

UN MODELO INFLACIONARIO SIN INFLATONES

Gabriel Gómez¹, Yeinzon Rodríguez^{2,3}

Resumen

Gómez G. & Y. Rodríguez: Un modelo inflacionario sin inflatones. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (133): 479-496, 2010. ISSN 0370-3908.

En la cosmología inflacionaria, los modelos más populares y exitosos son los del tipo slow-roll, los cuales satisfacen las condiciones requeridas para la solución de los problemas clásicos de la cosmología estándar. Sin embargo, estos modelos requieren de la existencia de campos escalares fundamentales, tales como el inflatón, los cuales aún no han sido observados en la naturaleza. A esta “dificultad” se suma el hecho de que estos modelos requieren de potenciales prácticamente planos para generar inflación. En este artículo, se construye un modelo inflacionario motivado por las dificultades que presentan los modelos del tipo slow-roll. En este modelo, se considera nuestro Universo a gran escala como un fluido perfecto constituido por vacío o constante cosmológica Λ (en cuyo caso es la única componente dominante) y radiación. Para dicho modelo, la expansión acelerada del Universo se sigue a partir de la transferencia de energía de vacío no sea transferida a la radiación, no se generará una época inflacionaria exitosa) sin la necesidad de campos escalares fundamentales tales como el inflatón. A medida que ocurra la transición, la densidad de energía asociada al vacío decaerá exponencialmente a densidad de energía de radiación, modificando el contenido energético del Universo y, consecuentemente, las ecuaciones de evolución que describen esta etapa inflacionaria. A partir de la dinámica del modelo, se obtienen soluciones analíticas exactas para el parámetro de Hubble y de expansión. Se calcula el monto de inflación y se establecen las condiciones necesarias para resolver los problemas de planitud, horizonte y de reliquias no deseadas. Adicionalmente, se determina la temperatura al final de este período inflacionario denominada temperatura post-inflacionaria.

Palabras clave: cosmología, modelos inflacionarios, fluidos interactuantes.

¹ Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: gabrielphysics@gmail.com

² Vicerrectoría de Ciencia, Tecnología, e Innovación, Universidad Antonio Nariño, Cra. 3 Este No. 47A-15, Bogotá, D. C. 110231, Colombia.

³ Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad universitaria, Bucaramanga 680002, Colombia, Correo electrónico: yrodrig@uis.edu.co

Abstract

In the inflationary cosmology, the most popular and successful models are those of the slow-roll variety, which satisfy the required conditions to solve the classical problems of the standard cosmology. However, these models require the existence of fundamental scalar fields, such as the inflaton, that have not been observed yet in nature. Besides this “difficulty”, these models require almost flat potentials to generate inflation. In this paper, we build an inflationary model motivated by the difficulties presented by the slow-roll models. In this model, we consider our Universe at large-scales as a perfect fluid composed of vacuum or cosmological constant Λ (in which case this is the only dominant component) and radiation. The accelerated expansion of the Universe, for this model, is driven by the transfer of energy from vacuum to radiation (in the case that the vacuum energy is not transferred to radiation, a successful inflationary epoch will not be generated) without the need of fundamental scalar fields such as the inflaton. As the transition happens, the energy density associated to the vacuum will exponentially decay to radiation energy density, modifying the energy content of the Universe and, consequently, the evolution equations that describe this inflationary stage. From the dynamics of the model, exact analytical solutions for the Hubble and expansion parameters are obtained. The amount of inflation is calculated and the necessary conditions to solve the flatness, horizon, and unwanted relics problems are established. In addition, the temperature at the end of this inflationary period, which is called post-inflationary temperature, is calculated.

Key words: Cosmology, inflationary models, interacting fluids.

1. Introducción

Nuestro Universo debe presentar condiciones genéricas mediante las cuales el paradigma inflacionario, a través de un modelo adecuado, describa su evolución primordial (antes del Big Bang). A partir de esta idea se quiere obtener un modelo que reproduzca nuestro Universo actual bajo las condiciones requeridas para la solución de los problemas clásicos de la cosmología estándar. La cosmología moderna se apoya en el período primordial de expansión acelerada, conocido como inflación y propuesto por Alan Guth (Guth, 1981), el cual se define como una etapa primordial del Universo en donde la densidad de energía de vacío domina sobre la densidad de energía total, caracterizada por presión negativa y repulsión gravitacional. Dicha etapa de expansión acelerada produce un incremento del factor de escala $a(t)$ de aproximadamente 27 ordenes de magnitud en un período de al menos 10^{-36} s, e irregularidades capaces de generar formación de estructuras a gran escala a partir de inestabilidad gravitacional (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Existen dos categorías en las cuales se puede clasificar un modelo inflacionario (Mukhanov, 2005), las cuales son de vieja inflación y de nueva inflación. La primera se caracteriza por campos escalares que tunelan de un estado de energía de vacío falso o metaestable a un estado de energía verdadero. La segunda se caracteriza por un potencial prácti-

camente plano en el cual el campo escalar, el inflatón, cae cuesta abajo hasta un mínimo, generando de esta forma inflación. Es inevitable que la clase de modelos de inflación vieja no proporcione una salida exitosa debido a ciertos inconvenientes como la imposibilidad de termalización en la nucleación de burbujas de vacío verdadero en el fondo de burbujas de vacío falso (Witten, 1984), debido a que toda su energía almacenada es concentrada en las paredes de ésta y no sufren cambios para colapsar.

