

Artículo original

## Determinación de los parámetros orbitales subyacentes en las efemérides solares de Abraham Zacuto

### Determination of the underlying orbital parameters in Abraham Zacuto's solar ephemerides

J. Gregorio Portilla

Observatorio Astronómico Nacional, Facultad de Ciencias, Sede Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., Colombia

#### Resumen

Con base en la teoría del movimiento solar de Hiparco-Ptolomeo, se propone un método geométrico para determinar los parámetros de la órbita a partir de tres valores de longitud eclíptica correspondientes a tres tiempos distintos. El método se aplicó específicamente para encontrar los parámetros subyacentes utilizados en la construcción de las tablas solares contenidas en el *Almanach Perpetuum* de Abraham Zacuto. Se utilizaron dos procedimientos para la selección de los valores de longitud: el primero espaciado por tres meses, y el segundo, espaciado por un número de días superior a seis, se aplicó a cada mes de los años 1473 a 1476. El primer procedimiento arrojó valores consistentes con un origen alfonsí de las tablas de Zacuto; el segundo, con amplias dispersiones, sugiere que en algunos meses específicos se utilizaron valores distintos de la excentricidad solar.

**Palabras clave:** Zacuto, Abraham; Teoría solar; Ptolomeo; Tablas alfonsíes; Excentricidad.

#### Abstract

Based on the solar motion theory of Hipparchus-Ptolemy, a geometric method is proposed to determine the parameters of the orbit from three values of ecliptic longitude corresponding to three different times. The method was specifically applied to find the underlying parameters used to construct the solar tables contained in Abraham Zacuto's *Almanach Perpetuum*. The longitude values were selected using two procedures: the first spaced by three months, and the second, spaced by an amount of days greater than six, was applied to each month from 1473 to 1476. The first procedure yielded values consistent with an Alfonsine origin of Zacuto's tables; the second exhibited wide dispersions but suggested that for some specific months, different values of solar eccentricity were used.

**Keywords:** Zacut, Abraham; Solar theory; Ptolemy; Alfonsine tables; Excentricity.

#### Introducción

La reciente conmemoración de los 500 años de la primera circunnavegación del mundo por parte de la expedición española al mando de Fernando de Magallanes (1480-1521), epopeya que culminara tiempo después Sebastián Elcano (1476-1526), puso una vez más de relieve el estado de los conocimientos astronómicos requeridos para los viajes transoceánicos de semejante envergadura (Sánchez, 2021; Vieira, 2005; Marcondes de Souza, 1957), los cuales comenzaban a tener el auspicio decidido de las potencias europeas expansionistas.

La confianza de los capitanes de estas exploraciones renacentistas se incrementó hasta el punto de bordear primero las costas occidentales africanas, luego doblar el cabo de Buena Esperanza y, a continuación, seguir de largo y alcanzar la India. No contentos con ello, se arriesgaron a ir hasta las islas de las Especias, e incluso más allá, inicialmente siguiendo la dirección este, aunque luego pusieron sus ojos hacia el poniente y terminaron

**Citación:** Portilla JG. Determinación de los parámetros orbitales subyacentes en las efemérides solares de Abraham Zacuto. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 48(189):784-796, octubre-diciembre de 2024. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyfyn.2656>

**Editor:** Román Castañeda

**Correspondencia:**

José Gregorio Portilla;  
jgportillab@unal.edu.co

**Recibido:** 28 de mayo de 2024

**Aceptado:** 23 de septiembre de 2024

**Publicado en línea:** 14 de noviembre de 2024



Este artículo está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-Compartir Igual 4.0 Internacional

encontrándose con América, un continente enorme desconocido para los europeos. Sin importar la dirección que se tomara, la ejecución de tales viajes implicaba navegar por muchos días sin tener a la vista tierra, lo que obligaba a los navegantes a contar con los medios astronómicos necesarios para inferir la ubicación del barco. Lo primero era encontrar la latitud, ya fuera midiendo la altura de la estrella polar con respecto al horizonte o mediante la observación de estrellas cercanas al polo sur celeste, como las de la constelación del Octante o de la Cruz del Sur, cuando los viajes se hicieron cada vez más meridionales y era imposible vislumbrar la estrella polar (**Dennefeld**, 2020; **Albuquerque**, 1983). Sin embargo, la experiencia demostró que las observaciones del Sol con astrolabio eran más rigurosas y confiables que las de las estrellas hechas con cuadrante (**Marcondes de Souza**, 1957), lo que obligó a los marinos a contar con tablas de declinación del Sol a lo largo del año.

Los registros más antiguos de la utilización de observaciones del Sol para hallar la latitud son los de las expediciones portuguesas en la costa occidental africana, los cuales datan de 1484 a 1488 y se hacían casi exclusivamente en tierra (**Proverbio**, 1994). La técnica debió refinarse significativamente en los siguientes años hasta lograr hacer las observaciones en mar abierto, en medio del viento y el movimiento incesante del barco, lo que evidentemente debió conseguirse con el desarrollo del astrolabio náutico (**Swanick**, 2005). Por supuesto, para contar con la ubicación más precisa posible, debía contarse también con los valores de declinación solar más exactos que hubiera.

Se cree que las primeras tablas con datos explícitos de la declinación del Sol en cada día del año se basan en el *Almanach Perpetuum* del gran astrónomo salmantino Abraham Zacuto (1452-1515). Si bien es cierto que no fue profesor de la Universidad de Salamanca debido a su condición de judío, sus obras ejercieron una gran influencia en el medio académico de España y Europa (**Sánchez**, 2023). El *Almanach Perpetuum*, originalmente redactado en hebreo en 1478 bajo el nombre de la *Gran Composición* (**Goldstein**, 1998; **Chabas & Goldstein**, 2000), fue luego traducido a distintos idiomas y finalmente salió impreso en 1496. Puede afirmarse que las tablas solares de Zacuto descansan, en últimas, en el modelo geométrico desarrollado por Hiparco de Nicea en el siglo II a. C., el cual fue complementado por Claudio Ptolomeo dos y medio siglos después. La esencia del modelo no sufrió modificaciones a lo largo de las centurias; los astrónomos de los siglos siguientes se contentaron con refinar los datos de los parámetros de la órbita solar y perfeccionar los valores de la duración del año trópico y la oblicuidad de la eclíptica (**Portilla**, 2023); la única modificación digna de mención durante la Edad Media fue el denominado movimiento de acceso y receso (también llamado trepidación), un movimiento oscilante ficticio que se le atribuía al punto vernal.

