LOS TRATADOS FRANCESES EN LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS EN COLOMBIA (1851-1951): STURM, HUMBERT Y LOS OTROS

por

Luis Carlos Arboleda[1]

Resumen

Arboleda, L. C.: Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951): Sturm, Humbert y los otros. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **26**(101): 533-543. ISSN 0370-3908.

En este trabajo se estudian algunas tendencias del pensamiento matemático en las universidades colombianas durante los siglos XIX y XX. Se analizan cuatro momentos determinantes en la recepción, difusión y apropiación de los fundamentos del cálculo infinitesimal. La investigación se basa en documentos históricos y en obras pedagógicas elaboradas o publicadas en Colombia en el contexto de las actividades de enseñanza generalmente inspiradas en los nuevos tratados y planes de estudio franceses.

Palabras clave: Historia de la matemática, Colombia.

Abstract

The aim of this paper is to study some trends of the development of mathematical thought in Colombian universities during the 19th and 20th century. Four outstanding moments in the reception, diffusion and adoption of the foundations of the infinitesimal calculus, are analyzed. The investigation is based on historical documents and educational works produced and published in Colombia within the context of teaching activities generally influenced by the new French treatises and curricula.

Key words: History of Mathematics, Colombia.

1 Grupo de Historia y Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Ciudad Universitaria Meléndez, Cali. e-mail: lca@norma.net. Esta publicación hace parte del informe ECOS-Nortd/Colciencias, L. C. Arboleda (8).

Introducción

En este trabajo se exponen algunos de los resultados de la investigación que hemos venido adelantando sobre la formación de pensamiento matemático en Colombia en los siglos XIX y XX. Se analizan comparativamente cuatro momentos clave en la recepción, difusión y apropiación de los fundamentos del cálculo infinitesimal. Cada uno de estos casos particulares se estudia con base en fuentes documentales primarias y publicaciones originales poco conocidas, con lo cual este trabajo pretende contribuir a valorar nuestro patrimonio histórico en matemáticas.

Hemos procurado situar cada momento en su respectivo contexto institucional y en su correspondiente fase de profesionalización de las matemáticas. Se ha tratado así mismo de caracterizar las prácticas pedagógicas asociadas con los distintos tipos de enseñanza del cálculo en los establecimientos de educación superior.

La investigación se adelantó sobre materiales educativos producidos en Colombia dentro de procesos de enseñanza inspirados en tratados y planes de estudio franceses. Nos hemos apoyado para ello en la tipología elaborada por uno de los miembros de este equipo de investigación, el matemático e historiador francés MARTÍN ZERNER.[2] De esta tipología hemos retenido la periodización y la caracterización de las tres generaciones de los tratados franceses que de una u otra manera representaron la influencia francesa en la enseñanza del cálculo dentro en las instituciones seleccionadas en nuestro estudio.

Estos son tales tratados junto con los intervalos en donde se sitúan sus correspondientes ediciones: (I) LACROIX (1802-1881) y BOUCHARLAT (1813-1891), (II) DUHAMEL (1856-1886), STURM (1857-1929), (III) BERTRAND (1864), SERRET (1868-1911), JORDAN (1^a ed.)(1882) y (III) TANNERY (1886-1904), JORDAN (2^a ed.), GOURSAT (1902-1942), HUMBERT (1903). Entre todos ellos los más significativos en este trabajo sobre la transformación de la cultura de los fundamentos del análisis en Colombia, son BOUCHARLAT, STURM y HUMBERT.

Los pioneros de la enseñanza del cálculo infinitesimal: Mutis, Bergeron y Garavito

El primer intento sistemático para introducir en Colombia una cultura moderna sobre el cálculo diferencial e integral, fue hecho por el ingeniero JULIO GARAVITO ARMERO. Desde 1898 GARAVITO aseguró la enseñanza del cálculo infinitesimal, la mecánica racional y otras asignaturas en la cátedra de matemáticas superiores de la Facultad de Matemática e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. En el *Fondo Lleras* de la Biblioteca del Departamento de Matemáticas de esta Universidad, existe una copia manuscrita del curso de cálculo que GARAVITO dictó en 1912, hecha por sus discípulos JOSÉ A. MUÑOZ T. y EDMUNDO MERCHÁN C.[3] Este manuscrito fue analizado por GRACIELA VILLEGAS en su trabajo (inédito) “Sobre el curso de Cálculo diferencial e integral à la Cauchy de Julio Garavito, 1912”.[4] VILLEGAS escoge este caso de estudio para mostrar las vicisitudes de aclimatar una teoría paradigmática en el contexto local, en aquellos períodos en los cuales todavía estaban en ciernes los procesos de institucionalización y de profesionalización de las matemáticas.

VILLEGAS se interesa igualmente por caracterizar a grandes rasgos el papel que pudo haber ejercido esta enseñanza en la recepción del proceso europeo de fundamentación y aritmetización del análisis en Colombia. En el este estudio exponemos algunos de los resultados a los cuales hemos llegado en el desarrollo de la investigación sobre este mismo curso, sometiendo las conclusiones de VILLEGAS a la revisión de una documentación más amplia y a elementos de análisis que no estaban disponibles en nuestro grupo de investigación cuando se adelantó este trabajo hace diez años. En lo que sigue vamos a encuadrar el curso de GARAVITO en un periodo histórico más amplio, comparándolo con tres momentos estelares en la enseñanza del cálculo: MUTIS a finales del siglo XVIII, BERGERON alrededor de los años 1850 y ACOSTA en el periodo que va de los años 1920 a 1951, fecha en que publica su libro de “Análisis matemático”.

El manuscrito del curso de GARAVITO empieza por la sección “Límites e infinitesimales”. El tratamiento de los fundamentos del cálculo es similar al empleado

---

[2] ZERNER [23] y ZERNER [24]. También nos hemos beneficiado de los seminarios de investigación y cursos doctorales realizados por ZERNER en Cali y en París en el marco del programa ECOS, en los cuales se actualizaron las informaciones publicadas en los mencionados trabajos.

[3] Por comodidad de citación hemos colocado estas conferencias en la bibliografía como GARAVITO [14], aunque ellas hayan sido redactadas por sus alumnos.

