SOBRE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES, LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LAS MEDIDAS ESPECTRALES

por

Jairo A. Charris[1] & Germán Preciado-López[2]

Resumen

Charris, J. & Preciado-López: Sobre polinomios ortogonales, las fracciones continuas y las medidas espectrales. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **26**(100): 403-410, 2002. ISSN 0370-3908.

Se describen algunos resultados de la teoría de los polinomios ortogonales, los cuales están centrados en la relación de recurrencia y en la correspondiente fracción continua. El propósito es mostrar cómo estos resultados pueden usarse para determinar la medida espectral de los polinomios.

Palabras Clave. Fracciones continuas, funcionales de momentos, polinomios ortogonales, medidas espectrales, polinomios de Chebyshev, polinomios ortogonales cribados.

Abstract

Some results in the theory of orthogonal polynomial which are centered in the three term recurrence relation and its corresponding continued fraction are described. The purpose is to show how they can be used to determine the spectral measures of the polynomials.

Key Words and Phrases. Continued fractions, moment functionals, orthogonal polynomials, spectral measures, Chebyshev polynomials, sieved orthogonal polynomials.

Consideramos en este artículo, esencialmente expositivo, el problema de la determinación de las medidas espectrales de sistemas de polinomios ortogonales dados por una relación de recurrencia de tres términos. El trabajo contiene, sin embargo, algunos resultados de las investigaciones de los autores. Una sucesión de polinomios complejos $\left(P_n(x)\right)_{n\geq 0}$ se denomina un *sistema mónico ortogonal* (MOPS) si satisface una relación de recurrencia de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), n \geq 0, \quad (1)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad (2)$$

[1]Universidad Sergio Arboleda y Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá D.C.
[2]Universidad Nacional de Colombia y Universidad de los Andes, Bogotá, D.C.
AMS *Subject Classification: Primary 33A65. Secondary 33A40.*

donde B_n, C_n son números complejos con $C_{n+1} \neq 0$, $n \geq 0$. La relación (1) y las condiciones (2) determinan unívocamente el sistema $(P_n(x))_{n\geq 0}$.

En lo que sigue escribiremos simplemente $(P_n(x))$ en lugar de $(P_n(x))_{n\geq 0}$. Si $(P_n(x))$ es un MOPS dado por (1) y (2), se define la sucesión $(P_n^{(1)}(x))$ de los *primeros asociados* de $(P_n(x))$ como el MOPS que satisface la relación de recurrencia

$$x(P_n^{(1)}(x)) = P_{n+1}^{(1)}(x) + B_{n+1}P_n^{(1)}(x) + C_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(x),\ n \geq 0, \quad (3)$$

y las condiciones iniciales

$$P_{-1}^{(1)}(x) = 0,\ \ P_0^{(1)}(x) = 1. \quad (4)$$

Los B_n y C_n son como en (1). Una función lineal compleja $\mathfrak{L} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ es un *funcional de momentos* para un MOPS $(P_n(x))$ si satisface

$$\mathfrak{L}(P_n(x)P_m(x)) = \lambda_n\delta_{mn}, m, n \geq 0, \lambda_n \neq 0, \lambda_0 = 1. \quad (5)$$

Se dice entonces que $(P_n(x))$ es un *sistema ortogonal con respecto* a $\mathfrak{L}$. Es fácil ver que como $(P_n(x))$ es una base algebraica de $\mathbb{C}[x]$, $\mathfrak{L}$ está determinado de manera única por

$$\mathfrak{L}(P_0(x)) = 1,\ \ \mathfrak{L}(P_n(x)) = 0,\ \ n \geq 1. \quad (6)$$

