, \dots, X_N , una muestra aleatoria de una distribución $F(x - \theta)$ donde F tiene mediana única igual a 0 y función de densidad de probabilidad (f.d.p.) $f = F'$. El problema de inferencia consiste en probar la hipótesis

$$H_0 : \theta = 0 \text{ versus} \quad (1)$$

$$H_A : \theta > 0 \text{ (equivalentemente } H_A : \theta = \theta' > 0).$$

La estadística utilizada para la prueba del **rango signado de Wilcoxon** (RSW) se define como la suma de los rangos de las observaciones positivas de la muestra entre los valores absolutos $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_N|$. Se rechaza H_0 para un $\alpha \in (0, 1)$ fijo, cuando $T \geq k$, donde k se puede determinar por construcción de la distribución exacta de T de manera que $P(T \geq k) \leq \alpha$. Formalmente la estadística de prueba se puede expresar como sigue: Sean $|X|X_{(1)} \leq |X_{(2)}| \leq \dots \leq |X_{(N)}|$ los valores absolutos ordenados en forma ascendente y sea

$$W_i = \begin{cases} 1, & \text{si } |X_{(i)}| \text{ proviene de una observación} \\ & \text{positiva} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2)$$

Entonces la estadística para la prueba del RSW se puede escribir como:

$$T = \sum_{i=1}^N i W_i \quad (3)$$

Dado que W_1, \dots, W_N son variables aleatorias independientes bajo H_0 , con

$$P(W_i = 0) = P(W_i = 1) = \frac{1}{2},$$

entonces

$$E(W_i) = \frac{1}{2} \quad \text{Var}(W_i) = \frac{1}{4}, \quad (4)$$

y, por lo tanto, bajo H_0 ,

$$\begin{cases} E(T) = \frac{N(N+1)}{4} & \text{y} \\ \text{Var}(T) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24} \end{cases} \quad (5)$$

Bajo H_0 , T satisface la condición de Noether y usando una versión del teorema del límite central para funciones lineales de variables aleatorias independientes, converge a la distribución normal $N(0, 1)$.³

La función de potencia exacta de la prueba del RSW no se puede obtener dado que la distribución exacta de T no se puede escribir explícitamente bajo la hipótesis

alternativa. Tampoco se puede aproximar por el teorema del límite central porque bajo H_A , T no puede ser representada como suma de variables aleatorias independientes. Una manera de atacar este problema es proyectando T vía esperanza condicional sobre una clase de sumas de variables aleatorias independientes, y demostrando que como la diferencia entre T y su proyección converge a cero en media cuadrática entonces T tiene la misma distribución límite que su proyección.⁴ Con el método descrito la potencia asintótica de la prueba del rango signado de Wilcoxon se puede aproximar para valores de θ cercanos a cero por

$$\begin{aligned} P(T \geq k) & \\ \doteq 1 - \Phi \left(Z_{\alpha} - \frac{N(N-1)\theta f^*(0) + N\theta f(0)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right) & \end{aligned} \quad (6)$$

donde Z_{α} es el α -percentil superior de la distribución normal estándar, y f^* denota la convolución de f .

En la tabla anexa se presenta la función potencia aproximada para la prueba del RSW cuando la muestra proviene de distribuciones especiales.

2. Estimación de la potencia asintótica del RSW para una subfamilia de la distribución lambda generalizada

Se considera ahora la familia de distribuciones lambda generalizada $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, introducida por Ramberg et al. (1979). La inversa de la función de distribución o función percentil está dada por

$$F^{-1}(y) = F^{-1}(y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad (7)$$

donde $0 \leq y \leq 1$, λ_1 y $\lambda_2 \neq 0$ son los parámetros de localización y escala, respectivamente, mientras que λ_3 y λ_4 determinan el sesgo y la curtosis. En general, la función de distribución F no se puede obtener explícitamente.

Puede verse que la $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ define una función de densidad de probabilidad si y sólo si $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tienen el mismo signo. Lo anterior junto con $\lambda_2 \neq 0$ implica $\lambda_3 \neq 0$ y $\lambda_4 \neq 0$. Bajo estas condiciones se puede obtener la función de densidad de probabilidad aplicando la derivada de la función inversa:

³Hettmansperger (1984), pág 301.

