

MODELOS EXACTAMENTE SOLUBLES EN MECÁNICA ESTADÍSTICA DE SISTEMAS DE COULOMB

por

Gabriel Téllez¹

Resumen

Téllez, Gabriel: Modelos exactamente solubles en mecánica estadística de sistemas de Coulomb. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **37** (42): xxx–xxx, 2013. ISSN 0370-3908.

Se presenta una revisión de modelos exactamente solubles de física estadística clásica en dos dimensiones de sistemas de Coulomb, que son sistemas compuestos por un gran número de partículas cargadas eléctricamente. En especial se estudian el plasma de dos componentes y el plasma de un componente. Se exploran las analogías que hay entre estos sistemas de física estadística clásica con teorías de campo cuánticas, que permiten su resolución analítica. Para el plasma de un componente se presentan algunos resultados nuevos para la energía libre de este sistema.

Palabras Clave: Física estadística, modelos exactos, electrostática.

Abstract

A review of two-dimensional exactly solvable models of statistical mechanics of Coulomb systems is presented. These are systems composed of charged particles. Two models are considered: the two-component plasma and the one-component plasma. Analogies between these classical systems and quantum field theories are exploited, which allow for an analytic resolution of the models. For the one-component plasma, new results for the free energy are presented.

Key Words: Statistical physics, exact models, electrostatic.

¹Departamento de Física, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Email: gtellez@uniandes.edu.co

1. Introducción

Una buena parte de la actividad científica en física consiste en plantear modelos matemáticos para describir algún sistema físico de interés, para después desarrollar dicho modelo y obtener predicciones que puedan ser eventualmente contrastadas con experimentos. Aunque en el planteamiento de un modelo se hacen a menudo drásticas simplificaciones con respecto al fenómeno físico real que se pretende describir, muchos de los modelos resultantes son complejos desde el punto de vista matemático y requieren posteriores aproximaciones y un tratamiento numérico para poder ser resueltos y obtener resultados.

Existen sin embargo una clase de modelos que permiten un tratamiento completamente analítico sin tener que recurrir a aproximaciones, que se conocen como modelos exactamente solubles, o exactamente resueltos. En física estadística, uno de los primeros modelos exactamente solubles no triviales es el modelo de Ising en dos dimensiones que sirve para describir la transición de fase ferromagnética – paramagnética, que fue resuelto por [Onsager 1944]. Este abrió el campo a una serie de nuevos modelos de física estadística sobre red también exactamente solubles. La importancia de estos modelos radica en varios aspectos. Primero, como los resultados de estos modelos son exactos, estos proveen un campo firme para verificar resultados de otros modelos que requieren aproximaciones, o de resultados numéricos. También el estudio de estos modelos ha impulsado nuevos desarrollos en otras ramas de la ciencia, como en matemáticas, ya que las técnicas utilizadas en el desarrollo de las soluciones exactas, en muchas ocasiones, resultan ser parte de nuevas estructuras matemáticas no conocidas anteriormente. Otro aspecto muy interesante de estos modelos es que permiten describir varios sistemas físicos diferentes, ya que un mismo modelo admite transformaciones que permiten interpretarlo de maneras diferentes.

La mayoría de los modelos exactamente solubles en física estadística han sido planteados sobre red. Existen pocos que describan sistemas continuos, como por ejemplo gases o fluidos, en que las partículas puedan moverse libremente en todo el espacio, y no estén limitadas a estar sobre los sitios de una red particular. En este trabajo se presentará una revisión de varios modelos exactamente solubles de física estadística de sistemas de fluidos continuos: los modelos del plasma de un componente y el de dos componentes, en dos dimensiones. Estos modelos describen un sistema de muchas partículas

con carga eléctrica que interactúan entre ellas a través de la interacción de Coulomb.

Además del interés matemático de estos modelos, ya mencionado anteriormente, estos modelos de sistemas de Coulomb, sirven para describir sistemas físicos tales como plasmas ionizados, o en el campo de la físico-química, soluciones de electrolitos o de coloides estabilizados por carga.

Este manuscrito está organizado de la siguiente forma. En la sección 2, se presentan algunas generalidades sobre los sistemas de Coulomb. En la sección 3, se presenta el modelo del plasma de dos componentes, y se estudia como es que se puede llegar a una solución exacta para este modelo. En la solución exacta de este modelo, existe un caso especial en que el modelo es equivalente a una teoría de campos de fermiones libres lo que permite una solución relativamente sencilla. Este caso se conoce como el punto fermiónico libre. Más allá del punto fermiónico libre, también es posible una solución exacta, pero esta es más compleja. Se presentarán ambos aspectos de la solución de este modelo, y se mencionarán algunas aplicaciones de esta solución en las cuales el autor ha contribuido a su desarrollo. En la sección 4, se presenta el modelo del plasma de un componente. Este también tiene una solución exacta para un punto fermiónico libre. Adicionalmente tiene una analogía interesante con otro problema físico importante, el efecto Hall cuántico. Aunque aún no se ha hallado una solución fuera del punto fermiónico libre, han habido avances importantes en este aspecto que también se presentarán.

2. Los sistemas de Coulomb

El potencial de Coulomb que da la interacción entre dos partículas, de carga $+1$, situadas en \mathbf{r} y \mathbf{r}' , es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = s_d \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.1)$$

en donde $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la distribución de Dirac en la variedad espacial, de dimensión d , en que se encuentran las partículas, y s_d es una constante de normalización. Usando unidades Gaussianas s_d es el área de una esfera de dimensión d y de radio 1 ($s_2 = 2\pi$, $s_3 = 4\pi$). Si la variedad en la que viven las partículas es el espacio libre \mathbb{R}^d , y se impone la condición de frontera que el campo eléctrico $-\nabla v$ creado por una partícula tienda a cero en

infinito, el potencial es

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} -\ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{L}, & d = 2 \\ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, & d = 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

en donde L es una longitud arbitraria que fija el cero del potencial. En tres dimensiones es el bien conocido potencial en $1/r$, sin embargo todos los modelos considerados a continuación se estudiarán en dos dimensiones, ya que es en esta situación en que es posible una solución exacta. Entonces la interacción entre partículas tiene una dependencia logarítmica con la distancia entre éstas.

Un sistema compuesto por varias partículas que interactúan con el potencial de pares definido en (2.1) y (2.2) se conoce como sistema de Coulomb. Varios modelos diferentes se pueden plantear dependiendo de las diferentes cargas que puedan tener las partículas. Por ejemplo, si sólo hay un tipo de partículas todas con la misma carga q , se habla del modelo del plasma de un componente. También se puede considerar la situación en que hay dos especies de partículas con diferentes cargas q_+ y q_- , se habla entonces del plasma de dos componentes. El plasma de dos componentes puede ser simétrico, en el caso en que $q_+ = -q_- = q$ o asimétrico en el caso contrario. También existen modelos con más de dos componentes, pero estos no se estudiarán aquí.

En tres dimensiones, un sistema con cargas de signos diferentes, no es estable contra el colapso de partículas de cargas opuestas. Por lo tanto, usualmente, es necesario introducir un potencial adicional repulsivo a cortas distancias que impida el colapso de partículas de cargas de signos opuestos. En dos dimensiones, la situación es menos drástica. Por ejemplo, para el plasma de dos componentes simétrico, se puede notar que si $q^2/(k_B T) < 2$ (en donde T es la temperatura y k_B la constante de Boltzmann), la agitación térmica es suficiente para impedir el colapso de partículas de signo opuesto, y no es necesario introducir un potencial repulsivo de corto alcance.