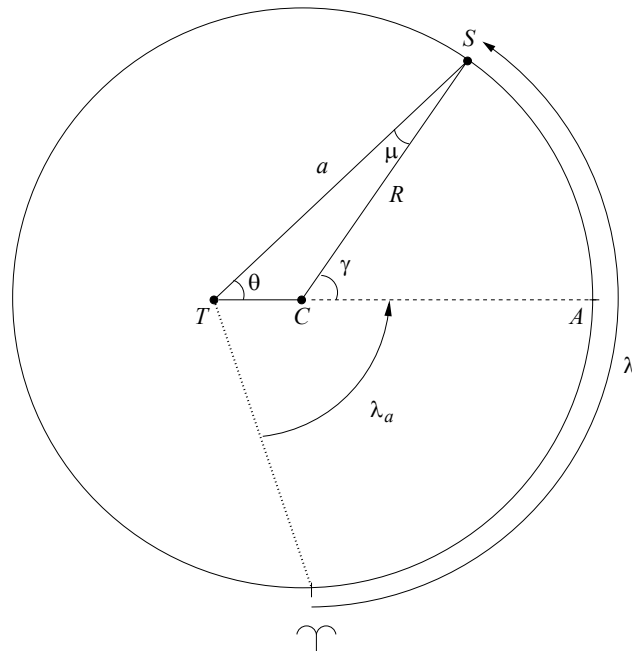
Los ensayos numéricos que comparan los resultados obtenidos al utilizar los parámetros de las tablas alfonsíes con los valores de longitud solar consignados en el *Almanach Perpetuum* sugieren que los primeros se emplearon en la elaboración de los segundos (**van der Werf**, 2017; **Chabas & Goldstein**, 2000). Pero es natural preguntarse si los datos de longitud contenidos en las tablas se derivaron siempre de los valores constantes en los parámetros alfonsíes o si tuvieron algún tipo de variación.

Varios autores han acudido a métodos estadísticos basados en mínimos cuadrados no lineales, con el fin de extraer mediante “ingeniería inversa” los parámetros implícitos en determinadas efemérides de cuerpos celestes establecidas en la Antigüedad o en la Edad Media (**Thomann**, 2022; **Van Dalen**, 1993). Aunque estos métodos logran cumplir su cometido, el accionar numérico que subyace en ellos no permite tener una visión que permita inferir propiedades de la órbita bajo ciertas condiciones particulares. Por ello, en este artículo se propone un simple mecanismo geométrico para determinar, con base en tres valores cualesquiera de la longitud solar, los tres parámetros básicos de la órbita a partir del modelo solar de Hiparco-Ptolomeo. Tal estrategia se aplicará a los valores de longitud eclíptica contenidos en el *Almanach Perpetuum* para así inferir sobre qué valores específicos de los parámetros de la órbita se construyeron dichas efemérides.

Se hace primero una exposición trigonométrica de la teoría solar de Hiparco-Ptolomeo; en seguida se describe el mecanismo propuesto para encontrar los parámetros orbitales; posteriormente se expone la estrategia para seleccionar los valores de longitud que sirven de punto de partida de los cálculos y luego se analizan los valores hallados y se consignan las conclusiones.

### La teoría solar de Hiparco-Ptolomeo

El procedimiento geométrico básico para determinar la posición del Sol en un tiempo  $t$  apelando a la teoría solar de Hiparco-Ptolomeo (TSHP), tal y como se describe en *El Almagesto*, es de sobra conocido (Portilla, 2023; Pedersen, 2010; Toomer, 1998), por lo que no se incluye aquí. Alternativamente, se presenta a continuación una forma equivalente de dicha transformación con base en la trigonometría plana. Según la TSHP, el Sol, S, se mueve a lo largo de una circunferencia con velocidad uniforme y, así, el ángulo  $\gamma$ , centrado en C, es función lineal del tiempo (Figura 1). La Tierra, T, está ligeramente desplazada de C, de manera que el ángulo  $\theta$ , que describe la posición del Sol visto desde la Tierra, no barre ángulos iguales en tiempos iguales. Tanto  $\gamma$  como  $\theta$  se cuentan desde el apogeo (A) del Sol; el apogeo, a su vez, posee un ángulo  $\lambda_a$  con respecto al punto vernal ( $\Upsilon$ ).



**Figura 1.** Descripción de la TSHP. El Sol, S, se mueve uniformemente a lo largo de una circunferencia con centro en C. La Tierra, T, se encuentra desplazada ligeramente del centro; A representa el apogeo del Sol y  $\Upsilon$  es el punto vernal.

Se ve inmediatamente que:

$$\frac{\text{sen } \gamma}{a} = \frac{\text{sen } \theta}{R},$$

donde  $R$  es el valor del radio de la circunferencia (que se adopta igual a la unidad) y  $a$  es la distancia variable existente entre la Tierra y el Sol.

Es claro también que:

$$a = R \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma}, \tag{1}$$

donde  $e$  es la excentricidad (la relación entre la distancia TC con respecto al radio  $R$ ). De manera que enseguida se obtiene:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } \gamma}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \gamma}}, \quad (2)$$

en la que  $R = 1$ . El ángulo  $\gamma$  para cualquier tiempo  $t$  está dado, evidentemente, por la siguiente expresión:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{360^\circ}{T_t}(t-t_0), \quad (3)$$

donde  $\gamma_0$  es el valor de ese ángulo en un instante del tiempo de referencia  $t_0$ , denominado la fecha radix, que puede hallarse a partir de una observación solar realizada desde la Tierra ( $\theta_0$ ) en el instante  $t_0$ ;  $T_t$  es la duración del año trópico. Habiendo hallado  $\gamma$ , la determinación de  $\theta$  para cualquier tiempo  $t$  es inmediata de acuerdo con la ecuación (2).

La longitud aparente del Sol  $\lambda$  para el instante de tiempo  $t$  está dada entonces por:

$$\lambda = \lambda_a + \theta. \quad (4)$$

En caso de que se desee conocer la declinación  $\delta$  del Sol, esta se puede obtener a partir de la conocida transformación entre las coordenadas eclípticas y las ecuatoriales absolutas, de manera que:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varepsilon \text{ sen } \lambda,$$

donde  $\varepsilon$  es la oblicuidad de la eclíptica.

Los valores que obtuvo Ptolomeo a mediados del siglo II d.C. son los siguientes:  $e = 0,0417$ ,  $\lambda_a = 65,5^\circ$ ,  $T_t = 365^d 5^h 55^m 11,9^s$  y  $\varepsilon = 23^\circ 51' 20''$  (Toomer, 1998).

## Determinación de los parámetros

Vista desde una óptica moderna, la intención de conocer los parámetros geométricos que subyacen en los valores de longitud debidamente presentados en una tabla responde a una determinación orbital, esto es, si se conocen los valores de la longitud eclíptica correspondientes a varios tiempos distintos, bien pueden determinarse los parámetros geométricos que, se supone, están detrás de los valores de longitud con los que fueron calculados.