[4] VILLEGAS [22]. Tesis de Maestría en Matemáticas dirigida por LUIS CARLOS ARBOLEDA, Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali.

en el curso de STURM. Recordemos que textos como el STURM[5] en los cuales todavía no era posible disponer de una construcción de los irracionales, y por ende de los reales, para sustentar el cálculo, empiezan haciendo una presentación completa de las propiedades de los infinitesimales de diferentes órdenes que serán empleados en la demostración de teoremas posteriores sobre continuidad, derivadas y diferenciales. En la fecha del curso de GARAVITO este patrón ha empezado a cambiar en las escuelas y facultades francesas.[6] Pero en el curso de cálculo diferencial e integral de Bogotá no se muestra ningún interés por adoptar el nuevo criterio de rigor consistente en fundamentar el cálculo sobre la estructura del continuo real. Aún existiendo entre nosotros desde los años 1850 una cierta tradición moderna de estudio de los números inconmensurables en los cursos de aritmética y álgebra, a comienzos del siglo XX GARAVITO mantenía el enfoque anterior de enseñar los fundamentos a la manera de CAUCHY con las variaciones didácticas del curso de STURM.[7] Como veremos más adelante, este enfoque empezó a introducirse en el país, en una variante débil, en la enseñanza del cálculo diferencial de BERGERON en los años 1850. Cincuenta años después GARAVITO hará una apropiación más sistemática del curso de STURM. En el sentido que va a exponer en todo detalle las nociones preliminares del cálculo y los teoremas del método de los infinitesimales, haciendo uso de ellos en otros desarrollos temáticos. Este programa de enseñanza del cálculo se mantendrá más o menos inmodificado hasta que se implantan en los años 1950 un conjunto de reformas curriculares e institucionales en las facultades y departamentos de matemáticas.

Recordemos que CAUCHY se propuso "reconciliar el rigor que caracteriza mi *Curso de análisis*, con la simplicidad que resulta de la consideración directa de las cantidades infinitamente pequeñas".[8] En efecto, el capítulo II del *Curso* sobre las funciones continuas empieza con un pequeño tratado sobre las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Tanto en la definición de cantidad infinitesimal como en los teoremas del cálculo de infinitesimales CAUCHY rompe con la tradición de considerar los infinitésimos con valor fijo, no nulo e indeterminado. Sus infinitamente pequeños son cantidades variables que tienen a cero como límite. GARAVITO traduce casi literalmente la siguiente definición de STURM: "Una cantidad infinitamente pequeña o un infinitamente pequeño no es entonces una cantidad determinada, con un valor fijo asignable: es, al contrario, una cantidad esencialmente variable que tiene límite cero".[9]

Esta concepción dinámica aparece expuesta en el manuscrito de 1912 en cuatro teoremas o principios fundamentales del cálculo de infinitesimales. Incluso la noción de infinitesimal de orden superior refuerza esta concepción dinámica, pues permite comparar dos cantidades variables que convergen a cero, cuando una de ellas tiende más rápidamente a cero que la otra. Más adelante volveremos sobre este punto. Comentemos por ahora que al adoptar la exposición de los infinitesimales de CAUCHY y de STURM como base suficientemente sólida para fundamentar el cálculo, GARAVITO no fue consciente o no supo cómo hacer para incorporar en su enseñanza la construcción de los números inconmensurables que le enseñó su maestro LIÉVANO.[10] Esta teoría hacía parte de hecho (aunque nunca obtuvo ese reconocimiento internacional) de los esfuerzos de construcción de los números reales que se adelantaron en Europa en la segunda parte del siglo XIX. Como tal, podría haber favorecido la recepción en el país por aquella época del movimiento de adopción de la aritmetización del análisis en las universidades.

Se podría especular si por aferrarse al enfoque de "enseñanza acabada" del libro clásico de STURM, GARAVITO no supo aprovechar la preciosa oportunidad que se le ofrecía, de incorporar a la enseñanza del cálculo

[5]La primera edición del curso de Sturm en dos volúmenes es respectivamente de 1857-1859. Nosotros hemos consultado un ejemplar de la 14ª edición de 1909, perteneciente a LUIS IGNACIO SORIANO, fechado en enero de 1924 y que se encuentra en la Biblioteca de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[6]Ver DUGAC [12] y GISPERT [15].

[7]A partir de información inédita sobre los planes de estudios y las tesis sustentadas en la Facultad de matemática e ingeniería en esta época, CLARA ELENA SÁNCHEZ ha constatado, primero, la influencia de libros como el cálculo de STURM en la formación teórica y práctica de los alumnos; segundo, el poco o nulo compromiso de GARAVITO en enseñar la teoría de los inconmensurables de Liévano. Nos hemos beneficiado de estos y otros datos que nos comunicó en un seminario que la profesora SÁNCHEZ hizo en el grupo de historia y educación matemática de la Universidad del Valle. Esta idea se encuentra en el artículo de SÁNCHEZ [20].

[8]CAUCHY [10, pág. 5](1921). Ver al respecto DUGAC [12, págs. 13 y sigs.] . Hemos utilizado la traducción al castellano que contiene la introducción de JEAN DHOMBRES sobre "El rigor o cómo se construye una idealidad", y valiosas notas históricas y epistemológicas de CARLOS ÁLVAREZ.

[9]STURM [21, 1909, pág. 6].

[10]El primer estudio sobre el tratado de LIÉVANO (1856) fue realizado por ALBIS y SORIANO-LLERAS [4]. Un trabajo más reciente y completo es ARBELÁEZ [6].

infinitesimal el enfoque de LIÉVANO. Su trabajo divulgativo de 1887 sobre "Los números inconmensurables de Liévano"[11] es, en cierta medida, un tratamiento del continuo real desde el análisis; en efecto, GARAVITO intenta reconstruir los inconmensurables desde la teoría de series absolutamente convergentes. Por otra parte, en los parágrafos 85 al 125 del curso de 1912 consagrados a la teoría de series, se observa que GARAVITO no pudo formular ni demostrar proposiciones sobre las condiciones suficientes de la convergencia de una serie. Obviamente la mayor dificultad para enfrentar ese problema era no disponer de un conocimiento preciso de la estructura de los reales. Es posible que habiendo estudiado la construcción de los irracionales de MÉRAY, le hubiera llamado la atención su crítica al uso, como axioma evidente, de la proposición sobre la convergencia de toda sucesión de Cauchy, sin previamente haber exhibido tal construcción.