Además,

$$\mathfrak{L}(P_n^2(x)) = \lambda_n = C_1...C_n,\ \ n \geq 1. \quad (7)$$

Dado un MOPS $(P_n(x))$, podemos encontrar siempre un funcional de momentos para éste, definiendo

$$\mathfrak{L}(P_0(x)) = 1,\ \ \mathfrak{L}(P_n(x)) = 0,\ \ n \geq 1, \quad (8)$$

y haciendo extensión lineal, asi que $\mathfrak{L}(\sum_{k=0}^m a_kP_k(x)) = a_0$, $m \geq 0$. Se dirá que un MOPS $(P_n(x))$ *está acotado por* M si $M \geq 3$ y si B_n, C_n en la relación de recurrencia (1) satisfacen

$$|B_n| \leq \frac{M}{3},\ \ |C_{n+1}| \leq \frac{M}{3},\ \ n \geq 0. \quad (9)$$

Si $(P_n(x))$ es un MOPS dado por (1), (2), se define su *fracción continua* $X(x)$ por

$$X(x) = \cfrac{1}{(x-B_0) - \cfrac{C_1}{(x-B_1) - \cfrac{C_2}{(x-B_2) - ...}}}. \quad (10)$$

En tal caso

$$X_n(x) := \cfrac{1}{(x-B_0) - \cfrac{C_1}{(x-B_1) - ... - \cfrac{C_{n-1}}{x-B_{n-1}}}},\ \ n \geq 2, \quad (11)$$

se denomina el $n-$*convergente* de dicha fracción continua. Es usual convenir en que $X_1(x) = \frac{1}{x-B_0} = \frac{1}{P_1(x)}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 1$ suficientemente grande, y $\lim_{n\to\infty} X_n(z)$ existe en $\mathbb{C}$, se dice que la *fracción continua* $X(x)$ *converge en* z. Sea $X(z) = \lim_{n\to\infty} X_n(z)$. La función $X(z)$ está definida en todos los puntos donde (10) converge y se denomina aún la *fracción continua de* $(P_n(x))$.

Describiremos ahora un procedimiento para representar explícitamente el funcional de momentos de un MOPS. Los siguientes son resultados básicos para los propósitos del presente artículo.

Teorema 1. *Si $X_n(x)$ es el $n-$convergente de la fracción continua de un MOPS $(P_n(x))$, entonces*

$$X_n(x) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n(x)},\ \ n \geq 1. \quad (12)$$

(Véase [4], Chap. III).

Teorema 2. *Si $(P_n(x))$ es un MOPS acotado por M, las raíces de todos los $P_n(x)$ están contenidos en el conjunto $\{z/|z| \leq M\}$, y la fracción continua de $(P_n(x))$ converge en $\{z/|z| > M\}$ hacia $X(z)$ en este último dominio. De hecho, la convergencia es uniforme en $\{z/|z| \geq M'\}$ para todo $M' > M$, así que $X(z)$ es analítica en z para $|z| > M$, y se deduce además que $X(z) \sim 1/z$ cuando $z \to \infty$, es decir, que*

$$\lim_{z\to\infty} zX(z) = 1. \quad (13)$$

Una demostración del teorema 2 puede encontrarse en [2], [3].

Teorema 3. *Si $\mathfrak{L}$ es el funcional de momentos para un MOPS $(P_n(x))$ acotado por M, y $X(x)$ es la fracción continua de $(P_n(x))$, entonces $\mathfrak{L}$ admite la representación*

$$\mathfrak{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)X(z)dz, P(x) \in \mathbb{C}[x], \quad (14)$$

donde C es cualquier contorno positivamente orientado de $\{z/|z| > M\}$ que contenga a 0 en su interior.

La demostración del teorema 3 puede consultarse en [2], [3].

Teorema 4. *Si $\big(P_n(x)\big)$ es un MOPS positivo, lo cual significa que B_n, C_n en (1) son números reales y*

$$C_{n+1} > 0, \quad n \geq 0, \tag{15}$$

entonces $\mathfrak{L}$ admite también una representación de la forma

$$\mathfrak{L}\big(P(x)\big) = \int P(t)d\mu(t) \tag{16}$$

donde μ es una medida boreliana positiva sobre la recta real.