Hasta donde se pudo constatar, ningún autor ha apelado a la estrategia simple de conocer a partir de tres valores cualesquiera de la longitud del Sol contenidos en una tabla específica los parámetros que definen la órbita excéntrica descrita atrás sin apelar a métodos estadísticos sólidos, lo que, por supuesto, puede arrojar luces acerca de la constancia de los valores de los parámetros orbitales sobre los cuales se construyeron las tablas solares de Zacuto.

Supongamos que se dispone de tres valores de la longitud del Sol ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) correspondientes a tres tiempos distintos  $t_1, t_2, t_3$ , con  $t_3 > t_2 > t_1$ . Se ha de adoptar de antemano el valor de la duración del año trópico,  $T_t$ . El objetivo es conocer el valor de la excentricidad  $e$  (o TC), la longitud del apogeo  $\lambda_a$  y el ángulo  $\gamma_0$  para una fecha de referencia  $t_0$ , suponiendo que el Sol se mueve en una órbita de tipo excéntrico de acuerdo al modelo de Hiparco-Ptolomeo.

De la ecuación (3) se desprende que:

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_2 - t_1), \quad \gamma_3 - \gamma_2 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_3 - t_2), \quad \gamma_3 - \gamma_1 = \frac{360^\circ}{T_t}(t_3 - t_1)$$

las cuales, por supuesto, son cantidades conocidas. Dado que los triángulos conformados por las posiciones del Sol (S1, S2, S3) y el centro C son isósceles, las cuerdas entre dos posiciones del Sol, que llamaremos  $d_{21}$ ,  $d_{32}$  y  $d_{31}$ , se conocen inmediatamente, pues están dadas por:

$$\begin{aligned} d_{21} &= \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]}, \\ d_{32} &= \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_3 - \gamma_2)]}, \\ d_{31} &= \sqrt{2[1 - \cos(\gamma_3 - \gamma_1)]}, \end{aligned}$$

en las cuales se tomó  $R = 1$ .

Puesto que la longitud aparente está dada por la ecuación (4), se infiere que:

$$\theta_2 - \theta_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \theta_3 - \theta_2 = \lambda_3 - \lambda_2, \quad \theta_3 - \theta_1 = \lambda_3 - \lambda_1,$$

de modo que al utilizar el teorema del coseno de la trigonometría plana se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - d_{21}^2 &= 0, \\ a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) - d_{32}^2 &= 0, \\ a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) - d_{31}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Este último conjunto conforma un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Su solución no es trivial. Para encontrarla se utilizaron inicialmente programas de cálculo simbólico, los cuales encuentran un conjunto de varias soluciones como salida, entre las que no es difícil seleccionar la correcta, pues es claro que se han de rechazar aquellas con valores negativos, imaginarios o incoherentes con la secuencia de valores de los tiempos (es decir, valores decrecientes de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  cuando los tiempos son posteriores al perigeo y crecientes cuando son posteriores al apogeo). Como era deseable una forma más ágil de realizar los cálculos, se optó al final por el uso de la función `fsolve` de Python, con valores de arranque próximos a la unidad. Esta opción fue afortunada, pues el código que se escribió arrojó siempre una única solución coherente con la secuencia de los tiempos utilizados.

Una vez determinados  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ , el paso siguiente aplica para cada par de posiciones. En lo siguiente se describe la secuencia para el par  $S_1$ - $S_2$  (**Figura 2**). El ángulo  $\alpha_{21}$  está dado por:

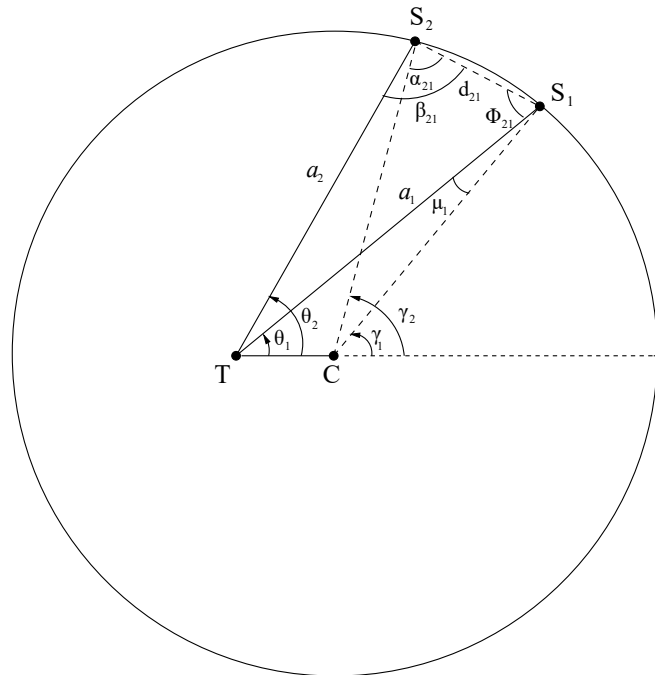
$$\alpha_{21} = \frac{180^\circ - (\gamma_2 - \gamma_1)}{2},$$

y el ángulo  $\beta_{21}$  por:

$$\beta_{21} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{a_1 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{d_{21}} \right]. \tag{6}$$

Hallados estos dos ángulos, el valor de la distancia TC, esto es, la excentricidad ( $e$ ) se encuentra inmediatamente:

$$e = \sqrt{1 + a_2^2 - 2a_2 \cos(\beta_{21} - \alpha_{21})}. \tag{7}$$



**Figura 2.** Dos posiciones del Sol ( $S_1$  y  $S_2$ ) en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . No se muestra una tercera posición para efectos de claridad. La cuerda  $d_{21}$  es la distancia entre esas dos posiciones.