Como quiera que sea, el asunto era suficientemente delicado (y la poca claridad de su artículo sobre LIÉVANO parece confirmarlo), como para que GARAVITO prefiriera, a la manera de la mayoría de los tratados de finales del siglo XIX, no plantear en la enseñanza la cuestión de las condiciones suficientes de la convergencia de series, sustituyéndola por la evidencia geométrica... aún yendo en contravía del rigor de los fundamentos. Habrá que examinar este asunto con mayor detenimiento en otra oportunidad. Como quiera que sea, el curso de GARAVITO representa un avance frente a lo que hasta entonces se había enseñado en el país en materia de fundamentos del cálculo. Para comprobarlo, vamos a considerar dos momentos que hasta donde los registros documentales existentes nos lo permiten afirmar, fueron los más significativos a este respecto en nuestras instituciones educativas de los siglos XVIII y XIX.

El primero tiene que ver con la enseñanza de los infinitésimos en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario de Santafé. Esta cátedra fue regentada por JOSÉ CELESTINO MUTIS a lo largo de veinte años a partir de su creación en 1762. Luego, como catedrático perpetuo, influyó hasta más allá de su muerte sobre lo que en ella se enseñaba, a través de su alumno FERNANDO VERGARA, y los subsiguientes directores: JORGE TADEO LOZANO y FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS. Alrededor de los años 1770 MUTIS orientó el trabajo de la cátedra a estudiar y traducir al castellano con sus alumnos más destacados, la edición latina de los *Principia* de NEWTON que contiene los muy célebres y eruditos comentarios de LESEUR y JACQUIER. [12] Estos comentarios introducen informaciones sobre nociones y técnicas matemáticas anteriores a los años 1740, relacionadas con diferentes cuestiones de los *Principia*. Uno de sus propósitos era hacerle evidente al lector el entramado matemático de la mecánica newtoniana, como también hacer precisiones sobre las elaboraciones matemáticas que Newton deja de lado o que menciona de manera circunstancial en su obra.

Así por ejemplo, en los comentarios 49 a 80 del Libro 1, LESEUR y JACQUIER exponen las concepciones matemáticas y metafísicas de la época sobre las nociones de infinito y cantidad infinitamente pequeña, los distintos órdenes de infinitésimos y las relaciones aritméticas, geométricas y algebraicas que se establecen entre ellos. Estas explicaciones son subsidiarias del discurso físico expuesto en el capítulo 4 sobre la divisibilidad del cuerpo al infinito y la pequeñez de las partes resultantes. El lector–traductor novo granadino de esta edición, tuvo la fortuna de familiarizarse con los elementos del cálculo de fluxiones de NEWTON. Después del bloque de comentarios 49-80 sobre los infinitésimos siguen los comentarios 136–170 en donde se exponen los conceptos y técnicas básicas de las fluxiones y, luego, en los comentarios 136 y 141 se ilustran las ventajas de este método comparado con los procedimientos infinitesimales de los antiguos y con el método de CAVALIERI.

Finalmente se presentan de manera general los algoritmos para calcular fluentes a partir de fluxiones conocidas, incluida su interpretación como la medida del área debajo de la curva. A pesar de la importancia de este manuscrito en la cátedra de matemáticas de Santafé a finales del siglo XVIII, no puede decirse que él haya fomentado una cultura sobre los fundamentos del cálculo. No solo no hay un tratamiento sistemático de los temas del cálculo, sino que tampoco se trata de desarrollar de manera explícita los conceptos principales (variable, función, función continua, derivada, ...) en la perspectiva epistémica de los infinitésimos como cantidades de valor fijo y determinado.

El otro momento significativo en la introducción de los fundamentos del cálculo tuvo lugar en el curso que

[11] GARAVITO [13]. La conexión que establece con la construcción de MÉRAY muestra que GARAVITO comprendía la importancia de dotar al continuo real de una estructura matemática, para asegurar las bases del análisis.

[12] Con respecto a la enseñanza de las matemáticas de MUTIS y su traducción de los *Principia*, ver los ensayos recogidos en mi monografía ARBOLEDA [7] sobre "Matemáticas, cultura y sociedad en Colombia".

enseñó AIMÉ BERGERON en el Colegio Militar de Bogotá en 1851.[13]

Todavía hoy no existe claridad sobre la enseñanza matemática impartida en la red de colegios republicanos que fueron creados en las provincias del país en el marco de la reforma de la educación pública del general SANTANDER en 1826. Lo que sí sabemos es que a partir de esta fecha se adopta de manera formal el patrón francés de enseñanza que perdurará a lo largo de más de siglo y medio.

Esta influencia francesa será decisiva en los inicios de los procesos de institucionalización y profesionalización de las matemáticas. Los establecimientos, con el apoyo de los gobiernos territoriales, contrataron profesores en Francia e importaron con ellos lineamientos curriculares, las metodologías pedagógicas y los textos y manuales franceses (particularmente los textos representativos de distintas cohortes de enseñanza del cálculo: LACROIX, BOUCHERLAT, SONNET, STURM, BERTRAND, JORDAN, APPELL, LAURENT y HUMBERT). La formación de los profesores e ingenieros matemáticos que lideraron este proceso durante cuatro o cinco generaciones (LINO DE POMBO, INDALECIO LIÉVANO, JULIO GARAVITO, JORGE ACOSTA), fue básicamente francesa. Los planes de estudio y la enseñanza de la ingeniería y de las matemáticas (al menos en su modelo inicial, aunque probablemente no siempre en su aplicación a la realidad), fueron todos de inspiración francesa.[14]

Es en este contexto que se contrata a BERGERON en Francia. Desde 1848 hasta 1852, BERGERON y LINO DE POMBO (probablemente con ANTONIO R. DE NARVÁEZ y JOAQUÍN ACOSTA) aseguraron la enseñanza de los cursos que se impartían en el Colegio Militar a lo largo de tres años. El más avanzado de estos cursos era el de cálculo diferencial e integral. La parte de cálculo diferencial, según el manuscrito de BERGERON que han localizado ALBIS y SÁNCHEZ, se compone de cuatro lecciones. Por su contenido, secuencia y concepción, el curso de BERGERON tiene una filiación estrecha con las cinco primeras lecciones del volumen 1 del curso de STURM, cuyos títulos son los siguientes: nociones preliminares, teoremas sobre las derivadas y las diferenciales, reglas de diferenciación, nociones sobre series y diferenciación de funciones trascendentes.[15] Las nociones de variable, infinitésimo, función, función continua, límite, derivada y diferencial, fueron explicadas por BERGERON *grosso modo* en la manera como las enseñaba STURM en la Escuela Politécnica, cuando fue nombrado profesor de esa institución en 1840. Esto marca una diferencia sustancial con textos anticuados como los de BOUCHARLAT y LACROIX que, en todo caso, circulaban ampliamente en las instituciones europeas y que en particular estaban ya a disposición de los estudiantes del Colegio Militar[16]. Como BOUCHARLAT y LACROIX no hablan de funciones continuas, y en lugar de derivadas y diferenciales siguen utilizando los anacronismos de coeficientes diferenciales, se podría pensar que la modalidad del cálculo enseñado por BERGERON en Bogotá se encontraba dentro de las corrientes más adelantadas de Europa. Pero esta apreciación hay que matizarla si tenemos en cuenta que el criterio central del tratamiento sobre los fundamentos que caracteriza al curso de STURM[17], es el principio de sustitución de las cantidades infinitamente pequeñas, y que según las evidencias disponibles, este criterio no fue enseñando por BERGERON sino por GARAVITO medio siglo más tarde. Examinemos este asunto con más detenimiento.