⁴La demostración completa se puede encontrar en Hettmansperger (1984), págs 47 a 56 o en el Capítulo I de la tesis de maestría de Aranda (2001).

TABLA 1
 Potencia aproximada para la prueba del RSW
 para muestras de ciertas distribuciones especiales

| Distribución | $f(0)$ | $f^*(0)$ | $P(T \geq k)$ | Curiosis |
|--------------|-------------------------------|-------------------------------|--|----------|
| Normal | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ | $\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}$ | $1 - \Phi \left(Z_{\alpha} - \frac{N(N-1) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\theta}{\sigma} + N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\theta}{\sigma}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right)$ | 3 |
| Laplace | $\frac{\sqrt{2}}{2\sigma}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4\sigma}$ | $1 - \Phi \left(Z_{\alpha} - \frac{N(N-1) \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\theta}{\sigma} + N \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\theta}{\sigma}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right)$ | 6 |
| Logística | $\frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma}$ | $\frac{\pi}{6\sqrt{3}\sigma}$ | $1 - \Phi \left(Z_{\alpha} - \frac{N(N-1) \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \frac{\theta}{\sigma} + N \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \frac{\theta}{\sigma}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right)$ | 4.2 |
| Uniforme | $\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}$ | $\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}$ | $1 - \Phi \left(Z_{\alpha} - \frac{N(N-1) \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\theta}{\sigma} + N \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\theta}{\sigma}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right)$ | 1.8 |

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1 - y)^{\lambda_4 - 1}}, \text{ en } x = F^{-1}(y). \quad (8)$$

Para $\lambda_1 = 0$ el k -ésimo momento de la $DLG(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ es:

$$E(X^k) = \lambda_2^{-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \text{Beta}(\lambda_3(k - i) + 1, \lambda_4 i + 1), \quad (9)$$

donde $Beta$ es la función $Beta$ y $E(X^k)$ existe si y sólo si $-\frac{1}{k} < \min(\lambda_3, \lambda_4)$.

Por lo tanto, si X tiene $DLG(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ para $k = 1$, $E(X + \lambda_1) = E(X) + \lambda_1$ y, la media y la varianza están dadas, respectivamente, por

$$\mu_X = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2}. \quad (10)$$

donde

$$A = \frac{1}{1 + \lambda_3} - \frac{1}{1 + \lambda_4}$$

y

$$B = \frac{1}{1 + 2\lambda_3} + \frac{1}{1 + 2\lambda_4} - 2\text{Beta}(1 + \lambda_3, 1 + \lambda_4).$$

Para obtener distribuciones simétricas alrededor de cero a partir de la función percentil de la distribución lambda generalizada se toman: $\lambda_1 = 0$, y, $\lambda_3 = \lambda_4$ y se obtiene:

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1 - y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}. \quad (11)$$

Para ver que F es simétrica al rededor de cero, obsérvese que en general si F es una distribución biyectiva y $F^{-1}(y) = -F^{-1}(1 - y)$ para todo $0 < y < 1$; entonces $x = F^{-1}(y) = -F^{-1}(1 - y)$ implica que $F(x) = y$ y $F(-x) = 1 - y = 1 - F(x)$, de lo cual se sigue que F es simétrica en el sentido descrito arriba. Y, en particular, para una $DLG(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1 - y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} = \frac{(1 - (1 - y))^{\lambda_4} - (1 - y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} = -F^{-1}(1 - y), \quad (12)$$

en consecuencia F es simétrica alrededor de cero.

Para el caso simétrico de la distribución lambda generalizada de (3.1) con $\lambda_3 = \lambda_4$ se obtiene que

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_4 y^{\lambda_4-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}}, \text{ en } x = F^{-1}(y) \tag{13}$$

y de (10) $A = 0$ y

$$\mu_X = 0 \tag{14}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{1 + 2\lambda_4} - 2Beta(1 + \lambda_4, 1 + \lambda_4) \frac{1}{\lambda_2^2}$$