Una forma alternativa de hallar  $e$  es calcular el ángulo  $\mu_1$ . Primero se halla el ángulo  $\Phi_{21}$  mediante:

$$\Phi_{21} = 180^\circ - \beta_{21} - (\theta_2 - \theta_1), \quad (8)$$

y, como es fácil ver, la relación entre  $\Phi_{21}$  y el ángulo  $\mu_1$  es:

$$\mu_1 = \alpha_{21} - \Phi_{21},$$

de modo que  $e$  puede también expresarse como:

$$e = \sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \mu_1}. \quad (9)$$

La excentricidad debe arrojar idéntico valor si se utilizan como alternativa los datos correspondientes a los pares  $S_1-S_3$  o  $S_2-S_3$ . Hallada la excentricidad, la determinación de la longitud del apogeo es inmediata. De la ecuación (1) se infiere:

$$\gamma_i = \cos^{-1} \left( \frac{a_i^2 - 1 - e^2}{2e} \right),$$

en la que el valor del cuadrante correcto del ángulo puede determinarse haciendo un análisis de los valores relativos de  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Con  $\gamma_i$ , el ángulo  $\theta_i$  se encuentra directamente a través de (2):

$$\theta_i = \sin^{-1} \left( \frac{\text{sen } \gamma_i}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \gamma_i}} \right).$$

La longitud del apogeo queda establecida con ayuda de (4):

$$(\lambda_a)_i = \lambda_i - \theta_i.$$

Por último, se puede determinar el valor de  $\gamma$  en una época de referencia ( $t_0$ ), que llamaremos  $\gamma_0$ . Es claro que para cualquier tiempo  $t_i$  se tiene:

$$\gamma_i = \gamma_0 + \frac{360^\circ}{T_i} (t_i - t_0),$$

de la que se obtiene de forma inmediata:

$$\gamma_0 = \gamma_i - \frac{360^\circ}{T_i} (t_i - t_0) \quad (10).$$

No sobra advertir que este valor se obtiene con referencia al apogeo del Sol en el tiempo  $t_0$ . Los parámetros orbitales que determinan la geometría de la órbita son, entonces:  $e$ ,  $\lambda_a$  y  $\gamma_0$  (para un  $t_0$ ). Se asumió que a lo largo del año el valor de  $\lambda_a$  es constante, esto es, se consideró fijo el punto vernal dentro del intervalo estudiado  $t_3 - t_1$ , (es decir, el efecto de la precesión y el de la trepidación son nulos), lo que puede justificarse si se tiene en cuenta que la tasa anual del término principal de precesión era de apenas 26,4" y unos 7,6" por año para la trepidación a finales del siglo XV según los valores adoptados para las tablas alfonsíes (Pouille, 1969).

### Un caso particular

El procedimiento descrito adopta una solución sencilla, sin apelar a la aproximación numérica, cuando se toma  $\lambda_1 = 0^\circ$ ,  $\lambda_2 = 90^\circ$  y  $\lambda_3 = 180^\circ$ , esto es, los valores en longitud del Sol en equinoccio de primavera, solsticio de verano y equinoccio de otoño, respectivamente. Fue con el conocimiento de la diferencia en tiempo entre tales situaciones con el que Hiparco y Ptolomeo lograron establecer los parámetros geométricos de la órbita solar. Según estos astrónomos:  $t_2 - t_1 = 94,5$  d y  $t_3 - t_2 = 92,5$  d, de lo que se infiere que:  $t_3 - t_1 = 187$  d (Toomer, 1998). Las ecuaciones (5) se reducen entonces a:

$$a_1^2 + a_2^2 = d_{21}^2, \quad (11)$$

$$a_2^2 + a_3^2 = d_{32}^2, \quad (12)$$

$$a_1^2 + a_3^2 + 2 a_1 a_3 = d_{31}^2. \quad (13)$$

Una forma de solucionar este sistema es reemplazar el valor de  $a_3$  despejado de la ecuación (12) en la ecuación (13), resolver la ecuación cuadrática resultante para  $a_1$  y tomar la solución positiva para llegar a:

$$a_1 = d_{31} - \sqrt{d_{32}^2 - a_2^2},$$

con la que, al elevar al cuadrado, igualar con la ecuación (11) y despejar para  $a_2$ , es posible obtener:

$$a_2 = \frac{\sqrt{2(d_{31}^2 d_{21}^2 + d_{31}^2 d_{32}^2 + d_{21}^2 d_{32}^2) - (d_{32}^4 + d_{31}^4 + d_{21}^4)}}{2d_{31}}.$$

Hallado  $a_2$ , los valores de  $a_1$  y  $a_3$  se obtienen directamente de las ecuaciones (11) y (12), respectivamente.

El procedimiento que se sigue a continuación es idéntico al descrito atrás, solo resta agregar que las ecuaciones (6) y (8) pueden escribirse ahora así:

$$\beta_{21} = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (a_2/a_1)^2}} \right), \quad \Phi = 90^\circ - \beta_{21}.$$

El lector puede verificar que, para este caso en particular, al tomar  $T_t = 365\text{d } 5\text{h } 55\text{m } 12,021\text{s}$ , se obtiene directamente:  $a_1 = 1,0165$ ,  $a_2 = 1,0375$ ,  $a_3 = 0,9821$ ,  $e = 0,0414$ , y  $\lambda_a = 65,43^\circ$ .

## Metodología de cálculo

Habiendo establecido el proceso de cálculo, hay que definir a continuación cuáles son los valores más apropiados de longitud eclíptica para ejecutar el procedimiento, pues si se trata de seleccionar tres valores cualesquiera (entre las 365 opciones para cada año no bisiesto), el número de combinaciones posibles es, por supuesto, muy elevado. Además, los primeros ensayos evidenciaron una tendencia notoria en los resultados que era previsible hasta cierto punto. De tener una situación ideal, esto es, de suponer que los datos de longitud fueron calculados directamente a partir de una teoría solar con parámetros de valor constante, y apelando a las facilidades de cálculo con las que se dispone hoy, el proceso de determinación orbital arrojaría siempre los mismos valores de los parámetros con independencia de los datos de entrada utilizados, descartando, por supuesto, posibles errores de cálculo o errores de imprenta.

En otros términos, sin importar los instantes de tiempo y los correspondientes valores de longitud eclíptica que se escojan para el cálculo, los datos numéricos de  $e$ ,  $\lambda_a$  y  $\gamma_0$  (para un  $t_0$ ) arrojarían siempre un valor constante o, de existir diferencias, estas estarían dentro de un rango muy estrecho. Sin embargo, tal comportamiento no se observa, ya que los primeros ensayos numéricos arrojaron como resultado una amplia dispersión de los valores de los tres parámetros, en particular cuando los intervalos de tiempo eran relativamente cortos, de unos cuantos días entre ellos. Esta tendencia es consistente con lo que se conoce de la construcción de las tablas por parte de los antiguos calculistas, quienes recurrían a atajos para simplificar el enorme esfuerzo matemático que implicaba su elaboración. Así pues, la selección de los tres tiempos requeridos para determinar los parámetros no es un proceso tan simple y directo.