El principio de sustitución de infinitesimales en el curso de Garavito de 1912

Recordemos que BERGERON define una cantidad infinitamente pequeña como "una cantidad esencialmente variable que se acerca a cero". Mencionemos de paso que

[13] Las características del manuscrito y su localización se presentan en ALBIS y SÁNCHEZ [5]. Una trascripción provisional se encuentra en la página web del programa de investigaciones que ellos dirigen sobre *Patrimonio Matemático Colombiano*: http://www.accefyn.org.co Designaremos este manuscrito como Bergeron [9].

[14] Ver VILLEGAS [22, pág. 52 y sigs.] sobre la influencia francesa en matemáticas; igualmente mi artículo "Dificultades estructurales de la profesionalización de las matemáticas en Colombia" en ARBOLEDA [7].

[15] ALBIS y SÁNCHEZ [5] hacen un paralelo conceptual entre las nociones fundamentales que aparecen en el manuscrito de BERGERON y las definiciones de CAUCHY. Pero, en nuestra opinión, hay una relación más directa del manuscrito con el curso de STURM, que sin embargo fue publicado con posterioridad al curso de BERGERON de 1951 en Bogotá. Ello significaría que BERGERON pudo consultar alguna versión de las distintas copias manuscritas de las lecciones de STURM que todavía existen en colecciones particulares o fondos documentales en París según nos lo ha informado MARTÍN ZERNER. Por otra parte, no se han encontrado evidencias de que BERGERON hubiese sido alumno de STURM. El origen y filiaciones del manuscrito del curso de BERGERON es pues una cuestión abierta.

[16] Según ALBIS y SÁNCHEZ [5], estos textos aparecen en el listado de 64 obras que llegaron en 1849 en varios ejemplares, los cuales conformaban la dotación de libros que recibían los alumnos de las autoridades del Colegio Militar.

[17] Naturalmente este criterio importante para la segunda generación de textos de cálculo a la que pertenece STURM, no lo será para la tercera (TANNERY, JORDAN, GOURSAT, HUMBERT,...), en la cual, o bien las cantidades infinitesimales son sustituidas por una presentación de la estructura de los reales, o bien son utilizadas en las partes geométricas del cálculo; ver ZERNER [24, págs. 14–15].

el término "esencialmente" aparece en la definición de STURM, transcrita antes, más no en la definición del curso de CAUCHY. Hemos dicho que esta nueva noción marca una línea de demarcación epistemológica con la noción de infinitesimal con valor determinado utilizada con anterioridad a CAUCHY. Esta concepción dinámica de los infinitesimales como sucesiones nulas, le permitió a CAUCHY y a sus sucesores manipular entes matemáticos sin los prejuicios metafísicos de antes. En Colombia, esta noción es un signo para distinguir el tipo de enseñanza de los fundamentos del cálculo que empezó a impartirse en el Colegio Militar con el curso de BERGERON, de aquella que incidentalmente profesaron MUTIS y sus alumnos en la cátedra del Colegio del Rosario. Pero en el manuscrito nada permite afirmar que BERGERON presentó los teoremas del "método de los infinitesimales" ni los "diferentes órdenes de los infinitesimales" que aparecen en la primera lección de STURM[18]. Desde este punto de vista, el cálculo que enseñó BERGERON es un cálculo operatorio, con una visión formalista de los fundamentos, pues no utiliza las propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas en las demostraciones de importantes teoremas del cálculo en que son indispensables. Esta situación cambia sustancialmente en el curso de GARAVITO. Retornemos pues a la sección de "Límites e infinitesimales" del manuscrito.

Esta sección contiene un largo aparte en donde se explica el método infinitesimal y se pasa luego a demostrar cuatro teoremas sobre el álgebra de infinitésimos. La exposición se inspira fundamentalmente en los dos teoremas de la lección 1^a de STURM, cuya idea original se encuentra ya en el *Curso* de CAUCHY. GARAVITO hace una presentación en la cual resalta el manejo operativo de las relaciones entre infinitesimales. En última instancia su propósito es justificar lógicamente el criterio que utilizará luego al presentar otras nociones y demostrar sus propiedades, en virtud del cual en las relaciones entre cantidades infinitesimales, se anula en el límite la parte que "hace la comparación y los cálculos más difíciles".[19] Este criterio se puede enunciar en el lenguaje actual de la siguiente manera:

Sean α_i y β_i cantidades infinitesimales. Se puede sustituir una por otra y despreciar su diferencia, sea cuando se calcula el límite de la relación entre ellas o en el límite de una suma, a condición que la relación $\dfrac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_i}$ sea un infinitamente pequeño.

El problema de fondo se presenta aquí con respecto al límite de la suma. Sean las dos sumas $\sum_i^n \alpha_i$ y $\sum_i^n \beta_i$ y supongamos que la primera tiene un límite cuando n tiende a infinito. Como $\beta_i = \alpha_i + \varepsilon_i$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = 0$, entonces la segunda suma tiende al mismo límite que la primera. Nosotros sabemos que el asunto delicado que aquí se presenta, es cómo varia el índice i con el índice n. Esta doble indexación involucra el concepto de convergencia uniforme. Es decir, que para trabajar con el límite de expresiones infinitesimales de la forma $\alpha_{i,n} = \sum_1^n \alpha'_{i,k}$ y $\beta_{i,n} = \sum_1^n \beta'_{i,k}$, en las que $\beta_{i,n} = \alpha_{i,n} + \varepsilon_{i,n}$, se debe comenzar por fijar i de tal manera que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{i,n}}{\alpha_{i,n}} = 0$.