En dos dimensiones, el potencial de Coulomb es logarítmico como se observa en la ecuación (2.2). Este potencial es invariante de escala: un re-escalamiento de todas las longitudes se manifiesta únicamente por la adición de una constante en la energía potencial. Como consecuencia, se puede obtener fácilmente la dependencia de energía libre del sistema en función del área que éste ocupa, y por consiguiente la presión p de este sistema. La ecuación de estado es particularmente sencilla en dos dimensiones. Tanto para el plasma de dos componentes

simétrico, como para el plasma de un componente, ésta es

$$\beta p = \left(1 - \frac{\Gamma}{4}\right) n \quad (2.3)$$

en donde n es la densidad, $\Gamma = \beta q^2$, y la temperatura inversa es $\beta = 1/(k_B T)$. La parte de la termodinámica no trivial que queda por determinar es la dependencia de las cantidades termodinámicas en función de la temperatura, o de manera equivalente de la constante de acoplamiento Γ .

3. El plasma de dos componentes

Consideremos el plasma de dos componentes, con N_+ partículas de carga q_+ y N_- partículas de carga q_- . La energía potencial de este sistema es

$$H = \sum_{1 \leq i < j \leq N_+} q_+^2 v(\mathbf{r}_i^+, \mathbf{r}_j^+) + \sum_{1 \leq i < j \leq N_-} q_-^2 v(\mathbf{r}_i^-, \mathbf{r}_j^-) + \sum_{i=1}^{N_+} \sum_{j=1}^{N_-} q_+ q_- v(\mathbf{r}_i^+, \mathbf{r}_j^-) \quad (3.1)$$

en donde se han etiquetado las posiciones de las partículas de carga q_+ como \mathbf{r}_i^+ , y similar para la otra especie de partículas. Se propone hacer la descripción del sistema usando el formalismo de la mecánica estadística clásica (no-cuántica). La función de partición gran canónica del sistema, a una temperatura T y potenciales químicos μ_+ , μ_- es

$$\Xi = \sum_{N_+=0}^{+\infty} \sum_{N_-=0}^{+\infty} \frac{\zeta_+^{N_+} \zeta_-^{N_-}}{N_+! N_-!} \int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N_+} d\mathbf{r}_i^+ \prod_{j=1}^{N_-} d\mathbf{r}_j^- \quad (3.2)$$

en donde se han definido las fugacidades $\zeta_{\pm} = e^{\beta \mu_{\pm}} / \lambda_{\pm}^d$ (λ_{\pm} es la longitud térmica de de Broglie de las partículas de carga q_{\pm} , que contiene la contribución de la energía cinética a la función de partición).

3.1. La transformación de Hubbard-Stratonovich. Aunque el cálculo explícito de esta función de partición parece una tarea formidable, veremos a continuación como es éste posible cuando la dimensión del espacio es $d = 2$. Sin embargo, antes de especializarnos en el caso de dos dimensiones, es interesante recordar una transformación que se puede hacer a la función de partición de este sistema de partículas clásicas, que muestra que el mismo formalismo matemático también describe una teoría de campos cuántica. Este es un aspecto muy interesante de este sistema, que también ocurre con el plasma de un componente que

se estudiará en la sección 4: iniciamos estudiando un sistema de partículas clásicas (no cuánticas) sometidas a fluctuaciones térmicas a una temperatura T . Pero el modelo matemático para describir este sistema se puede reformular y éste termina describiendo también un problema de mecánica cuántica de muchas partículas (teoría de campos cuántica) diferente al sistema original y a temperatura $T = 0$: en este no hay fluctuaciones térmicas, pero si hay fluctuaciones cuánticas.

La transformación en cuestión se llama transformación de Hubbard-Stratonovich y está basada en la integral gaussiana

$$e^{\frac{1}{2}(B, A^{-1}B)} = \frac{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X, AX) + (B, X)}}{\int dX e^{-\frac{1}{2}(X, AX)}} \quad (3.3)$$

en donde $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada simétrica definida positiva, $m \times m$, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $B = (b_1, \dots, b_m)$ son vectores de \mathbb{R}^m y $dX = \prod_{k=1}^m dx_k$. El símbolo $(B, X) = \sum_{k=1}^m b_k x_k$ denota el producto escalar de B y X . Asimismo, $(X, AX) = \sum_{k,j} x_k a_{kj} x_j$ es el producto escalar entre X y AX , que de manera equivalente puede verse como la acción sobre X de la forma cuadrática definida por la matriz A .

Como se puede observar en (3.1), la energía potencial del sistema es una forma cuadrática de la densidad microscópica de carga de las partículas $\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_+} q_+ \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i^+) + \sum_{i=1}^{N_-} q_- \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i^-)$, en efecto,

$$H = \frac{1}{2} \int \tilde{\rho}(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\rho}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} (\tilde{\rho}, v \tilde{\rho}) \quad (3.4)$$

por lo tanto se puede aplicar una generalización al caso de dimensión infinita de la identidad (3.3) a $e^{-\beta H}$ con $B = i\beta\rho$ y $A^{-1} = \beta^{-1}v$. La ecuación de Poisson (2.1) nos dice que A sería entonces proporcional al operador diferencial laplaciano, $A = -\beta s_d^{-1} \Delta$. Tenemos

$$e^{-\beta H} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{\beta}{2s_d} \int \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + i\beta \int \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{\beta}{2s_d} \int \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}} = \langle e^{i\beta \int \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \rangle_0. \quad (3.5)$$

En la ecuación anterior $\phi(\mathbf{r})$ juega el rol de X de la ecuación (3.3). Al ser este un campo indexado por una variable continua \mathbf{r} , la integral m -dimensional de (3.3) se vuelve aquí una integral funcional, en donde, intuitivamente, $\mathcal{D}\phi = \prod_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})$ es el elemento diferencial de integración correspondiente. Matemáticamente, se le puede dar un significado riguroso al elemento de integración $\mathcal{D}\phi e^{\frac{\beta}{2s_d} \int \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}$ en el contexto de la integral de Wiener, ver por ejemplo [Klauder 2011].

En (3.5), se introdujo la notación

$$\langle O \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{\beta}{2s_d} \int \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} O \quad (3.6)$$

con $Z_0 = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{\beta}{2s_d} \int \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}$. Esta última notación pone en evidencia que el sistema se puede también entender como un sistema de partículas independientes interactuando en un campo fluctuante gaussiano $\psi = -i\phi$. Reemplazando (3.5) en la función de partición gran canónica se obtiene [Samuel 1978, Brydges, Martin 1999, Torres, Téllez 2004]

$$\Xi = \frac{Z}{Z_0} \quad (3.7)$$

en donde

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi(\mathbf{r}), \partial_\mu \phi(\mathbf{r})) d\mathbf{r}} \quad (3.8)$$

es la funcional generatriz de una teoría de campos cuyo lagrangiano es

$$\mathcal{L} = -\frac{\beta}{2s_d} \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) - \zeta_+ e^{i\beta q_+ \phi(\mathbf{r})} - \zeta_- e^{i\beta q_- \phi(\mathbf{r})}. \quad (3.9)$$

La funcional generatriz de una teoría de campos permite obtener los promedios y correlaciones del campo. En el caso particular del plasma de dos componentes simétrico $q_+ = -q_- = q$, y neutro $\zeta_+ = \zeta_- = \zeta$, la teoría de campos correspondiente es la teoría de sine-Gordon

$$\mathcal{L} = -\frac{\beta}{2s_d} \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) - 2\zeta \cos(\beta q \phi(\mathbf{r})). \quad (3.10)$$

La evaluación completa de la función de partición requiere sumar sobre todas las configuraciones del campo fluctuante ϕ como lo indica la ecuación (3.8). Para el caso general (plasma asimétrico, dimensión d arbitraria) esta es una tarea no trivial que no puede hacerse analíticamente de manera exacta. Un primer punto de partida es la evaluación de la integral funcional (3.8) usando una aproximación semi-clásica, es decir considerando el campo ϕ_0 que minimiza la acción $S = \int \mathcal{L}(\phi(\mathbf{r}), \partial_\mu \phi(\mathbf{r})) d\mathbf{r}$. Este campo satisface la ecuación de Euler-Lagrange asociada al lagrangiano (3.9), que es

$$\Delta \psi_0(\mathbf{r}) = -s_d \left(\zeta_+ q_+ e^{-\beta q_+ \psi_0(\mathbf{r})} + \zeta_- q_- e^{-\beta q_- \psi_0(\mathbf{r})} \right) \quad (3.11)$$

en donde $\psi_0 = -i\phi_0$. Es interesante notar que (3.11) es la ecuación de Poisson-Boltzmann [Gouy 1910], [Chapman 1913], [Debye, Hückel 1923], [Verwey, Overbeek 1948], que describe la teoría de campo medio para el plasma de dos componentes. En efecto (3.11), es la ecuación de Poisson de la electrostática

$$\Delta \psi_0(\mathbf{r}) = -s_d \rho(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

para el campo electrostático promedio ψ_0 correspondiente a una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}) = \zeta_+ q_+ e^{-\beta q_+ \psi_0(\mathbf{r})} + \zeta_- e^{-\beta q_- \psi_0(\mathbf{r})}$. Proponer una densidad de carga así, es equivalente a hacer una aproximación de campo medio, cambiando la interacción de pares entre partículas por una interacción efectiva con el campo promedio ψ_0 .