Por ello, en el presente trabajo nos hemos decantado por utilizar dos procedimientos: el primero consiste en seleccionar valores de longitud espaciados entre sí por la cuarta parte de un año, esto es, por tres meses, aproximadamente, pero sin pretender que exista una diferencia exacta de  $90^\circ$  entre ellos, lo que, como vimos, puede resolverse más cómodamente; el segundo procedimiento, mucho más elaborado desde el punto de vista del cálculo, consiste en seleccionar valores de longitud dentro del mismo mes, espaciados por un número variable de días, pero siempre con igual número de días entre los intervalos. Por la extensión de los tiempos involucrados, la primera estrategia permite abarcar una porción significativa de la órbita ( $\sim 3/4$ ), de manera que los parámetros orbitales así obtenidos se ajustan a la geometría que define la curva como un todo; la segunda, cuya selección de tiempos tan próximos unos de otros implica cubrir únicamente una parte restringida del arco de la órbita, permite detectar variaciones sutiles en los parámetros, aunque no refleje exactamente la globalidad de sus valores, que ofrezcan indicios del procedimiento utilizado en la elaboración de las tablas.

En la **tabla 1** se muestran los valores de los parámetros de la órbita solar obtenidos seleccionando arbitrariamente algunos de los valores de longitud eclíptica siguiendo el primer procedimiento (1). Se adoptó como valor del año trópico para todos los cálculos:  $T_t = 365\text{d } 5\text{h } 49\text{m } 16,02\text{s}$ . En la tabla se puede observar que, salvo contados casos, con los valores seleccionados de las tablas de los años 1473 a 1476 (**Zacuto**, 1496), la gran mayoría de los valores obtenidos para cada parámetro tuvieron muy poca dispersión. Con el promedio de los datos correspondientes al año de 1473 (sin tener en cuenta el dato que presenta una importante desviación), se obtuvieron los siguientes valores para cada uno de los parámetros:  $e = 0,037840$ ,  $\lambda_a = 90,89748^\circ$  y  $\gamma_0 = 257,41413^\circ$  (1 de marzo de 1473). Estos valores numéricos son consistentes con los utilizados para la elaboración de las tablas alfonsíes, a saber:  $e = 0,03780$  (**van der Werf**, 2017),  $\lambda_a = 90,9264^\circ$  y  $\gamma_0 = 257,437639^\circ$ , estos dos últimos derivados de los datos utilizados por **Pouille** (1969) que, en términos algebraicos, pueden expresarse así:

$$\lambda_a = 71,423055555 + 2,0114454 \times 10^{-5} \times (FJ_{t_0} - FJ_R) + \text{sen}^{-1}(\text{sen } 9 \cdot \text{sen } \Psi),$$

$$\gamma_0 = 278,35 + 0,985646397 \times (FJ_{t_0} - FJ_R) - \lambda_a,$$

donde:

$$\Psi = 359,20944444 + 1,408037 \times 10^{-4} \times (FJ_{t_0} - FJ_R),$$

y  $FJ_R$  y  $FJ_{t_0}$  representan, respectivamente, la fecha juliana de la fecha radix (31 de diciembre del 1 a. C.) y la del 1 de marzo de 1473 (ambos a mediodía), de manera que  $FJ_{t_0} - FJ_R = 2259131 - 1721423 = 537708$ .

El segundo procedimiento (2) consistió en escoger valores de longitud eclíptica dentro de un mismo mes espaciados por un número de días, y ternas separadas de manera que se cumpliera  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ . Se mantuvieron estas diferencias iguales en los tiempos con fines de control, pues en tal caso se satisface:

$$a_2 = \frac{a_1^2 - a_3^2}{2[a_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - a_3 \cos(\lambda_3 - \lambda_2)]}.$$

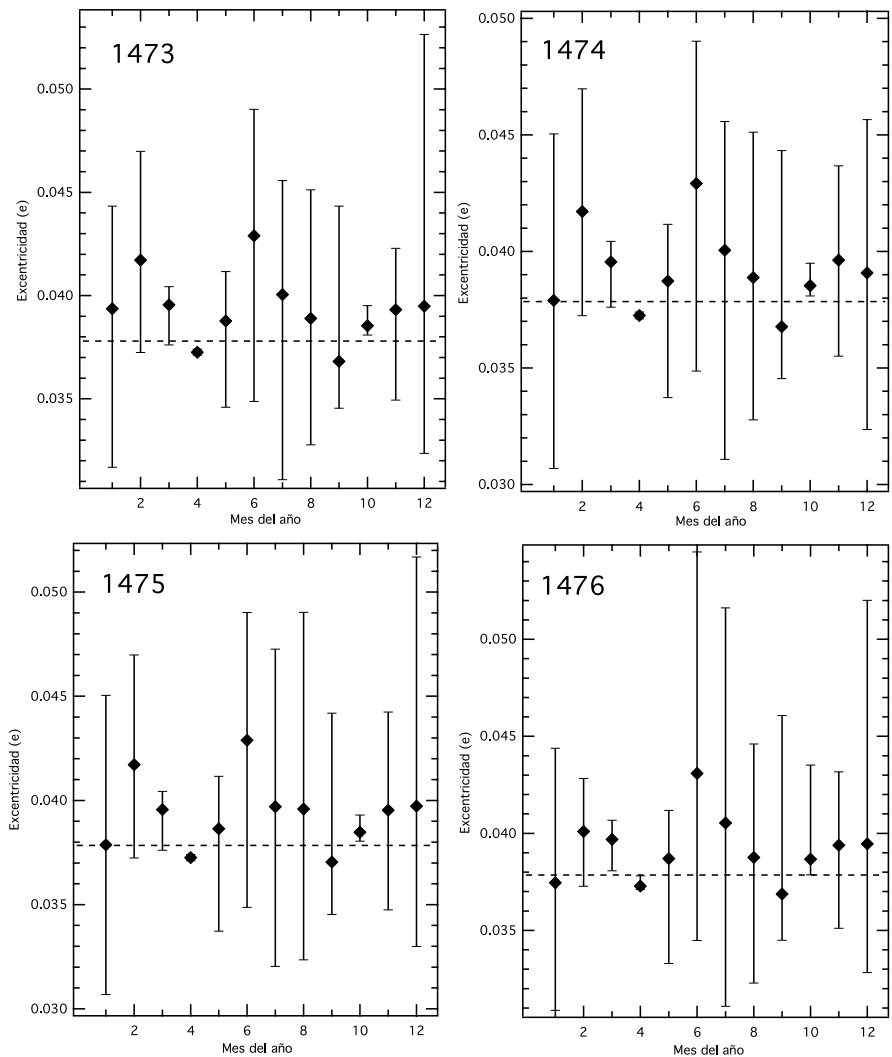
**Tabla 1.** Varios de los valores de longitud seleccionados para tres tiempos separados por tres meses, aproximadamente. Aparecen también los valores de los parámetros hallados para la excentricidad  $e$  (TC), la longitud del apogeo del Sol ( $\lambda_a$ ) y el ángulo  $\gamma_0$  para la época de referencia: 1 de marzo de 1473.