Este resultado se conoce como el *teorema de Favard.* Véase [4] para una demostración. Se dice que μ es una *medida de ortogonalidad* del MOPS $\big(P_n(x)\big)$ y que $\big(P_n(x)\big)$ es ortogonal para μ, o, con respecto a μ. En general, μ no es única. Cuando μ es única, se dice que el *problema de momentos para $\mathfrak{L}$ está determinado* y μ se denomina la *medida espectral* del MOPS $\big(P_n(x)\big)$. Esto último sucede cuando el MOPS $\big(P_n(x)\big)$ es positivo y acotado por M, en cuyo caso $\operatorname{Supp}\mu \subseteq [-M, M]$, las raices de todos los polinomios $P_n(x)$ son reales, simples y están contenidas en $(-M, M)$, y $X(z)$ puede prolongarse analíticamente a $\mathbb{C}\backslash[-M, M]$. De hecho,

$$X(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}, \quad z \notin \operatorname{Supp}\mu. \tag{17}$$

Recordamos que $\operatorname{Supp}\mu$, el *soporte de μ*, es el menor subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}$ tal que $\mu\ (\mathbb{R}\backslash F) = 0$, o, lo que es lo mismo en nuestro caso, que $\mu(F) = \mu(\mathbb{R}) = 1$.

La relación (17) se conoce como el *teorema de Markov* (véase [3] para una demostración) e implica que (14) es aún válida si C es un contorno positivamente orientado de $\mathbb{C}\backslash[-M; M]$ con $z = 0$ en su interior.

La medida μ y el funcional $\mathfrak{L}$ pueden también expresarse en términos de $X(x)$ mediante la llamada *fórmula de inversión de Stieltjes.* En efecto, bajo las anteriores hipótesis sobre $\big(P_n(x)\big)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(P(x)\big) &= \int P(t)d\mu(t)\\ &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} ImX(t-i\epsilon)P(t)dt\end{aligned} \tag{18}$$

para $\epsilon > 0$, $a > M$ (así que $\operatorname{Supp}\mu \subseteq (-a, a)$). Para una demostración, véase [3].

La fórmula (18) es en general difícil de usar, pues no es fácil intercambiar límite e integral. Una serie de circunstancias frecuente en las aplicaciones que hace esto posible es, sin embargo, la siguiente:

Supóngase que $X(z)$ es la fracción continua de un MOPS $\big(P_n(x)\big)$ positivo y acotado por M. Supóngase además que:

A. $\lim\limits_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}} X(z)$ *existe para todo $x \in \mathbb{R}$, excepto tal vez para x en un subconjunto cerrado S de $\mathbb{R}$ que tiene sólo un número finito de puntos de acumulación.*

B. La función

$$\widetilde{X}(z) = \begin{cases} X(z), & \operatorname{Im} z < 0,\\ \lim\limits_{\substack{\zeta\to z\\ \operatorname{Im}\zeta<0}} X(\zeta), & z\in\mathbb{R}, \quad z \notin S \end{cases} \tag{19}$$

es continua en $\{z/Im(z) \leq 0\}$, excepto tal vez en S.

C. *El limite $\lim_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}} (z-x)X(z)$ existe y es finito para todo $x \in \mathbb{R}$; en particular , para todo $x \in S$.*

Nótese que S es a lo sumo enumerable. Sea

$$w(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\widetilde{X}(t), \quad t \in \mathbb{R}\backslash S. \tag{20}$$

Entonces w es continua sobre $\mathbb{R}\backslash S$ con $w(t) \geq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}\backslash S$ y $w(t) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}\backslash[-M, M]$. Además

$$w(t) = \lim_{\substack{z\to t\\ \operatorname{Im} z<0}} \frac{1}{2\pi i}\{X(z) - \overline{X(z)}\}, \quad t \in \mathbb{R}\setminus S, \tag{21}$$

ya que $\big(P_n(x)\big)$ es positivo, de lo cual $P_n(\overline{z}) = \overline{P_n(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

El siguiente teorema, establecido en [3], permite obtener directamente la medida μ a partir de (18), en las circunstancias descritas arriba.