σ^2 está definida siempre que $\lambda_4 > -\frac{1}{2}$. De la última ecuación, despejando λ_2 , se tiene que $\lambda_2 = \frac{1}{\sigma}g(\lambda_4)$, donde

$$g(\lambda_4) = \text{signo}(\lambda_4) \sqrt{\frac{2}{1 + 2\lambda_4} - 2Beta(1 + \lambda_4, 1 + \lambda_4)}. \tag{15}$$

Con lo cual

$$F^{-1}(y) = \frac{y^{\lambda_4} - (1-y)^{\lambda_4}}{\frac{1}{\sigma}g(\lambda_4)}. \tag{16}$$

$f(0)$ se obtiene cuando $y = \frac{1}{2}$, así

$$f(0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_4 (\frac{1}{2})^{\lambda_4-1} + \lambda_4 (\frac{1}{2})^{\lambda_4-1}} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_4 (\frac{1}{2})^{\lambda_4-1}} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{g(\lambda_4)}{\lambda_4 (\frac{1}{2})^{\lambda_4-1}} > 0;$$

Una expresión para la convolución es:

$$f^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{f(x)}_{dy} dx = \int_0^1 f(F^{-1}(y)) dy \tag{18}$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_4} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4-1} + (1-y)^{\lambda_4-1}} = \frac{g(\lambda_4)}{\sigma \lambda_4} \int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4-1} + (1-y)^{\lambda_4-1}} > 0.$$

En general el cálculo de esta última integral es dispendioso por ser la integral de un cociente de funciones exponenciales. Por esta razón para los cálculos posteriores se utilizaron las aproximaciones numéricas basadas en una variante del método de Simpson obtenidas del paquete Derive 5.

De manera que la potencia de la prueba del rango signado de Wilcoxon para la distribución lambda generalizada está dada por

$$P(T \geq k) \doteq$$

$$1 - \Phi \left(Z_{..} - \frac{N(N-1) \frac{g(\lambda_4)}{\lambda_4} \left(\int_0^1 \frac{dy}{y^{\lambda_4-1} + (1-y)^{\lambda_4-1}} \right) \frac{\theta}{\sigma} + N \frac{g(\lambda_4)}{2\lambda_4 (\frac{1}{2})^{\lambda_4-1}} \frac{\theta}{\sigma}}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right) \tag{19}$$

esta potencia depende de $\lambda_4 (> -0.5)$, que es el parámetro que determina la curtosis.

3. Resultados numéricos

La potencia de la prueba de Wilcoxon para alternativas normales de una cola con respecto a localización y su eficiencia relativa en comparación con la prueba t , fue calculada por Klotz (1963) para diferentes valores de

$\alpha \leq 0.1$ y para $5 \leq N \leq 10$. La eficiencia de la prueba oscila entre 0.96 y 0.99 y decrece cuando aumenta N y cuando el parámetro de localización se encuentra más

lejos de la hipótesis nula. Arnold (1965) tabuló la potencia de la prueba para alternativas no normales (distribución t con diferentes grados de libertad y distribución de Cauchy) para algunos α y para $5 \leq N \leq 10$. En una comparación entre la prueba de Wilcoxon, la prueba t y la prueba del signo, bajo el supuesto de una distribución de Cauchy, se distingue la prueba del signo como la mejor y la prueba t como la peor; un hecho que causa sorpresa es el papel que juega el supuesto muestrear de una distribución de colas pesadas. El comportamiento de la prueba de Wilcoxon respecto a la prueba t con datos no normales fue estudiado por medio de simulación en la tesis doctoral de Vleugels (1984) para datos de distribuciones normales contaminadas, exponencial doble y distribución de cauchy, para $N = 10, 15$ y 20 . El estudio reporta valores de la potencia y de la eficiencia relativa de la prueba.⁵

Uno de los resultados obtenidos es que la potencia de la prueba del RSW tiende a aumentar con el nivel de curtosis de la distribución muestreada. Para dar una idea de la curtosis de las distribuciones consideradas, se muestran en los gráficos 1, 2 y 3 las distribuciones especiales y varios casos de la distribución Lambda generalizada con sus parámetros de curtosis entre paréntesis rectangular. Por ejemplo $DLG(\lambda_4)$ [6] significa distribución Lambda generalizada con parámetros $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \frac{1}{\sigma}g(\lambda_4)$ y curtosis igual a 6.