Año	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\lambda_1(^{\circ})$	$\lambda_2(^{\circ})$	$\lambda_3(^{\circ})$	$e$	$\lambda_a(^{\circ})$	$\gamma_0(^{\circ})$
1473	Mar 11	Jun 13	Sep 14	0,334167	90,822500	180,317500	0,037802	90,924262	257,387166
1473	Abr 12	Jul 14	Oct 15	31,576389	120,311111	211,164444	0,037859	90,961430	257,350672
1473	May 11	Ago 13	Nov 14	59,421944	149,097222	241,547778	0,037860	90,806738	257,504549
1473	Jun 12	Sep 14	Dic 13	89,872222	180,317500	271,201944	0,037793†	88,820814†	259,569562†
1474	Mar 10	Jun 13	Sep 14	359,109444	90,583333	180,078333	0,037808	90,674645	257,637076
1474	Abr 14	Jul 17	Oct 16	33,268889	122,937778	211,930556	0,037823	90,772480	257,538928
1474	May 16	Ago 18	Nov 17	63,954444	153,697222	244,370556	0,037877	90,540793	257,772292
1474	Jun 09	Sep 10	Dic 11	86,781667	176,144722	268,912778	0,037724†	82,885080†	265,717894†
1475	Mar 10	Jun 12	Sep 14	358,870556	89,394167	179,840278	0,037801	90,410396	257,901909
1475	Abr 08	Jul 10	Oct 09	27,225000	116,018611	204,660000	0,037879	90,637856	257,669517
1475	May 18	Ago 20	Nov 19	65,621944	155,398611	246,155000	0,037789	90,617183	257,687558
1475	Jun 21	Sep 22	Dic 23	97,947222	187,740000	280,950278	0,037725	90,684318	257,621895
1476	Mar 07	Jun 08	Sep 09	356,655556	86,329722	175,682222	0,037663	90,642106	257,677907
1476	Abr 11	Jul 12	Oct 13	30,904444	118,663611	209,429444	0,038245	90,795119	257,533421
1476	May 15	Ago 17	Nov 17	63,500833	153,232222	244,886944	0,037873	90,877331	257,506041
1476	Jun 13	Sep 12	Dic 13	91,081944	178,615278	271,480278	0,037817	90,950008	257,361248

† Valores que se apartan de la tendencia general



La ternas se seleccionaron así: en todos los casos el intervalo de días partió de siete (esto es,  $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \geq 7$ ) y fue incrementándose de uno en uno hasta llegar al último día del mes en cuestión, de manera que se operó dentro de un mismo mes con la siguiente secuencia: 1-8-15, 1-9-17, 1-10-19, ..., 1-16-31, es decir que en los meses de 31 días se alcanzó a llegar hasta un intervalo espaciado por 15 días; a partir de ahí se operó con el segundo día del mes y la misma secuencia: 2-9-16, 2-10-18, ..., 2-16-30, en la que el máximo de intervalo es de 14 días; la siguiente secuencia se inició con el tercer día, de manera que 3-10-17, 3-11-19, ..., 3-17-31, y así sucesivamente. Puede verse fácilmente que para un mes de 31 días es posible generar 81 ternas; para uno de 30, 72 ternas, y para febrero en año no bisiesto, apenas 56. El haber fijado un intervalo mínimo de siete días se debe a que si se utilizaba un número inferior, la mayoría de los parámetros obtenidos arrojarían valores desproporcionalmente elevados, con lo que se perdería el sentido de lo que se perseguía. Ahora bien, vale aclarar que no fueron pocas las veces en que fue necesario eliminar secuencias de ternas. Por ejemplo, en el mes de marzo de 1473 se eliminaron

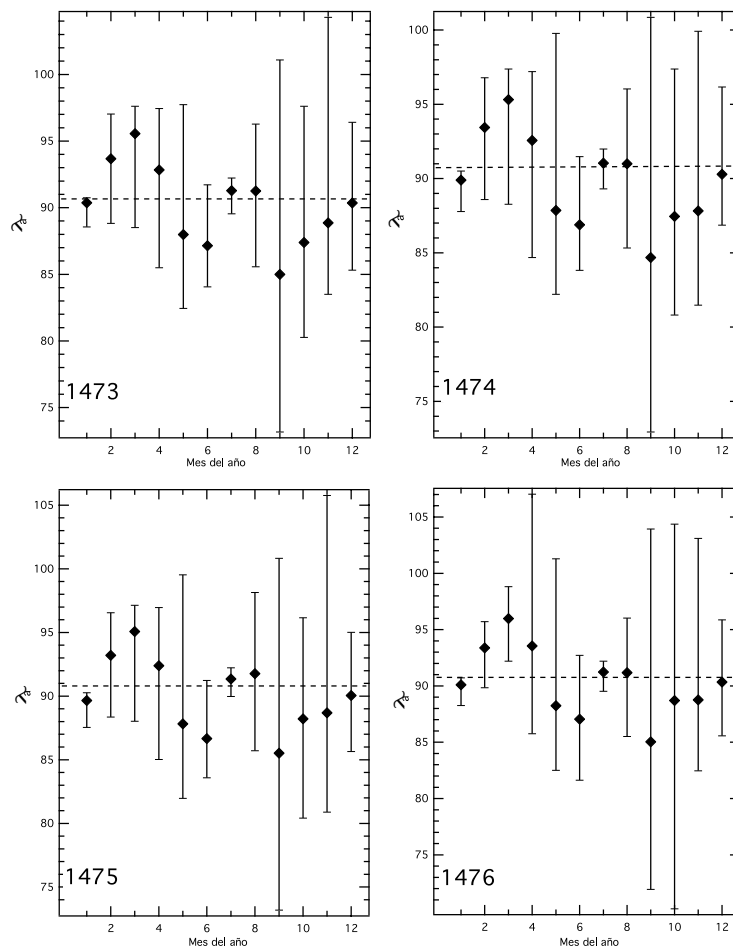


**Figura 3.** Rangos de valores de la excentricidad obtenidos con el segundo procedimiento (2) correspondientes a cada mes (1 es marzo, 2 abril, y así sucesivamente, ajustándonos a que Zacuto inicia el año el 1 de marzo). Se señala el promedio con la marca de diamante y el rango de los valores más extremos. La línea segmentada corresponde al valor hallado a través del primer procedimiento (1) (0,037840).