3.2. Resultados exactos en campo medio. La ecuación de Poisson–Boltzmann (3.11) es una ecuación diferencial de derivadas parciales no-lineal difícil de resolver en general. Si la energía electrostática es pequeña comparada con la energía térmica $\beta q \psi_0 \ll 1$, la ecuación (3.11) se puede linealizar $e^{-\beta q \psi_0} = 1 + \beta q \psi_0 + O((\beta q \psi_0)^2)$, obteniendo la ecuación de Debye–Hückel [Debye, Hückel 1923]

$$\Delta \psi_0 = -\kappa^2 \psi_0 \quad (3.13)$$

con $\kappa^2 = s_d \beta (\zeta_+ q_+^2 + \zeta_- q_-^2)$. $1/\kappa$ se conoce como la longitud de Debye y es la longitud característica de apantallamiento de una carga del plasma por las demás cargas que la rodean.

Existen sin embargo un par de situaciones de interés en que es posible resolver la ecuación no-lineal de Poisson–Boltzmann, sin recurrir a la aproximación de Debye–Hückel. En una dimensión de espacio, o si se supone que el campo depende de una sola coordenada espacial, ésta puede ser integrada. En esta situación, la ecuación de Poisson–Boltzmann describe, por ejemplo, una placa plana infinita cargada sumergida en un electrolito. Esto fue estudiado independientemente por [Gouy 1910] y [Chapman 1913], quienes resolvieron analíticamente la ecuación de Poisson–Boltzmann en una dimensión. Estos estudios constituyen ahora la base fundamental de la ciencia coloidal [Verwey, Overbeek 1948].

Otra geometría para el estudio de la ecuación de Poisson–Boltzmann de interés para la ciencia de coloides, es la situación de dos dimensiones con simetría radial. Imaginemos una macromolécula coloidal cilíndrica recta muy larga cargada, sumergida en un electrolito. A nivel de campo medio ésta puede ser descrita por la ecuación de Poisson–Boltzmann, en dos dimensiones (las dos dimensiones del plano transversal a la molécula). En este caso la resolución analítica de la ecuación no lineal resulta mucho más compleja. Al plantear la ecuación diferencial (3.11) para esta geometría usando coordenadas cilíndricas, la ecuación resultante resulta ser una ecuación de tipo Painlevé III. La ecuación para un plasma simétrico de

carga, fue estudiada y resuelta en un contexto completamente diferente por [McCoy, Tracy, Wu 1977], quienes estudiaron la función de correlación del modelo de Ising en dos dimensiones. Esta función de correlación se expresa en términos de una función que satisface la misma ecuación no lineal (3.11), de interés para el plasma de dos componentes. Posteriormente [Widom 1997] desarrolló la solución para los casos asimétricos 1:2 ($q_- = -2q_+$) y 2:1 ($q_+ = -2q_-$) y [Tracy, Widom 1998] estudiaron el comportamiento de las soluciones de esta ecuación a largas y cortas distancias. Estos estudios se realizaron en el contexto de la física matemática, sin relación directa con el estudio de los plasmas y electrolitos. En paralelo y posteriormente se aplicaron estos resultados matemáticos a la teoría de Poisson–Boltzmann de los plasmas y electrolitos [McCaskill, Fackerell 1988], [Tracy, Widom 1997], [Trizac, Téllez 2006], [Téllez, Trizac 2006], [Trizac, Téllez 2007].

3.3. El punto fermiónico libre. La teoría de campo medio presentada en la sección anterior, es sólo válida si el acoplamiento electrostático entre las cargas del sistema es pequeño. En el caso contrario, es necesario considerar la teoría completa. En su formulación como teoría de campos, es necesario sumar sobre todas las configuraciones del campo fluctuante en (3.8). En esta sección consideraremos únicamente el caso del plasma simétrico en dos dimensiones.

Tal como se presentó en la sección anterior, la teoría de campos equivalente es la teoría de campo de sine–Gordon (3.10). En dos dimensiones, [Coleman 1975] demostró que esta teoría es equivalente al modelo de Thirring masivo, que es una teoría de campos de fermiones acoplados. El modelo de Thirring, en dos dimensiones, describe un campo de dos componentes (“spinor”) ψ que obedece a reglas de anti-conmutación, es decir es un campo fermiónico. Su Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\sigma_\mu \partial^\mu - m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\sigma_\mu\psi)(\bar{\psi}\sigma^\mu\psi) \quad (3.14)$$

en donde σ_μ ($\mu = 1, 2$) son las matrices de Pauli y m la masa del campo en el caso que no hubiera interacción $g = 0$. La constante de acoplamiento del modelo de Thirring g está relacionada con la del modelo de sine–Gordon $\Gamma = \beta q^2$ por

$$\Gamma = \frac{2}{1 + \frac{g}{\pi}}. \quad (3.15)$$

De ahí se puede notar que $\Gamma = 2$ corresponde a $g = 0$, es decir que el modelo de Thirring se reduce a una teoría

de fermiones libres para ese valor particular del acoplamiento. Este valor particular $\Gamma = 2$ se conoce entonces como el punto fermiónico libre.

Esta equivalencia del plasma de dos componentes en $\Gamma = 2$ con un modelo de fermiones libres se puede obtener también de manera independiente sin recurrir a la transformación de Hubbard-Stratonovich y la relación con el modelo de sine-Gordon. Cuando $\Gamma = 2$, se puede demostrar directamente que la función de partición gran-canónica (3.2) del plasma de dos componentes es igual al determinante de un cierto operador integral [Gaudin 1985, Cornu, Jancovici 1989]. Pero este operador integral resulta ser el inverso del operador de Dirac (en dos dimensiones), de modo que la función de partición del plasma de dos componentes resulta ser

$$\Xi = \det [1 + m(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y)^{-1}] \quad (3.16)$$

en donde m es la fugacidad renormalizada (proporcional a ζ), y σ_x y σ_y las matrices de Pauli.

Como la teoría de fermiones libres resultante es bastante sencilla, esto permite estudiar el plasma de dos componentes en una gran variedad de geometrías diferentes, e inclusive en presencia de un campo externo adicional. Algunas aplicaciones concretas en este caso han sido las siguientes: estudio de la doble capa eléctrica en la vecindad de un electrodo plano o interfaz plana [Cornu, Jancovici 1989], estudio de correcciones de talla finita al confinar el plasma en diferentes geometrías (esfera, banda) [Forrester, Jancovici, Téllez 1996], y entender una relación inesperada entre sistemas de Coulomb y sistemas críticos [Jancovici, Manificat, Pisani 1994, Jancovici, Téllez 1996], estudio de la sedimentación de coloides [Téllez 1997], efectos en el plasma en un espacio con curvatura negativa [Jancovici, Téllez 1998], estudio de películas de jabón electrolíticas [Téllez, Merchán 2002], efectos de impurezas absorbentes en el plasma [Ferrero, Téllez 2007], entre muchas otras.