Recordemos que el curso de DINI fue primer tratado escrito con el propósito explícito de darle a los principios fundamentales del análisis, en sus enunciados y en sus demostraciones, todo el rigor requerido en matemáticas. En él se incluyen evidentemente el concepto y las propiedades de la convergencia uniforme, y se sanciona la polémica que enfrentó a la comunidad matemática durante varios decenios.[20] En ninguna de las ocho o nueve ediciones de Sturm posteriores a esta fecha se habla del asunto. (De hecho, ocurre lo mismo en casi todos los textos franceses a fines del siglo XIX). Si STURM trabaja con series de funciones continuas, no establece ninguna conexión con el teorema falso de CAUCHY ni formula teoremas sobre la diferenciabilidad o integrabilidad término a término, limitándose a encontrar el dominio de convergencia de algunas series de funciones.

Hacia los años 1910 GARAVITO ya está informado del concepto de convergencia uniforme. En el parágrafo 95 del manuscrito de 1912, titulado "Series cuyos términos son funciones de una variable", GARAVITO define la convergencia en un punto y la convergencia uniforme de una serie infinita de funciones continuas. Lo hace más desde un punto de vista operativo y local, que para explotar las propiedades de la nueva convergencia en el análisis. No se propone, por ejemplo, comprobar la convergencia

[18] Hay que aclarar que en la primera edición (1857) del curso de STURM, el método infinitesimal aparecía al comienzo de la lección 15. De la segunda edición (1863) en adelante se incluirá definitivamente en la lección primera.

[19] *Criterio de Duhamel* citado en STURM [21, 1909, pág. 11].

[20] DINI [11]. Véase una descripción del curso en DUGAC [12, págs. 106–109]. Este es uno de los primeros tratados que comienza con una exposición de los números irracionales, con el criterio expreso de que "antes de emprender el estudio de las funciones de variables reales, es útil exponer de manera precisa el concepto de números irracionales o inconmensurables y el de límite". Esta obra es clave para el estudio de los orígenes de la moderna teoría de funciones, uno de los problemas de investigación de nuestro grupo de historia de las matemáticas.

uniforme de algunas series; simplemente se reduce a establecer un criterio que consiste en comparar la serie de funciones término a término en valor absoluto, con una serie de términos positivos, convergente y numérica.[21] Una vez formulada la definición de convergencia uniforme, GARAVITO no la emplea en ninguna otra parte. Por supuesto, tampoco la provecha en conexión con el método de los infinitesimales. Nada que extrañar: en el *Curso de análisis* de JORDAN están muy bien presentes y diferenciadas ambas convergencias, pero el tratamiento del principio de sustitución sigue haciéndose con base en el límite simple.

Las ambigüedades sobre los fundamentos en el curso de Acosta Villaveces de 1951

JORGE ACOSTA VILLAVECES se graduó en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, en 1912, el mismo año en que dos estudiantes de la misma facultad, MUÑOZ y MERCHÁN, escribieran las notas del curso de GARAVITO. Fue el primer alumno de su promoción, el más destacado discípulo de GARAVITO y, por ello mismo, su sucesor en la cátedra de matemáticas superiores de la misma facultad.[22] Uno de sus alumnos, el ingeniero FERNANDO MARTÍNEZ, nos ha dado preciosas informaciones que hemos incorporado en este trabajo, principalmente sobre las características de la enseñanza que recibió de ACOSTA en los cursos de tercer año (1948) sobre cálculo integral y ecuaciones diferenciales. Los estudiantes que tomaban este curso habían cursado la aritmética analítica[23] en el primer año, y el álgebra superior y el cálculo diferencial en el segundo año. Los cursos de cálculo se impartían de acuerdo al STURM, pero los estudiantes más aventajados tenían el Humbert como libro de consulta. Esta parece haber sido una costumbre que se practicaba de mucho tiempo atrás en la facultad, ya que entre la lista de libros del ingeniero civil RITO ANTONIO MARTÍNEZ, padre de Fernando, se encontraban desde 1916 los dos volúmenes del curso de HUMBERT.[24] ACOSTA fue uno de los primeros matemáticos colombianos en asumir la tarea de publicar sus lecciones de cálculo en las revistas de mayor circulación entre ingenieros y profesores de matemáticas. En 1932 publicó en los "Anales de Ingeniería" un artículo sobre el cálculo del valor aproximado de una serie por medio de integrales, en donde expresa la concepción geométrica de integral definida como área bajo la curva de la función que analizaremos más adelante. Una vez creada la *Revista de la Universidad Nacional de Colombia*, ACOSTA publicará por entregas entre 1945 y 1948 varias lecciones de su curso de cálculo integral.[25] Luego, en 1951, apareció su libro "Análisis matemático" que incorpora la totalidad de las lecciones que durante más de veinte años impartió en la facultad en los cursos de cálculo integral y de ecuaciones diferenciales.[26] Este es el primer texto matemático de su clase que se publicó en el país, quince años antes de que los matemáticos y docentes universitarios colombianos asumieran la costumbre profesional de escribir y publicar libros para la enseñanza universitaria de las matemáticas. La publicación del "Análisis matemático" le mereció a ACOSTA los mayores reconocimientos de la comunidad académica de la época; en 1952 recibió el *Premio Diodoro Sánchez* de la Sociedad Colombiana de Ingenieros, y en 1954 la *Medalla Francisco José de Caldas*. En lo que sigue presentamos algunos de los resultados a los que hemos llegado en el estudio de esta obra, particularmente en conexión con el tratamiento de las cuestiones de los fundamentos del cálculo y los nuevos cánones del rigor del análisis.

El capítulo 1 empieza precisando el objeto del cálculo integral: "En el cálculo diferencial se estudian los procedimientos para obtener las derivadas de las funciones: el problema inverso, o sea la investigación de las funciones cuyas derivadas se conocen, es el objeto del cálculo integral". ACOSTA traduce enseguida el primer parágrafo de la lección 27 del curso de STURM, en el que se explica en qué consiste en términos matemáticos "la

[21] Ver la tesis de VILLEGAS [22, pág. 183].

[22] Ver la noticia biográfica de ACOSTA en el diccionario de MEDINA [18, págs. 84–85].

[23] Ver ACOSTA [1, págs. 578-587]. Una vez establecida una fórmula entre una suma de Cauchy y la integral definida de una función cualquiera, ACOSTA presenta varios métodos para apreciar el grado de aproximación de esta suma. El razonamiento es puramente operatorio e instrumental, sin que se manifieste ninguna preocupación por las condiciones de existencia de la integral definida.

[24] Ver HUMBERT [16]. El ejemplar que hemos consultado en la Biblioteca de la Academia Colombiana de Ciencias perteneció a SANTIAGO GARAVITO y contiene anotaciones al margen.