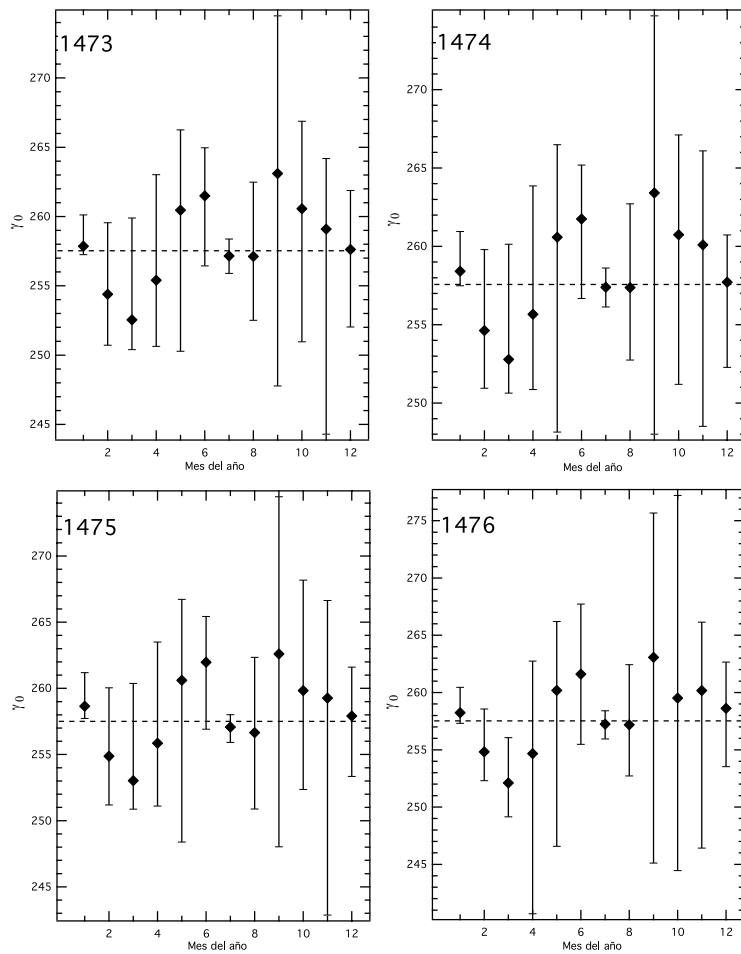
las ternas que contenían los días 29, 30 y 31, pues el código arrojaba errores matemáticos (amplitudes trigonométricas que excedían la unidad) o valores desproporcionados de los parámetros, lo que implicaba algún tipo de error numérico o de imprenta en los valores consignados en las tablas. Así mismo, en ese año se eliminaron las ternas que contenían los días entre paréntesis: junio (10) y enero (31). Lo mismo ocurrió con los años 1474: enero (11); 1475: junio (9), julio (25), septiembre (3, 17), octubre (13), noviembre (6), diciembre (25), y 1476: marzo (11, 16), abril (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), mayo (5, 30, 31), septiembre (9), octubre (5), diciembre (19, 31), enero (3, 9, 10, 13, 18), febrero (11).

Hemos optado por presentar los resultados obtenidos a través del segundo procedimiento (2) en forma gráfica. Los datos de la excentricidad se consignan en la **figura 3**, los de la longitud del apogeo en la **figura 4** y los del ángulo  $\gamma_0$  en la **figura 5**. En todas ellas se exhibe el promedio de los valores y los valores más extremos (mínimo y máximo). Como es evidente en las gráficas, se aprecia un notable grado de dispersión en cada uno de los parámetros, en particular de los angulares.

En lo que respecta a la excentricidad, se observa en general una notable dispersión de los valores, caracterizada por una tendencia a presentar mayores valores que el valor alfonsí (0,0378) propiamente dicho. La tendencia de los promedios en función del mes es prácticamente la misma para cada uno de los años, lo que refleja el hecho de que los



**Figura 4.** Rangos de valores de la longitud del apogeo ( $\lambda_a$ ) obtenidos con el segundo procedimiento (2) correspondientes a cada mes (1 es marzo, 2 abril, y así sucesivamente). Se señala el promedio con la marca de diamante y el rango de los valores más extremos. La línea segmentada corresponde al valor hallado con el primer procedimiento (1) (90, 89748°).



**Figura 5.** Rangos de los valores de la longitud del ángulo  $\gamma_0$  (para el 1 de marzo de 1473) obtenidos a través del segundo procedimiento (2) correspondientes a cada mes (1 es marzo, 2 abril, y así sucesivamente). Se señala el promedio con la marca de diamante y el rango de los valores más extremos. La línea segmentada corresponde al valor hallado a través del primer procedimiento (1) (257, 41413°).

valores correspondientes a los años 1474 a 1476 son versiones ligeramente desplazadas de las del año 1473 (**van der Werf, 2017**). Es notable que en los meses de abril y agosto se presentan valores de la excentricidad cuyos promedios oscilan entre 0,040 y 0,043, significativamente elevados y curiosamente próximos al valor de la excentricidad solar determinado por Ptolomeo. Asimismo, llama especialmente la atención que los datos de la excentricidad para los meses de junio y diciembre experimentaron una dispersión muy pequeña (en particular para el primero). Los valores de  $e$  en el mes de junio estuvieron en torno a 0,0372 y de alrededor de 0,0385 en diciembre. De hecho, en casi todos los casos que contemplan esos dos meses en los cuatro años en cuestión, el rango de los valores de excentricidad no incluye el valor promedio alfonsí. Una posible explicación de la poca dispersión de estos valores remite a que tanto el apogeo solar, que se verifica alrededor del 13 de junio, como el perigeo, que ocurre alrededor del 12 de diciembre, es decir, cuando el ángulo  $\mu$  (la ecuación solar) es nulo o próximo a cero, constituyen situaciones que facilitaban al calculista la obtención del ángulo  $\gamma$  a partir de  $\theta$ , lo cual se hacía consultando una tabla y casi siempre mediante interpolaciones entre los valores existentes. Todo lo anterior podría indicar que, dependiendo del mes, los calculistas utilizaban distintas tablas con valores ligeramente diferentes de la excentricidad que permitían la determinación del ángulo  $\gamma$ .

En casi todos los casos, los valores angulares, esto es,  $\lambda_a$  y  $\gamma_0$ , mostraron fuertes dispersiones alrededor de los valores promedio. Sin embargo, a diferencia de lo ocurrido con la excentricidad, la ordenación numérica de tales promedios se distribuyó de forma equidistante alrededor del valor alfonsí. En los dos casos, tales promedios no superaron los 6 grados por encima o por debajo del valor alfonsí, aunque se sabe que en ocasiones los valores más extremos pueden alcanzar diferencias hasta de 20 grados. Las más altas dispersiones se observaron en los meses de noviembre y enero. Infortunadamente, dada la dispersión generalizada de los datos angulares, no fue posible advertir una tendencia que sugiriera el uso de valores diferentes en los parámetros, como sí se evidenció en la excentricidad. En ambos casos, sin embargo, se observó que las menores dispersiones aparecían en los meses de marzo y septiembre, cuando se verifican los respectivos equinoccios ( $\lambda \approx 0$ ,  $\lambda \approx 180^\circ$ ).