3.4. Más allá del punto fermiónico libre. En dos dimensiones, la teoría de sine-Gordon, a la cual es equivalente el plasma de dos componentes, es una teoría integrable, tanto a nivel clásico como cuántico, para cualquier valor del acoplamiento Γ . A nivel clásico, esto es lo que permite una resolución exacta de la ecuación de Poisson-Boltzmann, como ya se mencionó en la sección 3.2.

A nivel cuántico la teoría de sine-Gordon resulta ser un prototipo de los modelos integrales. Primero fue resultado de manera semi-clásica por [Dashen, Hasslacher, Neveu, 1975]. Posteriormente [Zamolodchikov 1979] resolvió la teoría exactamente sin aproximaciones semi-clásicas. Sin embargo, la solución obtenida por [Dashen, Hasslacher, Neveu, 1975] resultó ser exacta [Zamolodchikov 1979]. Ocurre algo similar a lo que pasa con algunos modelos sencillos de mecánica cuántica como el oscilador armónico y el átomo de hidrógeno: su tratamiento semi-clásico arroja resultados exactos idénticos a los que se obtienen con un tratamiento completamente cuántico.

Sin embargo, la traducción de los resultados de teoría cuántica de campos a la física estadística del plasma de dos componentes no resulta ser trivial. La razón radica en que la fugacidad ζ de las partículas del plasma, aparece en la teoría de campos de sine-Gordon como un parámetro de acoplamiento con el campo que no tiene un significado claro si no se ha especificado el esquema de renormalización de la teoría. La energía potencial del plasma planteada en la ecuación (3.4), no es exactamente igual a la expresión (3.1), ya que esta última (3.1) no incluye términos de auto-energía (interacción de una partícula consigo misma $v(\mathbf{r}, \mathbf{r})$), mientras que (3.4) sí los incluye cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ en la integral. En principio estos deben ser restados a la ecuación (3.4), pero al ser constantes, en la función de partición gran-canónica éstos pueden absorberse en una renormalización de la fugacidad [Torres, Téllez 2004]

$$\zeta' = \zeta e^{\beta q^2 v(\mathbf{r}, \mathbf{r})/2}. \quad (3.17)$$

Cabe notar que en realidad la auto-energía $v(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ es infinita a menos de regularizar el potencial de Coulomb a cortas distancias. Es esta renormalización de la fugacidad que hace ambigua la equivalencia entre el plasma de dos componentes y el modelo de sine-Gordon.

Una manera de levantar esta ambigüedad de manera adecuada, es a través del estudio del comportamiento de la función de correlación de pares a corta distancia. Es de esperar que la función de correlación de dos cargas opuestas separadas por una corta distancia $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (comparada con la longitud de apantallamiento), sea de la forma $n_{+-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \zeta^2 e^{\beta q^2 v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \zeta^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\beta q^2}$. Pero en la teoría de campos de sine-Gordon la función de correlación de pares se expresa como $n_{+-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \zeta^2 \langle e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})} e^{-i\beta q\phi(\mathbf{r}')} \rangle$. Lo anterior fija entonces cuál es el comportamiento de la función de correlación del modelo

de sine-Gordon a cortas distancias

$$\langle e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})} e^{-i\beta q\phi(\mathbf{r}')}\rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\beta q^2} \quad (3.18)$$

y esto fija entonces la normalización del campo $e^{i\beta q\phi(\mathbf{r})}$ y de ζ . Esta normalización se conoce como normalización conforme, ya que la teoría de sine-Gordon puede interpretarse como la perturbación de la teoría conforme de bosones libres por el campo $\cos(\beta q\phi)$. En este esquema de renormalización, [Zamolodchikov 1995] estableció la relación entre la fugacidad ζ y la masa del solitón fundamental del modelo de sine-Gordon, en términos del cuál ya se conocía la función de partición Z . Juntando todos estos resultados, [Šamaj, Travěnek 2000] pudieron determinar la función de partición gran-canónica del plasma de dos componentes y de ahí deducir las cantidades termodinámicas de interés de este sistema tales como la energía interna y la capacidad calorífica.

Posteriormente, se ampliaron estos resultados, determinando también la termodinámica del plasma de dos componentes asimétrico 1:2 y 2:1 [Šamaj 2003] y el comportamiento de las funciones de correlación a largas distancias [Šamaj, Jancovici 2002] y a cortas distancias [Téllez 2005]. Una aplicación interesante de estos modelos exactamente solubles es al estudio del apantallamiento de coloides. En el caso de un coloide en un electrolito asimétrico, estos modelos más allá de campo medio mostraron que puede existir un fenómeno de inversión de carga, en el cual un coloide de carga determinada, puede atraer coloides de misma carga por un efecto de sobre apantallamiento [Téllez 2006].

Todos estos resultados exactos son válidos dentro del régimen de estabilidad del plasma contra el colapso de partículas de signo opuesto, es decir $\Gamma < 2$, como se discutió en la sección 2. Cuando $\Gamma \geq 2$, es necesario introducir una regularización a cortas distancias (por ejemplo introducir un núcleo duro para las partículas, en vez de considerarlas puntuales) que destruye la invariancia de escala del potencial de interacción entre partículas, y además modifica la equivalencia del plasma de dos componentes con el modelo de sine-Gordon. Sin embargo, si el radio del núcleo duro de las partículas es pequeño, (en comparación con la distancia promedio entre partículas que está fijada por la densidad), es posible seguir usando la teoría de sine-Gordon para obtener algunos resultados exactos de la termodinámica del sistema [Kalinay, Šamaj 2002], y de la ecuación de estado del sistema [Téllez 2007].

4. El plasma de un componente

El plasma de un componente está compuesto por un sólo tipo de partículas de carga q . Como es necesario tener un sistema neutro para que la termodinámica del sistema esté bien definida [Lieb, Lebowitz 1972], se considera que el sistema está sumergido en un fondo continuo de carga opuesta $-qn_b$, en donde usualmente n_b es igual a la densidad promedio de partículas. Para fijar las ideas supongamos que el plasma está confinado en un disco de radio R , aunque el sistema también se ha estudiado en otras geometrías tales como la esfera [Caillol 1981]. La energía potencial de un sistema de N partículas, incluyendo las interacciones con el fondo neutralizante, $n_b = N/(\pi R^2)$, es [Jancovici 1981, Forrester 2010]

$$H = -\frac{3N^2q^2}{8} + \frac{Nq^2}{2} \ln \frac{R}{L} + \frac{Nq^2}{2} \sum_{j=1}^N (r_j/R)^2 - \frac{q^2}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq N} \ln \left(\frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}{R} \right)^2. \quad (4.1)$$

Es interesante notar que el factor de Boltzmann

$$e^{-\beta H} = A_{N,\Gamma} |\Delta(z_1, \dots, z_N)|^\Gamma \prod_{i=1}^N e^{-\pi n_b \Gamma r_i^2/2} \quad (4.2)$$

es proporcional a un determinante de Vandermonde

$$\Delta(z_1, \dots, z_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_j - z_i) = \det(z_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq N} \quad (4.3)$$

elevado a la potencia $\Gamma = \beta q^2$. En la ecuación (4.2), $A_{N,\Gamma}$ es una constante independiente de las posiciones de las partículas y se ha definido la posición compleja de la partícula número j con $z_j = r_j e^{i\theta_j}/R$, en donde (r_j, θ_j) son las coordenadas polares correspondientes.

4.1. El punto fermiónico libre y la relación con el efecto Hall cuántico. Si se define

$$\psi_j(\mathbf{r}) = e^{-\pi n_b r^2/2} z^j \quad (4.4)$$

el factor de Boltzmann se puede escribir como

$$e^{-\beta H} = A_{N,\Gamma} |\det(\psi_{j-1}(z_i))_{1 \leq i, j \leq N}|^\Gamma. \quad (4.5)$$

Cuando $\Gamma = 2$, la expresión anterior se presta para una interpretación interesante: el factor de Boltzmann se puede interpretar como el cuadrado de la norma de la función de onda de N fermiones independientes que están en los estados de una partícula caracterizados por las funciones de onda $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{N-1}$. Estas funciones son ortogonales entre sí. El determinante formado por

ellas en (4.5) es el determinante de Slater necesario para satisfacer el principio de exclusión de Pauli y la antisimetría de la función de onda de los N fermiones. Las funciones de onda dadas por (4.4) resultan ser las funciones de onda del estado base de Landau de una partícula cargada que vive en un plano y que está sometida a un campo magnético perpendicular al plano.