Teorema 5. *Supóngase que (A), (B) y (C) valen para la fracción continua $X(z)$ de un MOPS $\big(P_n(x)\big)$ positivo y acotado por M. Sean $\widetilde{X}(z)$ y $w(t)$ como arriba y sea*

$$\Lambda_\zeta = \lim_{\substack{z\to\zeta\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{(z-\zeta)\widetilde{X}(z)\}. \tag{22}$$

Entonces $w \geq 0$ es integrable sobre $\mathbb{R}$ y nula sobre $\mathbb{R}\backslash[-M, M]$, $\Lambda_\zeta \geq 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{R}$, $\Lambda_\zeta = 0$ si $\zeta \in \mathbb{R}\backslash S$, y

$$\mathfrak{L}\big(P(x)\big) = \sum_{\zeta\in S}\Lambda_\zeta P(\zeta) + \int_{-\infty}^{\infty} P(t)w(t)dt, P(x) \in \mathbb{C}[x]. \tag{23}$$

Además, si μ es la medida espectral de $\big(P_n(x)\big)$, entonces $\Lambda_\zeta = \mu(\{\zeta\})$ para todo $\zeta \in S$.

Para la demostración, que hace uso de todos los resultados anteriores, véase [3]. El teorema 5 garantiza que la medida μ está dada por

$$d\mu(t) = \sum_{\xi \in S} \Lambda_\xi \delta(t-\xi)dt + w(t)dt \tag{24}$$

donde $\delta(t-\xi)$ es la medida de Dirac en ξ. Si $\Lambda_\xi \neq 0$, se dice que el punto ξ *porta la masa* Λ_ξ de μ, y, también, que es un *valor propio de* μ.

Nota 1. Aún para $\zeta \in S$ puede suceder que $\Lambda_\zeta = 0$. De hecho, el conjunto S se escoge, en lo posible, de tal manera que incluya todos los puntos en donde haya duda acerca de la existencia del límite en (19).

Los siguientes ejemplos ilustran la manera de aplicar el teorema 5.

Ejemplo 1. El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de segunda clase*, $(\widetilde{U}_n(x))$, es el MOPS positivo cuya relación de recurrencia es

$$x\widetilde{U}_n(x) = \widetilde{U}_{n+1}(x) + \frac{1}{4}\widetilde{U}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{25}$$

sujeta a las condiciónes iniciales

$$\widetilde{U}_{-1}(x) = 0, \quad \widetilde{U}_0(x) = 1. \tag{26}$$

En este caso $B_n = 0$ y $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 0$. Claramente $(\widetilde{U}_n(x))$ está acotado por $M = 3$, pues

$$0 = |B_n| \leq \frac{3}{3} \;\; y \;\; |C_{n+1}| = \frac{1}{4} \leq 1 = \frac{3}{3}\cdot \tag{27}$$

La fracción continua del sistema $(\widetilde{U}_n(x))$ es

$$X(x) = \cfrac{1}{x - \frac{1}{4}\left[\cfrac{1}{x - \cfrac{1/4}{x - \ldots}}\right]}\cdot \tag{28}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}X(z)}, \quad |z| \geq 3, \tag{29}$$

o, lo que es equivalente, que

$$X^2(z) - 4zX(z) + 4 = 0, \quad |z| \geq 3. \tag{30}$$

Entonces

$$\begin{aligned} X(z) &= 2(z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}}), \\ (z^2-1)^{\frac{1}{2}} &= ze^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-\frac{1}{z^2})}, z \notin [-1,1], \end{aligned} \tag{31}$$

donde Log es la rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con parte imaginaria (argumento) en $(-\pi, \pi]$, la cual es analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (la rama principal).