## Conclusiones

Se ha expuesto aquí un procedimiento geométrico sencillo que, a partir de tres valores de longitud solar correspondientes a tres valores cualesquiera de tiempo, permite determinar los parámetros orbitales que subyacen en la teoría del movimiento del Sol de Hiparco-Ptolomeo utilizados para construir las tablas solares de Abraham Zacuto contenidas en el *Almanach Perpetuum*. Se utilizaron dos procedimientos para seleccionar los datos de longitud solar: el primero cubría 3/4 partes de la órbita y permitió obtener parámetros orbitales consistentes con los valores utilizados para la construcción de las tablas alfonsíes; en el segundo se utilizaron datos separados por intervalos más cortos de tiempo que arrojaron resultados con una amplia dispersión. Con este segundo procedimiento, la poca dispersión de la excentricidad observada en los meses de junio y diciembre (con valores de 0,0372 y 0,0385, respectivamente), así como los valores relativamente elevados obtenidos en buena parte de los valores promedios de cada mes ( $\geq 0,040$ ), sugieren la posibilidad del uso de varias tablas con valores distintos que relacionaban  $\gamma$  con  $\theta$ , lo cual no es de extrañar, pues se han detectado inconsistencias no solo en las tablas alfonsíes sino también en las tablas toledanas, lo que indicaría que sus autores aceptaban material proveniente de una variedad de fuentes (Chabas & Goldstein, 2020). Por su baja dispersión (suficiente como para indicar claramente que no corresponden al valor alfonsí), los valores de excentricidad encontrados para los meses de junio y diciembre constituyen un importante resultado y evidencian el uso de valores definidos de excentricidad que no suelen ser asociados con los que comúnmente utilizaban los calculistas de la época o anteriores. Por otra parte, el hecho de que la distribución numérica de los promedios de los tres parámetros a lo largo de los meses sea prácticamente idéntica para los cuatro años en cuestión, es otra forma de reforzar la observación de van der Werf (2017) de que los valores de longitud de los años 1474 a 1476 no son otra cosa que valores ligeramente desplazados de los datos correspondientes a 1473.

El método aquí expuesto constituye una herramienta sencilla que permite comparar los valores de la longitud solar expuestos en las tablas elaboradas por distintos autores a lo largo del tiempo e inferir de manera unívoca, con base en los valores de los parámetros orbitales obtenidos, si una tabla solar en particular deriva de otras, para así obtener un conocimiento más preciso de cómo han sido utilizadas a lo largo de los años.

## Agradecimientos

El autor desea expresar su sincero agradecimiento a dos árbitros anónimos por sus sugerencias para mejorar la redacción del texto. Esta investigación fue posible con el apoyo del proyecto de investigación identificado con el código Hermes 61960 de la Universidad Nacional de Colombia.

## Conflicto de intereses

El autor declara no tener ningún conflicto de intereses.

## Referencias

- Albuquerque, L.** (1983). *Ciencia e experiência nos descobrimentos portugueses*. Instituto de Cultura e Língua Portuguesa-Ministério de Educação.
- Chabás, J. & Goldstein, B. R.** (2020). New approaches and parameters in the Parisian Alfonsine tables. *Suhayl*, 18, 51-68. <https://doi.org/10.1344/SUHAYL2020.18.3>
- Chabás, J. & Goldstein, B. R.** (2000). Astronomy in the Iberian Peninsula: Abraham Zacut and the transition from manuscript to print. *Transactions of the American Philosophical Society*, 90, parte 2.
- Dennefeld, M.** (2020). A history of the Magellanic Clouds and the European Exploration of the Southern Hemisphere. arXiv preprint arXiv:2009.04973.
- Goldstein, B. R.** (1998). Abraham Zacut and the medieval Hebrew astronomical tradition. *Journal for the History of Astronomy*, 29, 177-186. <https://doi.org/10.1177/002182869802900210>
- Marcondes de Souza, T. O.** (1957). A astronomia náutica na época dos descobrimentos marítimos. *Revista de Historia*, 20, 41-63.
- Pedersen, O.** (2010). *A survey of the Almagest*, Springer.
- Portilla, J. G.** (2023). Evolución de la teoría geocéntrica del movimiento del Sol y su uso en la primera circunnavegación del mundo. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 47, 678-692. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.1940>
- Pouille, E.** (1969). Les conditions de la navigation astronomique au XV<sup>e</sup> siècle. Separata de *Revista da Universidade de Coimbra*, 24, 1-20.
- Proverbio, E.** (1994). Astronomical and sailing tables from the second half of the 15th century to the middle of the 16th century. *Memorie della Società Astronomia Italiana*, 65, 469-496.
- Sánchez, A.** (2021). Making a Global Image of the World: Science, Cosmography and Navigation in Times of the First Circumnavigation of Earth, 1492-1522. *Culture & History Digital Journal*, 10, e014-e014. <https://doi.org/0000-0001-8323-634X>
- Sánchez, J. G.** (2023). *La astronomía en tiempos de Abraham Zacuto*. Ediciones Universidad de Salamanca.
- Swanick, L. A.** (2005). An analysis of navigational instruments in the age of exploration: 15th century to mid-17th century. Tesis de grado. Texas A&M University.
- Thomann, J.** (2022). Reverse Engineering Applied to Ephemerides: Analysis and Edition of the Arabic Ephemeris of 1326/27 ce (MS Cairo, Dār al-Kutub, miqāt 817). En: Husson, Matthieu; Montelle, Celmency; van Dalen, Benno. *Editing and Analysing Numerical Tables: Towards a Digital Information System for the History of Astral Sciences*. Turnhout: Brepols Publishers, 469-510. <https://doi.org/10.1484/M.PALS.5.125692>
- Toomer, G. J.** (1998). *Ptolomey's Almagest*, Princeton University Press.
- van Dalen, B.** (1993). Ancient and Mediaeval Astronomical Tables: mathematical structure and parameter values. Universiteit Utrecht, Faculteit Wiskunde en Informatica.
- van der Werf, S.** (2017). History and critical analysis of fifteenth and sixteenth century nautical tables. *Journal for the History of Astronomy*, 48, 207-232. <https://doi.org/10.1177/0021828617705244>
- Vieira, A.** (2005). Náutica e cartografia náutica na origem da ciência moderna. *Navigator*, 1, 53-68.
- Zacuto, A.** (1496). *Almanach perpetuum celestium motuum*, Leiria. <https://purl.pt/22001>