Así el problema de física estadística clásica (no cuántica) de N partículas cargadas interactuando entre ellas (el plasma de un componente), se puede transformar en un problema de mecánica cuántica de N fermiones independientes, pero en un campo magnético y a temperatura cero, pues sólo es de interés el estado base de este sistema. Al ser un problema de fermiones independientes, de nuevo podemos hablar de un punto fermiónico libre cuando $\Gamma = 2$, al igual que lo era para el plasma de dos componentes.

Esta analogía llevó a [Laughlin 1983] a proponer funciones de onda efectivas (no normalizadas)

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = (\det(\psi_{j-1}(z_i))_{1 \leq i, j \leq N})^{\Gamma/2} \quad (4.6)$$

para el problema del efecto Hall cuántico fraccionario con fracción de llenado $2/\Gamma$. Cuando $\Gamma \neq 2$ se trata de un sistema de electrones en un campo magnético pero con una interacción entre ellos, ya no es un sistema de fermiones independientes como es el caso cuando $\Gamma = 2$.

El cálculo de la función de partición canónica del plasma de un componente se reduce a calcular la norma de la función de onda (4.6). Cuando $\Gamma = 2$, esto es particularmente simple, pues como los fermiones son independientes, la norma de la función de onda de las N partículas es el producto de las normas de las funciones de onda individuales, por lo que estas son ortogonales entre ellas,

$$\|\Psi\|^2 = N! \prod_{j=0}^{N-1} \|\psi_j\|^2 \quad (4.7)$$

y las normas $\|\psi_j\|^2$ se calculan directamente a partir de la definición (4.4), quedan expresadas en términos de funciones gamma incompletas

$$\|\psi_j\|^2 = n_b^{-1} N^{-j} \int_0^N e^{-t} t^j dt = n_b^{-1} N^{-j} \gamma(j+1, N). \quad (4.8)$$

Al tratarse de un problema de fermiones independientes, el cálculo de las funciones de correlación también es posible hacerlo de manera analítica explícita [Jancovici 1981]. En este modelo las partículas están confinadas en un disco de radio R . Si se permite que las

partículas se muevan en todo el espacio, pero con el fondo que se extiende hasta infinito, el resultado anterior se simplifica reemplazando la función gamma incompleta por la función gamma completa, que es una factorial $j! = \Gamma(j+1)$. Este modelo se conoce como el modelo del disco suave, ya que a pesar que las partículas no están confinadas por las paredes duras de un disco, el potencial creado por el fondo las confina armónicamente y estas se encuentran en su mayoría de nuevo en un disco de radio $R = \sqrt{N}/(\pi n_b)$, aunque algunas pueden salir de este disco haciendo que la densidad no sea nula afuera del disco, pero que decae rápidamente afuera del disco.

Además de la analogía con el efecto Hall cuántico, el problema del plasma de un componente está también relacionado con estudio de la distribución de los valores propios de una matriz aleatoria con elementos de matriz distribuidos con probabilidad gaussiana, estudiado por [Ginibre 1965]. Una revisión más amplia sobre este otro aspecto del plasma de un componente y su relación con la teoría de matrices aleatorias se puede encontrar en [Mehta 1991, Forrester 2010].

4.2. Más allá de $\Gamma = 2$. Hasta ahora no ha sido posible hacer el cálculo analítico exacto de la función de partición del plasma de un componente cuando $\Gamma \neq 2$ en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. [Šamaj 2004] discute sobre la posibilidad que el modelo sea exactamente soluble para $\Gamma \neq 2$, y muestra algunas estrategias para su resolución. A continuación presentamos algunos esfuerzos que se han hecho en el caso en que $\Gamma/2$ es un entero, en que se puede hacer un cálculo explícito, pero para un número finito de partículas en el plasma. La técnica presentada a continuación, desarrollada por [Téllez, Forrester 1999] es en el fondo equivalente a la de [Šamaj, Percus 1995, Šamaj 2004] pero su formulación inicial es diferente, lo que hace que ambas se complementen.

Cuando $\Gamma = 2$, el hecho que el factor de Boltzmann quedaba expresado en términos de funciones de onda ortogonales era lo que permitía el cálculo explícito de la función de partición. Cuando $\Gamma \neq 2$, siguiendo la interpretación de [Laughlin 1983], de pensar en el factor de Boltzmann del plasma de un componente (4.5) como el cuadrado de la norma de la función de onda Ψ (4.6), para calcular la función de partición es necesario calcular la norma de Ψ . Para esto es conveniente expandir esta función en una base de funciones ortogonales. Poniendo en factor los términos gaussianos $e^{-\pi \rho_b r_j^2/2}$, la función

de onda Ψ es esencialmente proporcional a

$$\Delta(z_1, \dots, z_N)^{\Gamma/2} = \prod_{i < j} (z_j - z_i)^{\Gamma/2} \quad (4.9)$$

Se puede notar que si $\Gamma/2$ es un entero entonces $\Delta(z_1, \dots, z_N)^{\Gamma/2}$ es un polinomio homogéneo de grado $\Gamma N(N-1)/2$. Este polinomio es simétrico si $\Gamma/2$ es impar, y es antisimétrico en el caso que $\Gamma/2$ sea par. Por lo tanto es conveniente expandir dicho polinomio en funciones monomiales simétricas (o antisimétricas) según el caso. Por ejemplo, si $\Gamma/2$ es par,

$$\Delta(z_1, \dots, z_N)^{\Gamma/2} = \sum_{\mu} c_{\mu} m_{\mu}(z_1, \dots, z_N) \quad (4.10)$$

en donde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ es una partición de $\Gamma N(N-1)/2 = \sum_k \mu_k$ con

$$\Gamma(N-1)/2 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_N \leq 0 \quad (4.11)$$

y

$$m_{\mu}(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\prod_i m_i!} \sum_{\sigma \in S_N} z_{\sigma(1)}^{\mu_1} \dots z_{\sigma(N)}^{\mu_N} \quad (4.12)$$

son las funciones monomiales simétricas. En la ecuación anterior, S_N es el grupo de permutaciones de N elementos y m_i es la multiplicidad del entero i en la partición μ . Las funciones m_{μ} son ortogonales entre ellas, lo que permite simplificar el cálculo de la norma de Ψ . Más generalmente, en el cálculo de cualquier integral de la forma

$$I = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \prod_{i=1}^N (d^2 \mathbf{r}_i g(r_i)) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^{\Gamma} \quad (4.13)$$

el uso de la expansión (4.10) y la ortogonalidad de las funciones m_{μ} permite llegar al resultado

$$I = N! \sum_{\mu} \frac{c_{\mu}^2}{\prod_i m_i!} \prod_{k=1}^N \int_0^{\infty} r^{2\mu_k} g(r) 2\pi r dr. \quad (4.14)$$

Cuando $\Gamma/2$ es un entero impar, el formalismo anterior se adapta fácilmente, considerando expansión en funciones monomiales antisimétricas. El resultado es de nuevo de la forma (4.14).

Por ejemplo, para el modelo del plasma de un componente en el disco suave, $g(r) = e^{-\pi n_b \Gamma r^2}$, y la función

de partición del sistema es

$$Q = \frac{1}{N! \lambda^{2N}} \int e^{-\beta H} \prod_{k=1}^N d^2 \mathbf{r}_k = e^{3\Gamma N^2/8} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{2N} (\pi n_b L^2)^{N(\frac{\Gamma}{4}-1)} \times \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^{N(\frac{\Gamma}{4}-1)-\frac{\Gamma}{4}N^2} N^{-\Gamma N^2/4} \pi^N Z_s, \quad (4.15)$$

en donde se definió una función de partición reducida del sistema que es igual a

$$Z_s = \frac{1}{N! \pi^N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \prod_{i=1}^N d^2 z_i e^{-|z_i|^2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |z_k - z_j|^{\Gamma} = \sum_{\mu} \frac{c_{\mu}^2}{\prod_i m_i!} \prod_{k=1}^N \mu_k! . \quad (4.16)$$

Se puede observar que el caso $\Gamma = 2$ está incluido en este formalismo. En este caso sólo hay una partición en la expansión (4.10), y las sumas sobre μ en (4.14), se reducen a un sólo término con $\mu = (N-1, N-2, \dots, 0)$ y $c_{\mu} = 1$.