Si fuera $X(z) = 2(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}})$, se obtendría que $X(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$, y no se daría el comportamiento asintótico esperado de $X(z)$, es decir, $X(z) \sim 1/z$. Como, en cambio, $2z(z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}) \to 1$ cuando $z \to \infty$, se tendrá que $X(z) = 2(z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}})$, la cual, dado que $\operatorname{Log}(1 - \frac{1}{z^2})$ es analítica para $z \notin [-1,1]$, es una función analítica en todo el plano salvo en el intervalo $[-1,1]$, y, por lo tanto, en $\mathbb{C}\setminus[-3,3]$. Debe notarse que no es apropiado tomar $(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2-1)}$, $z \notin [-1,1]$, pues esta función no resulta ser analítica en $\mathbb{C} \setminus [-3,3]$, al presentar discontinuidades sobre el eje imaginario. Naturalmente, podría tomarse, para $z \notin [-1,1]$, $(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2-1)}$ si $Re(z) \geq 0$ y $(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = -e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2-1)}$ si $Re(z) < 0$, lo cual es, al fin y al cabo, equivalente a lo que hemos hecho.

Para construir la función $\widetilde{X}(z)$ del teorema 5, calcularemos primero

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\zeta \to a \\ \operatorname{Im}\zeta < 0}} 2(\zeta - (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad = \lim_{\substack{\zeta \to a \\ \operatorname{Im}\zeta < 0}} 2\{(x+iy) - (x+iy)e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{(x+iy)^2}\right)}\}, \end{aligned} \tag{32}$$

para $\zeta = x + iy$, cuando $a \in (-1,0) \cup (0,1)$. Nótese que el anterior límite es $2(a - (a^2-1)^{\frac{1}{2}})$ si $a \notin [-1,1]$. Debe observarse, sin embargo, que si $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada usual de un número real $x \geq 0$, entonces $(a^2-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2-1}$ si $a > 1$, $(a^2-1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{a^2-1}$ si $a < -1$.

Ahora, si $0 < a < 1$, entonces, teniendo en cuenta que $1 - \dfrac{x^2-y^2}{|\zeta|^4} < 0$ para $|y|$ pequeño, que $y < 0$ y que $x > 0$ para ζ suficientemente próximo a a, se obtiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\zeta \to a \\ \operatorname{Im}\zeta < 0}} \operatorname{Arg}(1 - \frac{1}{\zeta^2}) \\ &\quad = \lim_{\substack{\zeta \to a \\ \operatorname{Im}\zeta < 0}} \operatorname{Arg}(1 - \frac{x^2-y^2}{|\zeta|^4} + \frac{2xy}{|\zeta|^4}i) = -\pi. \end{aligned} \tag{33}$$

A su vez, para $-1 < a < 0$,

$$\lim_{\substack{\zeta \to a \\ \operatorname{Im}\zeta < 0}} \operatorname{Arg}(1 - \frac{1}{\zeta^2}) = \pi. \tag{34}$$

Aquí, $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, $z \neq 0$, es el argumento principal. Entonces, teniendo en cuenta que $a/|a| = 1$ si

$a > 0$, $a/|a| = -1$ si $a < 0$, se concluye que

$$\lim_{\substack{\zeta\to a\\ \operatorname{Im}\zeta<0}} 2\big(\zeta - (\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\big) = 2\big(a + i\sqrt{1-a^2}\big), \qquad (35)$$

cuando $a \in (-1,0)\cup(0,1)$. Por lo tanto,

$$\widetilde{X}(z) = \begin{cases} 2\big(z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\big), \operatorname{Im} z < 0, \\ 2\big(z + i\sqrt{1-z^2}\big), z \in (-1,0)\cup(0,1), \\ 2\big(z - \sqrt{z^2-1}\big),\ z\in\mathbb{R},\ z>1, \\ 2\big(z + \sqrt{z^2-1}\big),\ z\in\mathbb{R},\ z<-1. \end{cases} \qquad (36)$$