[25] ACOSTA [2] y ACOSTA [3]. Por "Análisis matemático" se entiende solamente aquí el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales: los cursos más avanzados de la formación en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería. La formación en cálculo diferencial es considerada tan básica como la de los cursos de aritmética, álgebra y geometría analítica. Probablemente por ello y porque desde GARAVITO (si no antes, desde Bergeron) se había impuesto un patrón de enseñanza del cálculo diferencial de acuerdo al Sturm, no se hizo necesaria entre nosotros la publicación de un libro en esta área.

[26] ACOSTA [3].

investigación de las funciones cuyas derivadas se conocen". La idea se formaliza en la siguiente proposición matemática que hoy conocemos como el primer teorema fundamental del cálculo (TFC1): "Sea $f(x)$ una función continua de la variable x; vamos a demostrar que siempre existe otra función $\varphi(x)$ que tiene por diferencial a $f(x)dx$".

Aquí encontramos una diferencia notable con STURM: ACOSTA agrega la condición de *continuidad*. En ello se distingue de la tradición de los textos de cálculo del siglo XIX que representa STURM (los cuales no hacen explícita esta condición en éste y otros teoremas, aunque la asumen de hecho), y se aproxima a los cursos de TANNERY, JORDAN, GOURSAT y HUMBERT, entre otros. Anotemos tres consideraciones con respecto al el curso de GARAVITO de 1912: allí también se agrega la condición de continuidad a la propiedad antes mencionada, se designa tal propiedad como "principio fundamental" y se enuncia en términos de derivadas y no de diferenciales. Sin embargo, agregar o no al enunciado la continuidad de f es solo una diferencia nominal, ya que GARAVITO y ACOSTA tanto como STURM entienden esta condición en el sentido de que la representación geométrica de f es una curva continua. Luego volveremos sobre este asunto.

Antes hay que señalar que la determinación de GARAVITO y ACOSTA de formular y "demostrar" de entrada el TFC1, plantea una distinción muy importante con el estilo de CAUCHY. Mientras que para los primeros el TFC1 es el punto de partida o el "objeto de estudio" del cálculo integral, para Cauchy la integral no comienza siendo antiderivada, sino un objeto matemático cuya propiedad característica es preciso definir de manera analítica. En el capítulo 21 del *Cours d'Analyse* CAUCHY define la integral y establece su existencia. Sólo después está en capacidad de formular y demostrar proposiciones sobre este objeto matemático nuevo. El TFC1 aparece en el capítulo 26 y su demostración involucra al menos dos de tales proposiciones: el *Teorema del Valor Medio* para integrales y la aditividad de la integral definida sobre intervalos. De esta manera, CAUCHY inaugura una tradición que hace parte de la cultura matemática actual.

La adopción de este punto de vista se justificó históricamente al menos por tres consideraciones[27]: Uno, se sabía que existen casos en los que es posible definir la integral en el sentido del área bajo la curva, sin que el valor del área coincida con el valor de la derivada en los extremos del intervalo. Dos, FOURIER había trabajado con áreas de funciones continuas que sin embargo son discontinuas en el sentido de EULER. Tres, era conocido que se puede determinar la integral definida de una función representable por series trigonométricas aunque la función que representa la integral no sea diferenciable. GARAVITO y ACOSTA o no eran suficientemente conscientes de estas razones, o consideraron que no eran pertinentes para introducir el rigor de CAUCHY en la enseñanza en Colombia. El hecho es que a lo largo de medio siglo se reprodujo en nuestra más importante universidad el anacronismo consistente en pensar la integración como la inversa de la diferenciación, de la forma como lo hacían EULER, BERNOULLI, LAGRANGE y LAPLACE en el siglo XVIII. Esta decisión parece corresponder a un interés pedagógico deliberado de aprovechar representaciones mentales de la relación inversa entre ambas operaciones, mediante el modelo geométrico de la integral como área.

Una vez formulado el TFC1, ACOSTA pasa a establecer la existencia de la integral por medio del área determinada por el grafo de f y los ejes cartesianos. El procedimiento es similar al empleado por GARAVITO. Ambos se inspiran en STURM, aunque éste no habla explícitamente de demostrar. GARAVITO y ACOSTA pretenden demostrar que la diferencial Δu del área u es la función. (Primera dificultad: ninguno de los dos demuestra la existencia del área; seguramente porque suponen como STURM que ésta es una noción común, y por tanto aceptable *a priori*. Más adelante volveremos sobre esta dificultad). El procedimiento de ACOSTA es sensiblemente diferente en este punto al de STURM. STURM no utiliza el principio de sustitución, sino que supone implícitamente que la función es monótona para preservar en el límite las relaciones geométricas entre los rectángulos y el elemento de área; es decir, para que sean posibles las siguientes desigualdades cuando $x \to x'$:

$$f(x) \leq \frac{\Delta u}{\Delta x} \leq f(x')$$

$$\lim_{f(x') \to f(x)} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x)$$

$$du = f(x)dx$$

ACOSTA elude la comparación del área Δu con los rectángulos $f(x)\Delta x$ y $f(x')\Delta x$ y la anterior consideración de desigualdades. Supone que Δu y Δx son infini-

[27] Estas consideraciones y algunas de las que siguen son planteadas para el caso del curso de GARAVITO en la tesis de VILLEGAS [22]; ellas son igualmente aplicables al curso de ACOSTA.

tesimales asociados y que Δu se descompone en un rectángulo y un triángulo. El rectángulo $f(x)\Delta x$ es del mismo orden infinitesimal de Δx y corresponde a la parte principal del incremento Δu; es decir, la diferencial du. Entonces, $du = f(x)dx$.

En resumen, ACOSTA asume la monotonía de la función (continua) en los intervalos (x, x'); también utiliza (implícitamente) el principio de sustitución cuando elimina una cantidad infinitesimal para quedarse con la parte principal del incremento. Adicionalmente su demostración reposa sobre la aceptación de que el área es una noción *a priori*. Estas son las tres características que, desde el punto de vista de los fundamentos, distinguen a un texto de análisis como de la segunda generación.