Teniendo ya una expresión formal como (4.16) para la función de partición del plasma de un componente, queda la tarea de determinar los coeficientes c_{μ} de la expansión para obtener un resultado explícito. [Téllez, Forrester 1999] realizaron un cálculo directo de estos con hasta una decena de partículas. Curiosamente en ese cálculo se observó que muchos de los coeficientes c_{μ} resultaban ser cero. La razón de esto no se entendió sino varios años más tarde gracias a los trabajos de [Bernevig, Haldane 2008, Bernevig, Regnault 2009] y otros grupos interesados en el efecto Hall cuántico. Resulta que el polinomio (4.9) es un caso particular de polinomio de Jack, el cual efectivamente puede expandirse como en (4.10), pero de las propiedades de los polinomios de Jack se sabe que en esta expansión sólo intervienen particiones que estén dominadas por una partición particular llamada partición raíz del polinomio de Jack [Macdonald 1995]. Adicionalmente los polinomios de Jack son funciones propias de un cierto operador diferencial. Reemplazar la expansión (4.10) en la ecuación de valores y vectores propios asociada a los polinomios de Jack, provee una serie de relaciones de recurrencia entre los coeficientes c_{μ} [Bernevig, Haldane 2008, Bernevig, Regnault 2009, Téllez, Forrester 2012] que permite calcularlos de manera más eficaz que con los algoritmos anteriores de [Téllez, Forrester 1999].

4.3. Implementación numérica y resultados nuevos para $\Gamma = 8$. Aunque estos nuevos algoritmos y avances en los computadores en los últimos años permiten el cálculo de los coeficientes c_μ y de la función de partición del plasma de un componente para un número de partículas cada vez mayor, el número de particiones admisibles involucradas crece de manera más que exponencial con el número de partículas. Así el cálculo numérico se enfrenta a dificultades relacionadas no solo con el tiempo de cálculo necesario para obtener resultados, sino también de almacenamiento de los datos. En la tabla 6.1 se muestra el número de particiones en función del número partículas.

Para el cálculo de la función de partición del plasma de un componente (4.16) y otras cantidades de interés como la densidad y las funciones correlación, es conveniente primero evaluar los coeficientes c_μ , usando el algoritmo de [Bernevig, Regnault 2009], y almacenar los datos para una posterior evaluación del modelo del plasma de un componente que se estudie (por ejemplo el plasma en un disco con frontera dura, o suave, o el plasma confinado en una esfera, etc.).

Para realizar el cálculo numérico posterior de la función de partición, el autor recientemente implementó un algoritmo en paralelo usando segmentación (pipeline). En éste, un hilo (thread) de ejecución del programa lee de manera secuencial el archivo con los datos de los coeficientes, y pone a disponibilidad de otros hilos de ejecución paquetes de datos. Los demás hilos trabajan en paralelo realizando sumas parciales de la suma dada en la ecuación (4.16). Un hilo termina el proceso consolidando las sumas parciales para dar el resultado final. En un computador multiprocesador y/o multinúcleo, la ganancia en tiempo para la obtención de resultados puede ser considerable comparado con un algoritmo sencillo que realice la suma de manera lineal y no paralela. La tabla 6.1 muestra la función de partición para el plasma en un disco suave, para un número de partículas de hasta $N = 14$ para $\Gamma = 4$ y $\Gamma = 6$ y hasta $N = 11$ para $\Gamma = 8$. La tabla 6.1 muestra igualmente la energía libre $\beta F = -\ln Q$, para la cuál, en la expresión de la función de partición Q de la ecuación (4.15) se fijaron las escalas de longitud irrelevantes L y λ imponiendo $n_b L^2 = 1$ y $\lambda/L = 1$, siguiendo la misma convención que en [Téllez, Forrester 1999]. Esta tabla complementa los resultados ya obtenidos en [Téllez, Forrester 1999], con nuevos resultados para un mayor número de partículas y para $\Gamma = 8$.

Con estos resultados numéricos se puede hacer una extrapolación de talla finita para obtener la energía libre en el límite termodinámico cuando $N \rightarrow \infty$. Para $\Gamma = 4$ y $\Gamma = 6$, esto está detallado en [Téllez, Forrester 1999]. Para obtener mejores resultados, es conveniente estudiar el plasma en la superficie de una esfera en vez del disco suave, por dos razones principalmente. Primero, en la esfera al no tener ésta fronteras, la energía libre del plasma no presenta correcciones de tensión “superficial” proporcionales a \sqrt{N} que sí aparecen en el disco. Segundo, como la esfera es homogénea, se puede fijar una partícula en el polo norte en el cálculo de la función de partición y así la función de partición de N partículas se puede expresar en términos de otra función de partición de $N - 1$ partículas. La función de partición de N partículas en la esfera de radio R es [Téllez, Forrester 1999, Téllez, Forrester 2012]

$$\begin{aligned} Q_N &= \frac{e^{\Gamma N^2/4}}{N!(2R)^{2N(\frac{\Gamma}{4}-1)}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |z_k - z_j|^\Gamma \times \\ &\quad \prod_{j=1}^N \frac{d^2 z_j}{(1 + |z_j|^2)^{2+(N-1)\frac{\Gamma}{2}}} \\ &= \frac{e^{\Gamma N^2/4} \pi}{N!(2R)^{2N(\frac{\Gamma}{4}-1)}} \int_{\mathbb{R}^{2(N-1)}} \prod_{1 \leq j < k \leq N-1} |z_k - z_j|^\Gamma \times \\ &\quad \prod_{j=1}^{N-1} |z_j|^\Gamma \frac{d^2 z_j}{(1 + |z_j|^2)^{2+(N-1)\frac{\Gamma}{2}}}. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Usando (4.14) se obtiene, para $N + 1$ partículas

$$Q_{N+1} = \frac{e^{\Gamma(N+1)^2/4} \pi^{(N+1)\Gamma/4} n_b^{(N+1)(\frac{\Gamma}{4}-1)}}{((N\frac{\Gamma}{2} + 1)!)^N (N+1)^{N(\frac{\Gamma}{4}-1)+\frac{\Gamma}{4}}} Z_N^{\text{es}} \quad (4.18)$$

con

$$Z_N^{\text{es}} = \sum_{\mu} \frac{c_\mu^2}{\prod_i m_i!} \prod_{k=1}^N \left(\mu_k + \frac{\Gamma}{2} \right)! \left((N-1)\frac{\Gamma}{2} - \mu_k \right)! \quad (4.19)$$

En la tabla 6.2 se muestra la energía libre $\beta F = -\ln Q_N$ en la esfera, y la figura 1 muestra estos datos gráficamente en función del número de partículas N , en el caso $\Gamma = 8$. La figura también muestra una extrapolación, usando los tres valores más grandes de N disponibles (10, 11 y 12), de la energía libre con la forma esperada en el límite $N \rightarrow \infty$ [Jancovici, Téllez 1996, Téllez, Forrester 1999]

$$\beta F = N\beta f + \frac{1}{6} \ln N + C + \frac{D}{N} + O(1/N^2) \quad (4.20)$$

que permite obtener el siguiente estimado de la energía libre por partícula, cuando $\Gamma = 8$,

$$\beta f = -4,639 \quad (4.21)$$

con 4 cifras significativas. Adicionalmente, $C = 0,2487$ y $D = 0,057357$.