Como en los puntos $-1, 0, 1$ puede haber dudas acerca del valor del límite que define $\widetilde{X}(z)$, tomamos $S = \{-1,0,1\}$, tanto más cuanto que, evidentemente,

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \lim_{\substack{z\to 1\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{(z-1)\widetilde{X}(z)\} = 0, \\ &\text{(ii)}\ \lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{(z+1)\widetilde{X}(z)\} = 0, \\ &\text{(iii)}\ \lim_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{z\widetilde{X}(z)\} = 0. \end{aligned} \qquad (37)$$

La medida espectral μ de $\big(\widetilde{U}_n(x)\big)$ *no porta entonces masas en ninguno de los puntos de* $S = \{-1,0,1\}$, de lo cual se deduce que es *absolutamente continua*. Como en este caso

$$w(t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\chi(t), \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (38)$$

donde χ es la función característica de $(-1,0)\cup(0,1)$, se concluye que

$$d\mu(t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\chi(t)dt, \quad t\in\mathbb{R}. \qquad (39)$$

Que μ dada por (39) es la medida espectral del sistema $\big(\widetilde{U}_n(x)\big)$ es un hecho bien conocido que puede establecerse de muchas maneras, incluyendo argumentos trigonométricos completamente elementales. Para muchos propósitos es más conveniente considerar el sistema de Chebyshev de segunda clase dado por $U_n(x) = 2^n\widetilde{U}_n(x)$, $n \geq 0$, el cual queda determinado por la relación de recurrencia

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad n\geq 0, \qquad (40)$$

y las condiciones iniciales

$$U_{-1}(x) = 0, \quad U_0(x) = 1. \qquad (41)$$

Como es claro, el sistema $\big(U_n(x)\big)$ no es mónico, pero es aún un sistema ortogonal de polinomios para μ dada por (39).

Ejemplo 2. El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de primera clase*, $\big(\widetilde{T}_n(x)\big)$, es el MOPS positivo cuya relación de recurrencia es

$$x\widetilde{T}_n(x) = \widetilde{T}_{n+1}(x) + C_n\widetilde{T}_{n-1}(x), \quad n\geq 0, \qquad (42)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\widetilde{T}_{-1}(x) = 0, \quad \widetilde{T}_0(x) = 1. \qquad (43)$$

En este caso $B_n = 0$, $n\geq 0$, C_0 es arbitrario, $C_1 = 1/2$, $C_n = 1/4$ si $n \geq 2$.

Claramente podemos tomar $M = 3$, pues $0 = |B_n| \leq 1$ y $C_{n+1} \leq 1$, $n \geq 0$.

La fracción continua es

$$X_1(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{\frac{1}{2}}{z - \cfrac{\frac{1}{4}}{z - \frac{1}{4}\cdots}}}, \quad z \notin [-3,3]. \qquad (44)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}X(z)} = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad z\notin[-3,3], \qquad (45)$$

siendo $X(z) = 2\big(z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\big)$ la fracción continua de $\big(\widetilde{U}_n(x)\big)$. En este caso $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ es como en (31), así que

$$\widetilde{X}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \ \operatorname{Im} z < 0 \\ \dfrac{i}{\sqrt{1-z^2}},\ z\in(-1,0)\cup(0,1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}},\ z\in\mathbb{R},\ \ z>1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}},\ z\in\mathbb{R},\ \ z<-1. \end{cases} \qquad (46)$$