Demostrada la existencia de $\varphi(x)$ cuya diferencial es $f(x)dx$ siendo f continua, a continuación se introducirá la integral indefinida utilizando esta propiedad fundamental.[28] ACOSTA y GARAVITO siguen las ideas de la exposición de STURM en los parágrafos 321 y 322 de la lección veintisiete. En lo único en que difieren sus presentaciones es que antes de continuar transcribiendo (con ligeras modificaciones) los apartes de la lección de STURM sobre las reglas de integración,[29] ACOSTA incluye casi textualmente en su libro la siguiente advertencia tomada del curso de HUMBERT: "Debe advertirse que no hay *ningún método general* para encontrar las integrales de las funciones: es más, si la función $f(x)$ es una combinación de funciones elementales (algebraicas, exponenciales, circulares directas o inversas, logarítmicas, etc.), sólo en casos muy particulares su integral será una combinación semejante, de suerte que el cálculo integral conduce desde el principio al estudio de funciones nuevas".[30]

Antes hemos dicho que parece haber obrado un criterio pedagógico cuando ACOSTA escoge el enfoque de STURM como lineamiento general para presentar su cálculo integral. Este interés debe haberse originado en la formación impartida por GARAVITO de acuerdo con este enfoque, y en su larga apropiación dentro de la cátedra de matemáticas superiores que ACOSTA regentó por más de veinticinco años como sucesor de su maestro. Esta formación y esta práctica pedagógica estructuraron las concepciones sobre la enseñanza del cálculo que se expresan en su libro. Sus lecturas personales de libros más avanzados con respecto al STURM, como el curso de HUMBERT parece que no alcanzaron a afectar sustancialmente tales concepciones. Pero no deja de ser interesante desde el punto de vista histórico, tener evidencias de que Acosta sí estaba enterado de cuestiones decisivas del programa de rigor del análisis, como las que plantea HUMBERT en conexión con la cita anterior sobre la integración.

En la continuación de su argumentación, HUMBERT aboga por un tratamiento "puramente algebraico" de la demostración de TFC1, y critica la demostración geométrica por cuanto reposa sobre la noción primitiva de área: [31] "... cuando se utiliza una representación (tracé) geométrica, ésta supone que la curva $y = f(x)$ satisface ciertas condiciones (entre otras la continuidad) que no son definidas de manera precisa y que no desempeñan un papel explícito en el razonamiento". En pie de página observa al respecto que hablando geométricamente, toda función continua debería tener derivada, puesto que su curva continua tendría una tangente en cada punto. Pero, "se sabe que esto no es así, y este ejemplo comprueba el peligro de los razonamientos geométricos en las cuestiones de puro rigor". Recordemos que cuando HUMBERT publica el segundo volumen del cálculo integral, en 1904, ya se conocen dos resultados de 1875 en conexión con este asunto: la *función de Weierstrass* que no es derivable y tampoco monótona en ningún intervalo, y la *función de Darboux* que no es monótona en ningún intervalo.

En cuanto a la caracterización puramente algebraica de la integral definida como el límite de las sumas de Cauchy cuando se divide el intervalo en una partición, ACOSTA seguramente sabía (por su lectura de HUMBERT u otros) que aquí subyace la propiedad del *teorema de Heine* de 1872 de que toda función continua es continuamente uniforme en un intervalo cerrado. Es por esta razón que HUMBERT comienza por introducir los teoremas sobre los distintos tipos de continuidad en su presentación de la integral definida, y con base en este presupuesto define el concepto y establece sus propiedades. Se plantea entonces una delimitación clara y precisa que

[28] ACOSTA [3, pág. 9] retoma la imagen utilizada por GARAVITO [14, pág. 341] de que siendo la integración y la diferenciación dos operaciones inversas, los signos que las representan, aplicados a la misma función, *se destruyen mutuamente*.

[29] Pequeños detalles convencionales que podrían sugerir filiaciones: ACOSTA introduce aquí el subtitulo de *Reglas y procedimientos usuales de integración*; GARAVITO había hecho lo propio pero con un titulo ligeramente diferente: *Reglas para la integración de funciones*. Este es el título de STURM. HUMBERT titula el parágrafo correspondiente: *Procedimientos de integración*.

[30] HUMBERT [16, pág. 57]; ACOSTA [3, pág. 9]. Esta advertencia por supuesto no aparece ni en STURM ni en GARAVITO.

[31] HUMBERT [16, págs. 84–85].

separa conceptualmente los textos de cálculo de la segunda generación (STURM) de los textos de la tercera generación (HUMBERT). Pero, nuevamente, ACOSTA pasa de largo en su enseñanza sobre un punto tan fundamental. La exposición del capítulo 2 de su libro sobre la integral definida como área es *grosso modo* la de STURM. Sin embargo, se aparta de STURM cuando da una "demostración puramente analítica" de la integral definida como límite de las sumas de Cauchy; en esta prueba implícitamente pretende subsanar la ausencia del concepto de continuidad uniforme, utilizando una de las versiones del principio de sustitución.[32]

Conclusión sobre la cultura de los fundamentos en Colombia hasta los años 1950

Durante los cien años que van desde que BERGERON enseñó su curso de cálculo diferencial en el Colegio Militar, hasta la publicación del libro de ACOSTA en la Universidad Nacional, se aclimató en el país una cultura sobre los fundamentos del análisis de corte esencialmente francesa. Los planes de estudio de los colegios e instituciones universitarias legitimaron esta influencia, por lo menos en lo que se refiere al último año de la formación en cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales (en épocas más recientes) y mecánica racional. En nuestras instituciones circularon textos de análisis de primera, segunda y tercera generación que venían precedidos del prestigio de haber sido empleados para la enseñanza en escuelas y facultades francesas. Sin embargo, las concepciones de los pioneros de esta enseñanza, las prácticas pedagógicas de naturaleza operatoria e instrumental, los débiles intercambios con los medios matemáticos internacionales, la precariedad de monografías y memorias originales en nuestras bibliotecas y la casi inexistente demanda interna de conocimientos avanzados en matemáticas puras y aplicadas, favorecieron que esta cultura llevara la impronta del libro más influyente del período estudiado por nosotros: el curso de STURM, una obra de segunda generación. Esta situación es la misma aún en la etapa de los años 1940 cuando en el marco de esta cultura operatoria, se expresaron tímidamente corrientes del rigor del análisis pertenecientes a textos de la tercera generación como el HUMBERT. Estos libros se encontraban de tiempo atrás en las bibliotecas públicas y privadas en donde nuestros profesores y estudiantes más aventajados los consultaron para su formación personal;[33] pero no se generó ningún interés de apropiarse de tales obras para transformar cualitativamente las muy conservadoras prácticas pedagógicas públicas.