Para las distribuciones ilustradas en el gráfico 1, se observa que el máximo de las cuatro distribuciones especiales es menor que el máximo de la $DLG(5.4)$:

En el gráfico 2 se muestran las gráficas de la distribución lambda generalizada para algunos de los valores de λ_4 menores que cero (en este caso solo se escribe el valor de la curtosis en el caso $\lambda_4 = -0.22$ dado que este parámetro solo existe cuando $\lambda_4 > -0.25$). Se nota que para tales valores de λ_4 con excepción de la $DLG(-0.22)$ las demás DLG son más apuntadas que la distribución de Laplace.

En el gráfico 3 se muestran las gráficas de la distribución lambda generalizada para algunos de los valores de λ_4 mayores que cinco. En este caso se nota que todas las DLG son más apuntadas que la distribución de Laplace. Para comparar los grados de concentración de las distribuciones consideradas, en la siguiente tabla 2 se muestran las probabilidades acumuladas de las ocho distribuciones Lambda generalizadas representadas en los gráficos 2 y 3.

Se observa que las DLG para los cuatro valores negativos de λ_4 son más concentradas que las DLG para los cuatro valores positivos y que éstas últimas son un poco menos concentradas que la distribución de Laplace, cuya probabilidad acumulada entre -1 y 1 es de 0.757.

A continuación se muestran los principales resultados obtenidos en los estudios de potencia llevados a cabo para las distribuciones mencionadas. Los gráficos se muestran la función de potencia de la prueba del RSW en muestras de la DLG , para varios valores de θ/σ y un nivel de significancia $\alpha = 0.05$. En el lado izquierdo se encuentra dicha potencia como función de λ_4 y N simultáneamente y en el lado derecho están las curvas de nivel sobre el plano $(\lambda_4, P(T \geq k))$ para varios valores de N .

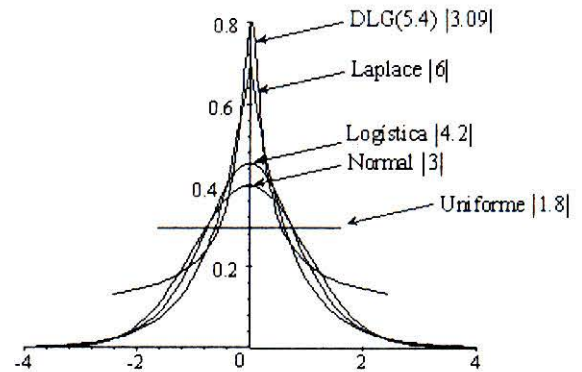


GRÁFICO 1

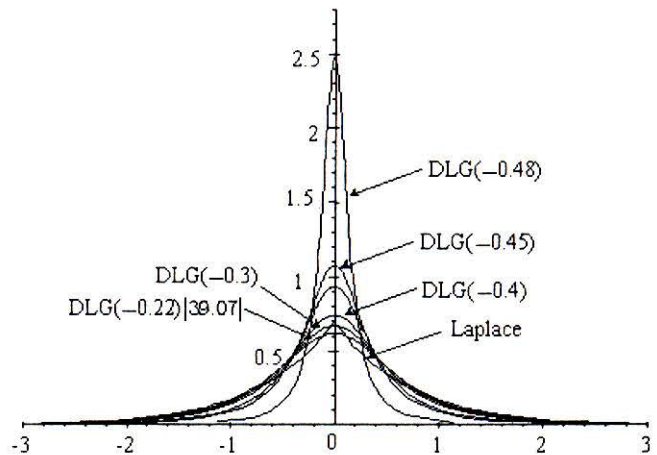


GRÁFICO 2

⁵Tomado de Buening and Trenkler (1994).