De nuevo podemos tomar $S = \{-1,0,1\}$ y, como también

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \lim_{\substack{z\to 1\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{(z-1)\widetilde{X}_1(z)\} = 0, \\ &\text{(ii)}\ \lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{(z+1)\widetilde{X}_1(z)\} = 0, \\ &\text{(iii)}\ \lim_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z<0}} Re\{z\widetilde{X}_1(z)\} = 0, \end{aligned} \qquad (47)$$

la medida espectral μ de $\big(\widetilde{T}_n(x)\big)$ tampoco portará masas en los puntos de $S = \{-1,0,1\}$. Como en este caso

$$w(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\chi(t), \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (48)$$

se deduce que

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\chi(t)dt, \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (49)$$

y es también absolutamente continua. Que μ dada por (49) es la medida espectral de $\big(\widetilde{T}_n(x)\big)$ es también bien conocido y puede demostrarse de muchas maneras. Constituye, sin embargo, un buen ejemplo de la aplicabilidad del teorema 5. Anotamos finalmente que, más que el sistema $(\widetilde{T}_n(x))$, se utiliza el $(T_n(x))$ dado por $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = 2^{n-1}\widetilde{T}_n(x)$, $n \geq 2$, o, lo que es lo mismo, por

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{50}$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \tag{51}$$

el cual es aún un sistema ortogonal para μ dada por (49).

Ejemplo 3. El siguiente ejemplo es algo más delicado que los dos anteriores (que tal vez constituyen los ejemplos más simples de polinomios ortogonales). Sin embargo, con el fin de mantener bajo control la fracción continua, está construido sobre ellos. Este sistema, $(p_n(x))$, está dado por la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} xp_{2n}(x) =& p_{2n+1}(x) + \frac{n+2}{4(n+1)}p_{2n-1}(x) \\ xp_{2n+1}(x) =& p_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{52}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1. \tag{53}$$

Evidentemente $(p_n(x))$ está acotado por $M = 3$, y se tiene que

$$\begin{aligned} x^2p_{2n+1}(x) &= xp_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}xp_{2n}(x) \\ &= p_{2n+3}(x) + (\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)})p_{2n+1}(x) \\ &\qquad + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), n \geq 0, \end{aligned}$$

de lo cual

$$(x^2 - \frac{1}{2})p_{2n+1}(x) = p_{2n+3}(x) + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Haciendo entonces

$$p_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^n}P_n(x), \quad n \geq 0, \tag{54}$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)P_n(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{55}$$

con $P_0(x) = x, P_1(x) = 2p_3(x) = 2x^3 - x$. Sea

$$w = w(x) = 2x^2 - 1. \tag{56}$$

De (55) se deduce entonces que

$$P_n(x) = x\widetilde{U}_n(w), \quad n \geq 0, \tag{57}$$

(pues $P_0(x) = x$, $P_1(x) = xw$, de lo cual $x^{-1}P_n(x) = \widetilde{U}_n(w)$, $n \geq 0$). Por otra parte, el sistema $(p_n^{(1)}(x))$ de los primeros asociados de $(p_n(x))$ satisface

$$\begin{aligned} xp_{2n}^{(1)}(x) =& p_{2n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n-1}^{(1)}(x) \\ xp_{2n+1}^{(1)}(x) =& p_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{n+3}{4(n+2)}p_{2n}^{(1)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{58}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}^{(1)}(x) = 0, \quad p_0^{(1)}(x) = 1. \tag{59}$$

Entonces

$$x^2p_{2n}^{(1)}(x) = p_{2n+2}^{(1)}(x) + (\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)})p_{2n}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}\frac{n+2}{4(n+1)}p_{2n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 1,$$

de lo cual, haciendo

$$p_{2n}^{(1)}(x) = \frac{1}{2^n}Q_n(x), \quad n \geq 0, \tag{60}$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{61}$$

Además, $Q_0(x) = p_0^{(1)}(x) = 1$, $Q_1(x) = 2p_2^{(1)}(x) = 2x^2 - \frac{3}{4}$. Se obtiene entonces, haciendo $w = w(x)$ como en (56), que $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = w + \frac{1}{4}$, de lo cual se deduce que

$$Q_n(x) = \widetilde{U}_n(w) + \frac{1}{4}\widetilde{U}_{n-1}(w). \tag{62}$$

Esto implica, de (54), (57), (60) y (62), que

$$\frac{p_{2n}^{(1)}(x)}{p_{2n+1}(x)} = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{1}{4}\frac{\widetilde{U}_{n-1}(w)}{\widetilde{U}_n(w)}\right]. \tag{63}$$