Además del cálculo de la función de partición, este formalismo ha sido usado para entender las correcciones de talla finita en sistemas de Coulomb [Téllez, Forrester 1999]. La expansión formal (4.10) ha servido como herramienta para demostrar ciertas propiedades del plasma, sin requerir realizar explícitamente la suma. Por ejemplo, [Téllez, Forrester 1999] encontraron y demostraron ciertas reglas de suma que satisface la función de correlación de pares en el disco. También este formalismo permitió estudiar los momentos de la densidad en el disco suave y de la función de correlación de pares en la esfera [Téllez, Forrester 2012].

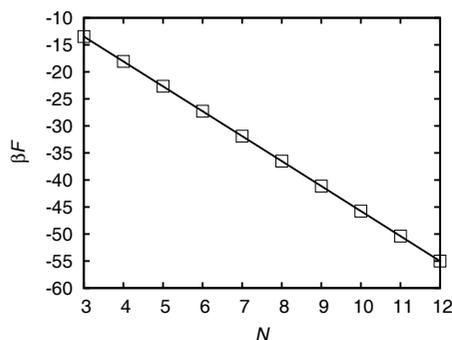


Figura 1. Energía libre del plasma de un componente cuando $\Gamma = 8$ en función del número de partículas (símbolos cuadrados) y una extrapolación de los datos (línea continua) a la forma esperada dada por la ecuación (4.20).

5. Conclusiones

En este trabajo se hizo una revisión de dos sistemas de Coulomb exactamente solubles: el plasma de dos componentes y el plasma de un componente. Para ambos modelos, que son modelos de física estadística clásica, existe una analogía con un problema de mecánica cuántica (o teoría de campos) a temperatura cero. Cuando el acoplamiento $\Gamma = 2$ los modelos cuánticos correspondientes son sin interacción, lo que permite resolverlos.

Cuando $\Gamma \neq 2$, los modelos cuánticos equivalentes son acoplados lo que dificulta su solución. Sin embargo para

el plasma de dos componentes, el modelo equivalente (el modelo de sine-Gordon) sigue siendo exactamente soluble. Para el plasma de un componente, aún no se ha encontrado una solución exacta cuando $\Gamma \neq 2$, sin embargo se presentó un formalismo que permite obtener resultados para un número finito de partículas y cuando $\Gamma/2$ es entero. Se presentaron algunos resultados nuevos para $\Gamma = 8$ que complementan los ya existentes en la literatura para $\Gamma = 4$ y $\Gamma = 6$.

Agradecimientos. Este trabajo fue en parte financiado por la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes.

Bibliografía

- [Brydges, Martin 1999] D. C. Brydges and Ph. A. Martin, “Coulomb systems at low density: A review”, *J. Stat. Phys.* **96**, 1163 (1999).
- [Bernevig, Haldane 2008] B. A. Bernevig, F. D. M. Haldane, “Model fractional quantum Hall states and Jack polynomials”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 246802 (2008).
- [Bernevig, Regnault 2009] B. A. Bernevig, N. Regnault, “Anatomy of abelian and non-abelian fractional quantum Hall states”, *Phys. Rev. Lett.* **103** 206801 (2009).
- [Caillol 1981] J. M. Caillol, “Exact results for a two-dimensional one-component plasma on a sphere”, *J. Physique – Lettres* **42**, L-245 (1982).
- [Chapman 1913] D. L. Chapman, “A contribution to the theory of electrocapillarity”, *Philos. Mag.* **25** 475 (1913).
- [Coleman 1975] S. Coleman, “Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model”, *Phys. Rev. D* **11**, 2088 (1975).
- [Cornu, Jancovici 1989] F. Cornu, B. Jancovici, “The electrical double layer: A solvable model”, *J. Chem. Phys.* **90**, 2444 (1989).
- [Dashen, Hasslacher, Neveu, 1975] R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, “Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques”, *Phys. Rev. D* **11**, 3424 (1975).
- [Debye, Hückel 1923] P. Debye, E. Hückel, “The theory of electrolytes. I. Lowering of freezing point and related phenomena”, *Phys. Z* **24** 185 (1923).
- [Ferrero, Téllez 2007] A. Ferrero, G. Téllez, “Two-dimensional two-component plasma with adsorbing impurities”, *J. Stat. Phys.* **129**, 759 (2007).
- [Forrester 2010] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press (2010).
- [Forrester, Jancovici, Téllez 1996] P. J. Forrester, B. Jancovici, G. Téllez, “Universality in some classical Coulomb systems”, *J. Stat. Phys.* **84**, 359 (1996).
- [Gaudin 1985] M. Gaudin, “L’isotherme critique d’un plasma sur réseau ($\beta = 2$, $d = 2$, $n = 2$)”, *J. Phys. (France)* **46**, 1027 (1985).
- [Ginibre 1965] J. Ginibre, “Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices”, *J. Math. Phys.* **6**, 440 (1965).
- [Gouy 1910] G. L. Gouy, “Sur la constitution de la charge électrique a la surface d’un électrolyte”, *J. Phys.* **9**, 457 (1910).