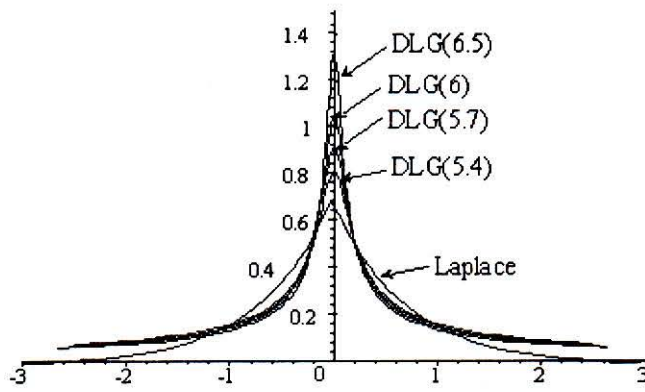


GRÁFICO 3

TABLA 2

| $-0.5 < \lambda_4 < 0$ | $P(-1 < X < 1)$ | $5 < \lambda_4 < 6.6$ | $P(-1 < X < 1)$ |
|------------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|
| -0.48 | 0.97 | 5.4 | 0.7 |
| -0.45 | 0.93 | 5.7 | 0.71 |
| -0.32 | 0.847 | 6 | 0.711 |
| -0.22 | 0.8 | 6.5 | 0.713 |