Pero obviamente $\widetilde{U}_n^{(1)}(w) = \widetilde{U}_n(w)$ para todo $n \geq 0$, como se deduce de (25). Por lo tanto, si $X(z)$ denota la fracción continua de $(p_n(x))$, se tendrá que

$$X(z) = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{2}\left(w - \left(w^2-1\right)^{1/2}\right)\right], \quad z \notin [-1,1], \tag{64}$$

con $w = 2z^2 - 1$. Nótese que $w \in [-1,1]$ si y sólo si $z \in [-1,1]$, lo cual implica que

$$X(z) = \frac{1}{2z} + z - \left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}, \quad z \notin [-1,1], \tag{65}$$

y, como en el Ejemplo 1,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(z) &= \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \operatorname{Im}\zeta<0}} X(\zeta)\\ &= \begin{cases} \frac{1}{2z} + z - \left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}, \operatorname{Im} z < 0\\ \frac{1}{2z} + z + i\sqrt{1-z^2},\ z \in (-1,0)\cup(0,1),\\ \frac{1}{2z} + z + \sqrt{z^2-1},\ z \in \mathbb{R}, z < -1,\\ \frac{1}{2z} + z - \sqrt{z^2-1},\ z \in \mathbb{R}, z > 1,\end{cases}\end{aligned} \tag{66}$$

asi que $S = \{-1,0,1\}$. Como obviamente

$$\lim_{\substack{z\to\pm1\\ \operatorname{Im} z<0}} (z \mp 1)\widetilde{X}(z) = 0, \tag{67}$$

mientras que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \operatorname{Im} z<0}} z\widetilde{X}(z) = \frac{1}{2} \tag{68}$$

y, por otra parte,

$$w(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-t^2}\chi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{69}$$

donde χ es la función característica de $(-1,0)\cup(0,1)$, se deduce que el funcional de momentos $\mathfrak{L}$ de $(p_n(x))$ es

$$\mathfrak{L}(P(x)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\sqrt{1-t^2}dt + \frac{1}{2}P(0), \tag{70}$$

o sea, que la medida espectral está dada por

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1-t^2}\chi(t)dt + \frac{1}{2}\delta(t)dt \tag{71}$$

donde $\delta(t)$ es la medida de Dirac en $\xi = 0$. Nótese que $\operatorname{Supp}\mu = [-1,1]$. Obsérvese entonces que $\xi = 0$ es un *punto de masa interior al soporte de la medida* μ (un valor propio de μ sumergido en el espectro continuo $[-1,0)\cup(0,1]$).

Observamos finalmente que el éxito de la aplicación del teorema 5 depende en gran medida del conocimiento de la fracción continua de los polinomios. Este es usualmente el caso de los *sistemas cribados*, para el cual el procedimiento fué inicialmente diseñado, y ha demostrado ser de gran utilidad en ésta y otras circunstancias. Para una discusión al respecto, véanse [1] y [3].

Referencias

[1] **B. H. Aldana, J. A. Charris and O. Mora**, *On block resursions, Askey's sieved Jacobi polynomials and two related systems.* Colloquium Mathematicum, **78** (2001), 57–91.

[2] **J. A. Charris and F. Soriano**, *On the distributional orthogonality of the general Pollaczek polynomials.* Internat. J. Math. and Math. Sci., **19** (1996), 417-426.

[3] **J. A. Charris and O. Mora**, *On block recursions and the determination of spectral measures from continued fractions.* Internat. J. Appl. Math., **1** (1999), 635–688.

[4] **T. S. Chihara**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, New York, 1978.