Una situación distinta se presentaba por la misma época en otros países latinoamericanos. En Perú, por ejemplo, en donde el estudio de las matemáticas en la Universidad Católica de Lima por aquella época era reconocido por su alto nivel, se publicó en 1945 un completo curso en dos volúmenes de análisis matemático.[34] La factura de esta obra es claramente de tercera generación. Su autor, CRISTÓBAL LOSADA Y PUGA, catedrático de esa universidad y célebre hombre público, explica en el prólogo que ella se originó en la necesidad de "poner al alcance de mis alumnos aquellos puntos teóricos que no suelen encontrarse tratados en los textos corrientes de cálculo"; se refiere a los fundamentos de la teoría de conjuntos, la teoría de los números reales y la teoría de funciones continuas. En particular reconoce las filiaciones de los capítulos de su tratado sobre las funciones continuas, con el "gran *Cours d'Analyse Mathématique* del maestro francés Édouard Goursat". También dice haber consultado en la elaboración de su libro todos los tratados clásicos de análisis franceses que "como todos lo saben y reconocen, (es en esto) la maestra del mundo". En fin, dice que su libro responde al *desideratum* de presentar a sus alumnos en español "una exposición amplia y rigurosa del Análisis, que permita abordar primero el estudio de las obras monográficas y luego el de las memorias originales de los investigadores, así como por otra parte resolver las cuestiones —a menudo arduas— que plantean las ciencias aplicadas". En otro trabajo nos proponemos estudiar el curso de LOSADA y analizar su enseñanza en Lima de manera comparativa con la de ACOSTA en Bogotá.

Bibliografía

[1] **Acosta, J.** (1932) *Cálculo aproximado de la suma de un número finito de términos de una serie por medio de las integrales definidas.* Anales de Ingeniería, **40** (no. 471)(1984), 578–587.

[2] **Acosta, J.** (1945–1948), *Curso de análisis matemático dictado en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería.* Revista de la Universidad Nacional de Colombia, no. 3(1945), 335–346; no. 4(1945), 309–331; no. 12(1948), 261–274. (1951):

[3] **Acosta, J.** (1951), *Análisis Matemático. Curso dictado en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional.*. Editorial Minerva, Bogotá.

[32] El "teorema conocido" de que si $\lim \sum \Delta x = b - a$, entonces $\lim \sum \varepsilon \Delta x = 0$, ACOSTA [3, pág. 86].

[33] Para el caso de HUMBERT [16, ver la nota 23].

[34] LOSADA [17]. En la biblioteca de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Colombia se encuentra el ejemplar de esta obra que fue enviada personalmente por LOSADA al mismo tiempo de su publicación en 1945.

[4] **Albis, V. & L. I. Soriano-Lleras** (1976), *The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers*, Historia Mathematica, **3**, 161–166.

[5] **Albis, V. S. & C. H. Sánchez** (1998), *Descripción del curso de cálculo diferencial de Aimé Bergeron en el Colegio Militar*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **xx**, .

[6] **Arbeláez, G. I.** (2002), *Las nociones de infinito y continuo en la obra del matemático Indalecio Liévano Reyes (1834-1913)*, En Arboleda, L. C. & M. Paty (2002), *Formación y desarrollo de la cultura científica en Colombia. Las matemáticas y la física en los siglos XIX y XX* Informe final del proyecto ECOS/Nord, No. 97PCF08.Colciencias.

[7] **Arboleda, Luis Carlos** (1993), *Matemáticas, cultura y sociedad en Colombia.* En Quevedo et al. (1993), 15–172.

[8] **Arboleda, Luis Carlos & Michel Paty** (2002), *Formación y desarrollo de la cultura científica en Colombia. Las matemáticas y la física en los siglos XIX y XX* Informe final del proyecto ECOS/Nord, No. 97PCF08.Colciencias.

[9] **Bergeron, Aimé** (1851), *Cuaderno de calculo diferencial. Lecciones dictadas por Aimé Bergeron. Año de 1851, Bogotá, de Sixto I. Barriga.* Manuscrito en el Fondo Pineda de la Biblioteca Nacional de Colombia, No. de índice 2310.

[10] **Cauchy, A.–L.** (1821), *Cours d'Analyse. (Algébrique).* Paris. Traducción al español: Curso de Análisis. Colección Mathema, UNAM, 1994, México.

[11] **Dini, U.** (1878), *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Nistri. Pise.

[12] **Dugac, P.** (1978), *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire.* Tesis de Doctorado de Estado en Matemáticas. Universidad Pierre et Marie Curie, París.

[13] **Garavito, J.** (1897), *Los números inconmensurables.* Anales de Ingeniería, **9**, 338–346.

[14] **Garavito, J.** (1912), *Conferencias de cálculo diferencial e integral. Profesadas por Julio Garavito Armero en 1912 en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Bogotá.* Redactadas por los alumnos José A. Muñoz T. & E. Merchán C. Manuscrito inédito conservado en el Fondo Lleras de la Biblioteca del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Bogotá.

[15] **Gispert, H.** (1983), *Sur les fondements de l'analyse en France (à partir de lettres inédites de G. Darboux et de l'étude des différentes éditions du "Cours d'analyse" de C. Jordan).* Archive for History of Exact Sciences, **28**, 37–108.

[16] **Humbert, G.** (1903-1904), *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique.* 2 vols. Gauthier-Villars, Paris.

[17] **Losada y Puga** (1945), *Curso de Análisis Matemático.* 2 vol. Editorial Lumen, Lima.

[18] **Medina Muñoz, L. R.** (2000), *Tradición académica. Diccionario biográfico y bibliográfico de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Bogotá.

[19] **Quevedo, E. et al.** (1993), *Historia social de la ciencia en Colombia.* 11 volúmenes. Colciencias–Tercer Mundo editores. Bogotá.

[20] **Sánchez Botero, C. H.** (2002), *Cien años de historia de la matemática en Colombia..* Rev. Acad. Colomb. Cienc. **26**, 239–260.

[21] **Sturm, Ch.** (1857-1859), *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* 1^a edición. (1909) 14^a edición. Dos volúmenes. Gauthier–Villars, París.

[22] **Villegas, G.** (1992), *Sobre el curso de cálculo diferencial e integral "à la Cauchy" de Julio Garavito, 1912.* Tesis de Magíster en Matemáticas. Universidad del Valle, Cali. Colombia.

[23] **Zerner, M.** (1986), *Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914.* Cahiers de didactique des mathématiques; no. 30, 1–30. IREM, Université Paris 7.

[24] **Zerner, M.** (1994), *La transformation des traités français d'analyse (1870-1914).* Laboratoire Jean–Alexandre Dieudonné, Université de Nice, Prepublication n° 389, págs. 1–89.