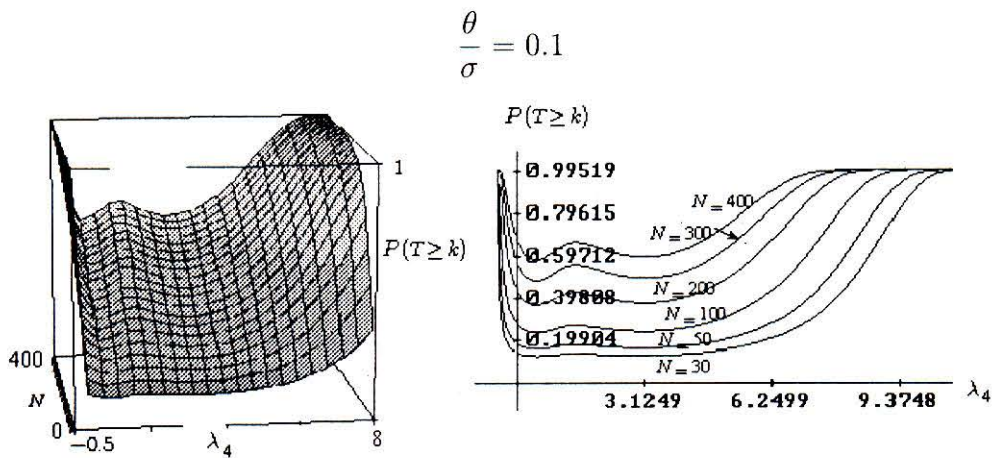


GRÁFICO 4

$$\frac{\theta}{\sigma} = 0.2$$

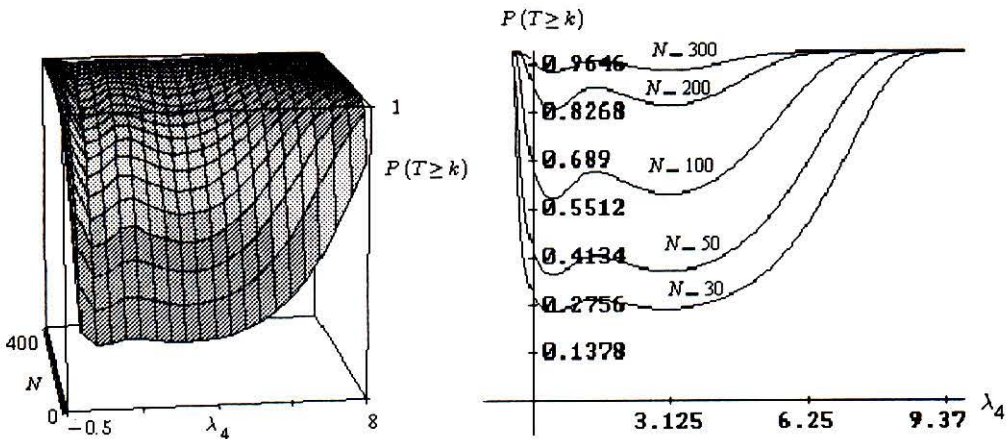


GRÁFICO 5

$$\frac{\theta}{\sigma} = 0.4$$

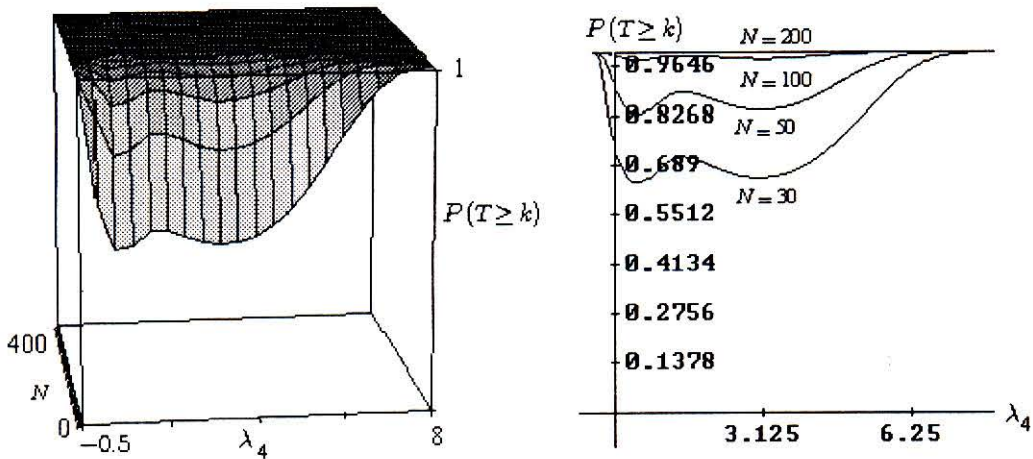


GRÁFICO 6

Para λ_4 en el intervalo $(-0.5, 0)$ donde las distribuciones son más concentradas, la prueba de RSW tiende a ser más potente en la medida que aumenta N . La potencia aumenta rápidamente cuando λ_4 se acerca a -0.5 (monotonía).

Las potencias mínimas se encuentran entre para valores de λ_4 entre 0 y 5 y también aumentan con el valor

de N en los tres casos, siendo estos mínimos mayores en la medida en que aumenta el valor de θ/σ .

Para $\lambda_4 \geq 5$, la potencia de la prueba de RSW aumenta mucho más lentamente cuando λ_4 aumenta. Pero de todos modos las potencias mínimas aumentan con los valores de N . Es decir, para $\lambda_4 \geq 5$ la potencia de la prueba del RSW como función de λ_4 (parámetro que

determina la curtosis) tiende a ser monótona no decreciente.

El comportamiento de la potencia de la prueba del RSW en muestras de distribuciones conocidas se muestra en los siguientes gráficos las distribuciones Laplace, logística y normal.

Potencia estimada de la prueba del RSW para muestras de la distribución de Laplace

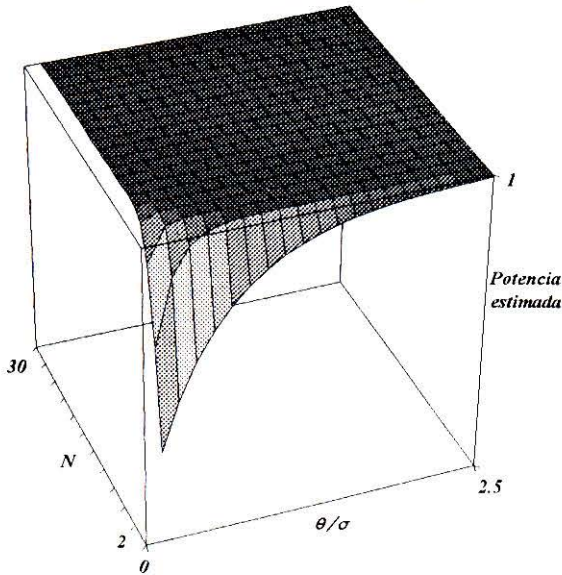


GRÁFICO 7

Potencia estimada de la prueba del RSW para muestras de la distribución Logística