- [Jancovici 1981] B. Jancovici, “Exact results for the two-dimensional one-component plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 386 (1981).
- [Jancovici, Manificat, Pisani 1994] B. Jancovici, G. Manificat, C. Pisani, “Coulomb systems seen as critical systems: Finite-size effects in two dimensions”, *J. Stat. Phys.* **76**, 307 (1994).
- [Jancovici, Téllez 1996] B. Jancovici, G. Téllez, “Coulomb systems seen as critical systems: Ideal conductor boundaries” *J. Stat. Phys.* **82**, 609 (1996).
- [Jancovici, Téllez 1998] B. Jancovici, G. Téllez, “Two-dimensional Coulomb systems on a surface of constant negative curvature”, *J. Stat. Phys.* **91**, 953 (1998).
- [Kalinay, Šamaj 2002] P. Kalinay, L. Šamaj, “Thermodynamic properties of the two-dimensional Coulomb gas in the low-density limit”, *J. Stat. Phys.* **106**, 857 (2002).
- [Klauder 2011] J. R. Klauder, *A modern approach to functional integration*, Springer (2011).
- [Laughlin 1983] R.B. Laughlin, “Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations”, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [Lieb, Lebowitz 1972] E. H. Lieb, J. L. Lebowitz, “The constitution of matter: Existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei”, *Adv. Math.* **9**, 316 (1972).
- [Macdonald 1995] I. G. Macdonald, *Hall polynomials and symmetric functions*, 2nd ed., Oxford University Press, (1995).
- [McCaskill, Fackerell 1988] J. S. McCaskill, E. D. Fackerell, “Painlevé solution of the Poisson-Boltzmann equation for a cylindrical polyelectrolyte in excess salt solution”, *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* **2**, 161 (1988).
- [McCoy, Tracy, Wu 1977] B. M. McCoy, C. A. Tracy, T. T. Wu, “Painlevé functions of the third kind”, *J. Math. Phys.* **18**, 1058 (1977).
- [Mehta 1991] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, 2nd ed. (1991).
- [Onsager 1944] L. Onsager, “Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition”, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).
- [Šamaj 2003] L. Šamaj, “Exact solution of a charge-asymmetric two-dimensional Coulomb gas”, *J. Stat. Phys.* **111**, 261 (2003).
- [Šamaj 2004] L. Šamaj, “Is the two-dimensional one-component plasma exactly solvable?”, *J. Stat. Phys.* **117**, 131 (2004).
- [Šamaj, Jancovici 2002] L. Šamaj, B. Jancovici, “Large-distance behavior of particle correlations in the two-dimensional two-component plasma”, *J. Stat. Phys.* **106**, 301 (2002).
- [Šamaj, Percus 1995] L. Šamaj, J. K. Percus, “A functional relation among the pair correlations of the two-dimensional one-component plasma”, *J. Stat. Phys.* **80**, 811 (1995).
- [Šamaj, Travěnc 2000] L. Šamaj, I. Travěnc, “Thermodynamic properties of the two-dimensional two-component plasma”, *J. Stat. Phys.* **101**, 713 (2000).
- [Samuel 1978] S. Samuel, “Grand partition function in field theory with applications to sine-Gordon field theory”, *Phys. Rev. D* **18** 1916 (1978).
- [Téllez 1997] G. Téllez, “Two-component plasma in a gravitational field”, *J. Chem. Phys.* **106**, 8572 (1997).
- [Téllez 2005] G. Téllez, “Short-distance expansion of correlation functions for charge-symmetric two-dimensional two-component plasma: Exact results”, *J. Stat. Mech. : Theory and Experiment*, P10001 (2005)
- [Téllez 2006] G. Téllez, “Charge inversion of colloids in an exactly solvable model”, *Europhys. Lett.* **76**, 1186 (2006).
- [Téllez 2007] G. Téllez, “Equation of state in the fugacity format for the two-dimensional Coulomb gas”, *J. Stat. Phys.* **126**, 281 (2007).
- [Téllez, Forrester 1999] G. Téllez, P. J. Forrester, “Exact finite size study of the 2dOCP at $\Gamma = 4$ and $\Gamma = 6$ ”, *J. Stat. Phys.* **97**, 489 (1999).
- [Téllez, Forrester 2012] G. Téllez, P. J. Forrester, “Expanded Vandermonde powers and sum rules for the two-dimensional one-component plasma”, *J. Stat. Phys.* **148**, 824 (2012).
- [Téllez, Merchán 2002] G. Téllez, L. Merchán, “Solvable model for electrolytic soap films: the two-dimensional two-component plasma”, *J. Stat. Phys.* **108**, 495 (2002).
- [Téllez, Trizac 2006] G. Téllez, E. Trizac, “Exact asymptotic expansions for the cylindrical Poisson-Boltzmann equation”, *J. Stat. Mech.* P06018 (2006).
- [Torres, Téllez 2004] A. Torres, G. Téllez, “Finite-size corrections for Coulomb systems in the Debye-Huckel regime”, *J. Phys. A: Math. and Gen.* **37**, 2121 (2004).
- [Tracy, Widom 1998] C. A. Tracy, and H. Widom, “Asymptotics of a class of solutions to the cylindrical Toda equations”, *Comm. Math. Phys.* **190**, 697 (1998).
- [Tracy, Widom 1997] C. A. Tracy, H. Widom, “On exact solutions to the cylindrical Poisson-Boltzmann equation with applications to polyelectrolytes”, *Physica A* **244**, 402 (1997).
- [Trizac, Téllez 2006] E. Trizac, G. Téllez, “Onsager-Manning-Oosawa condensation phenomenon and the effect of salt”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 038302 (2006).
- [Trizac, Téllez 2007] E. Trizac, G. Téllez, “Preferential interaction coefficient for nucleic acids and other cylindrical polyions”, *Macromolecules* **40** (4), 1305 (2007).
- [Verwey, Overbeek 1948] E. J. W. Verwey, J. T. G. Overbeek *Theory of the stability of lyophobic colloids*, Elsevier (1948).
- [Widom 1997] H. Widom, “Some classes of solutions to the Toda lattice hierarchy”, *Comm. Math. Phys.* **184**, 653 (1997). **84**, 161 (1988).
- [Zamolodchikov 1995] Al. B. Zamolodchikov, “Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions”, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 1125 (1995).
- [Zamolodchikov 1979] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, “Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models”, *Ann. Phys.* **120**, 253 (1979).

Recibido el 15 de diciembre de 2012

Aceptado para su publicación el 31 de abril de 2013

6. Anexos

CUADRO 6.1. Número de particiones, función de partición y energía libre del plasma de un componente en el disco suave.

Γ	N	Número de particiones	Z_s	βF
4	2	2.00000000×10^0	4.000000000×10^0	-4.130576688
4	3	5.00000000×10^0	2.640000000×10^2	-6.384303538
4	4	1.60000000×10^1	6.370560000×10^5	-8.672467719
4	5	5.90000000×10^1	$9.943492608 \times 10^{10}$	-10.981791362
4	6	2.47000000×10^2	$1.564844770 \times 10^{18}$	-13.306058227
4	7	1.11100000×10^3	$3.569410025 \times 10^{27}$	-15.641497884
4	8	5.30200000×10^3	$1.604265998 \times 10^{39}$	-17.985645820
4	9	2.63760000×10^4	$1.854020057 \times 10^{53}$	-20.336822797
4	10	1.35670000×10^5	$6.968395364 \times 10^{69}$	-22.693827898
4	11	7.16542000×10^5	$1.051060905 \times 10^{89}$	-25.055765205
4	12	3.86814200×10^6	$7.695050490 \times 10^{110}$	-27.421944618
4	13	2.12658840×10^7	$3.253268939 \times 10^{135}$	-29.791821463
4	14	1.18741369×10^8	$9.318836795 \times 10^{162}$	-32.164957286
6	2	2.00000000×10^0	2.400000000×10^1	-5.960298961
6	3	5.00000000×10^0	1.339200000×10^5	-9.191669011
6	4	1.60000000×10^1	$5.533774848 \times 10^{11}$	-12.467150516
6	5	5.90000000×10^1	$3.995690511 \times 10^{21}$	-15.769625685
6	6	2.47000000×10^2	$9.863763980 \times 10^{34}$	-19.095091912
6	7	1.11100000×10^3	$1.434702719 \times 10^{52}$	-22.437790138
6	8	5.30200000×10^3	$1.947302351 \times 10^{73}$	-25.793196865
6	9	2.63760000×10^4	$3.676940905 \times 10^{98}$	-29.158849783
6	10	1.35670000×10^5	$1.374190481 \times 10^{128}$	-32.533159202
6	11	7.16542000×10^5	$1.393477082 \times 10^{162}$	-35.914875485
6	12	3.86814200×10^6	$5.099989193 \times 10^{200}$	-39.302977990
6	13	2.12658840×10^7	$8.741927741 \times 10^{243}$	-42.696643685
6	14	1.18741369×10^8	$8.919195799 \times 10^{291}$	-46.095213695
8	2	3.00000000×10^0	1.920000000×10^2	-7.973471304
8	3	1.30000000×10^1	1.743897600×10^8	-12.275746054
8	4	7.60000000×10^1	$3.291231685 \times 10^{18}$	-16.617970960
8	5	5.21000000×10^2	$4.073760556 \times 10^{33}$	-20.982031598
8	6	3.99600000×10^3	$8.232729716 \times 10^{53}$	-25.379776579
8	7	3.29230000×10^4	$5.606729944 \times 10^{79}$	-29.802426931
8	8	2.86202000×10^5	$2.363768117 \times 10^{111}$	-34.239039832
8	9	2.59034700×10^6	$1.051632746 \times 10^{149}$	-38.687241974
8	10	2.42039350×10^7	$7.911509959 \times 10^{192}$	-43.146307016
8	11	2.32050202×10^8	$1.533194399 \times 10^{243}$	-47.614935052

CUADRO 6.2. Energía libre del plasma de un componente en la esfera.

Γ	N	βF
4	3	-6.88455786
4	4	-9.28902964
4	5	-11.70315639
4	6	-14.12360907
4	7	-16.54847858
4	8	-18.97661213
4	9	-21.40725661
4	10	-23.83989231
4	11	-26.27414571
4	12	-28.70973941
4	13	-31.14646172
4	14	-33.58414743
4	15	-36.02266513

Γ	N	βF
6	3	-10.11581348
6	4	-13.59099914
6	5	-17.07325460
6	6	-20.56211958
6	7	-24.05507825
6	8	-27.55117758
6	9	-31.04972067
6	10	-34.55019847
6	11	-38.05225175
6	12	-41.55561570
6	13	-45.06008536
6	14	-48.56550018
6	15	-52.07173242

Γ	N	βF
8	3	-13.46162588
8	4	-18.06550189
8	5	-22.66844522
8	6	-27.28108063
8	7	-31.89646097
8	8	-36.51496906
8	9	-41.13594380
8	10	-45.75876347
8	11	-50.38309125
8	12	-55.00871526