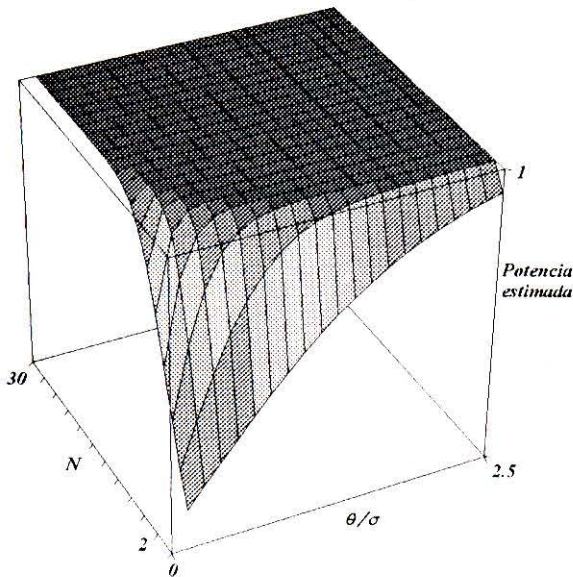


GRÁFICO 8

Potencia estimada de la prueba del RSW para muestras de la distribución normal

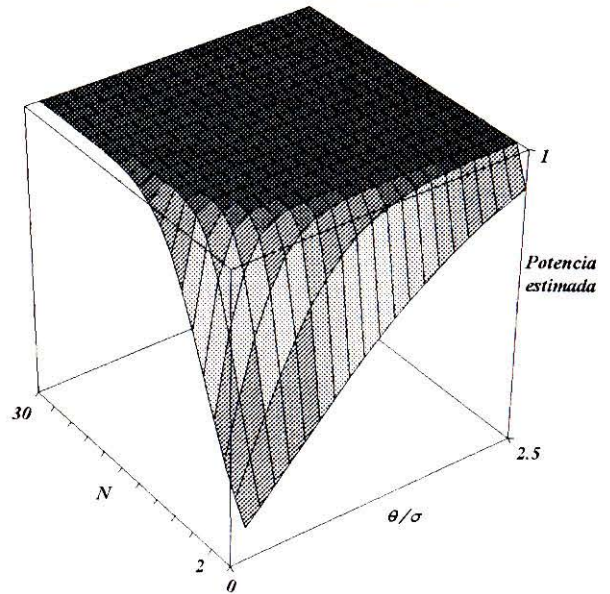


GRÁFICO 9

En los tres casos se nota la monotonía de la potencia estimada con respecto a los dos parámetros considerados: N y θ/σ .

La potencia aumenta más rápidamente para muestras de la distribución de Laplace, y más lentamente para muestras de la distribución normal. La potencia para la distribución logística es un caso intermedio entre las dos anteriores.

4. Conclusiones y preguntas abiertas

- Para muestras de distribuciones simétricas de la distribución Lambda generalizada la prueba del RSW tiende a ser más potente cuanto más leptocúrtica resulte la distribución muestreada. Lo anterior se verifica como se observó en los gráficos 4, 5 y 6, para valores de λ_4 entre 0 y 5 en los cuales la potencia de la prueba es baja.
- También se observó que la potencia de la prueba del RSW aumenta más rápidamente cuanto mayor sea el valor de λ_4 , lo cual es un indicador de que la consistencia de la prueba también mejora en la medida en que la distribución muestreada es más leptocúrtica.
- En general la prueba del RSW es muy potente. Potencias bajas solo se obtienen cuando θ/σ está muy cerca de cero.

REFERENCIAS

- [1] Aranda M. (2001) *Potencia de las pruebas del signo y el rango signado de Wilcoxon para distribuciones simétricas obtenidas de la distribución Lambda generalizada*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.
- [2] Buening H., Trenkler G. (1994) *Nichtparametrische statistische Methoden*. Walter Gruyter & Co. Berlin.
- [3] Corzo J. (2000) *Notas de Clase*. Universidad Nacional de Colombia.
- [4] Hettmansperger T. P. (1984) *Statistical Inference Based on Ranks*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [5] Manoukian E. B. (1986) *Mathematical Nonparametric Statistics*. Gordon and Breach Science Publishers. London.
- [6] Ramberg J. S., Dudewicz E. J., Tadikamalla P. R. and Mykytka E. F. (1979) *A Probability Distribution and its Uses in Fitting Data*. Technometrics, Vol. 21, N° 2, pág 201-214.
- [7] Randles, R. H., Wolfe D. (1979) *Introduction to the Theory of Nonparametrics Statistics*. John Wiley & Sons Inc. New York.
- [8] Texas Instruments, Derive 5 (2000).