La razón de que prevalezca la idea de la existencia de campos escalares fundamentales en la naturaleza corresponde a la necesidad teórica que requieren algunas teorías generales, tales como el Modelo Estándar de partículas elementales (Kane, 1993), que postula el bosón de Higgs para explicar el mecanismo mediante el cual las partículas adquieren masa, y la teoría de cuerdas (Polchinski, 1998), que postula como un ejemplo el Dilatón como componente de la materia oscura.

Sin embargo, el hecho de que no exista hasta la fecha evidencias observacionales de la existencia de tales campos escalares en la naturaleza (a pesar de los grandes esfuerzos en la búsqueda del Higgs en los experimentos en los aceleradores: Tevatron en el FERMILAB y LEP en el CERN) y de que estén presentes algunas dificultades en los modelos del tipo vieja y nueva inflación, motiva a proponer nuevos modelos inflacionarios alternativos a los tradicionales, siendo

un ejemplo el de inflación vectorial (**Golovnev, Mukhanov & Vanchurin, 2008**) basada en campos vectoriales fundamentales. Cabe notar que los campos vectoriales implican preferencia en la dirección y, por lo tanto, generan violaciones de la isotropía estadística (**Dimopoulos, Karčiauskas, Lyth & Rodríguez, 2009**). No obstante, los campos vectoriales fundamentales están presentes en la naturaleza y desde luego sí se han observado: como es el caso del fotón y de los bosones W^\pm y Z^0 que son los mediadores de las interacciones electromagnética y débil respectivamente.

Según el modelo de Watson *et. al.* (**Watson, Perry, Kane & Adams, 2007**), que se desarrolla a profundidad en este artículo, no se requiere la presencia de campos escalares, inflatones, para generar inflación, sino de dos fluidos acoplados mutuamente: vacío y radiación, en la que el primero domina la densidad de energía. Al igual que otros modelos inflacionarios, este modelo debe ser capaz de solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar (problema de horizonte, de planitud y de reliquias no deseadas), y generar las condiciones primordiales requeridas por el Big Bang caliente (**Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008**), tales como recalentamiento en el cual la densidad de energía de vacío se transforma en radiación.

2. Generalidades de la cosmología estándar

2.1. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La característica más importante de nuestro Universo a gran escala es la aproximada homogeneidad e isotropía que se presenta en la distribución de galaxias. Esta característica constituye el *Principio Cosmológico* (**Mukhanov, 2005**), el cual es válido para regiones observables del Universo mayores a 100 Mpc, siendo 1 Mpc = $3,26 \times 10^6$ años luz. Para regiones observables menores que dicha escala, el Universo presenta inhomogeneidades (galaxias, clusters, superclusters). Observaciones en la radiación cósmica de fondo demuestran que existen pequeñas fluctuaciones en la temperatura $\frac{\delta T}{T}$ del orden de 10^{-5} (**Komatsu et. al., 2011**), es decir, que la distribución de densidad de energía a pequeñas escalas (menores que 100 Mpc) es inhomogénea.

La métrica que describe un Universo homogéneo e

isotrópo a gran escala, es decir, una que cumpla el Principio Cosmológico, es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (**Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008**)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1)$$

en donde t es el tiempo cósmico, r, θ, ϕ son las coordenadas espaciales comóviles, $a(t)$ es el factor de escala del Universo, y K es la constante de curvatura de una hipersuperficie tridimensional (3D).

2.2. Tensor momentum-energía

A partir de la característica de homogeneidad e isotropía que presenta nuestro Universo a gran escala, el contenido energético del Universo se puede modelar como un fluido perfecto descrito por el tensor momentum-energía

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

siendo ρ , P y u^μ la densidad de energía, la presión y la cuadrivelocidad del fluido respectivamente. Además dicho fluido cumple la condición

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (3)$$

en donde el punto y coma denota la derivada covariante⁴. Dicha condición se puede obtener a partir de las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, y G es la constante de gravitación universal. La expresión (3) corresponde a la conservación local del cuadrimomentum (**Weinberg, 1972**).

En un sistema de referencia comóvil, localmente inercial, y cartesiano, la densidad de energía ρ es definida como T^{00} , la densidad de momentum como T^{0i} , y el tensor de esfuerzos como T^{ij} . Si la presión P es isotrópa, el tensor de esfuerzos es definido como $T^{ij} = \delta_{ij}P$. Asumir que la variación del tensor momentum-energía con respecto a la posición es prácticamente despreciable es equivalente a decir que el observador viaja con el fluido (**Malik & Wands, 2009**). El marco en reposo del fluido se define como aquél en que $T^{0i} = 0$ y $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, en donde u^μ es el cuadrivector velocidad. En general $u_\mu u^\mu = 1$ (**Weinberg, 1972**).

⁴Otra manera de expresar la derivada covariante es a través del operador ∇_μ .

2.3. La ecuación de Friedmann

A partir de la componente 0 – 0 de las ecuaciones de campo de Einstein (c.f. Ec. (4)), se obtiene la ecuación más importante de evolución de nuestro Universo, la cual es la ecuación de Friedmann (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (5)$$

en donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble, el punto denota la derivación con respecto al tiempo cósmico t , M_p es la masa de Planck que se relaciona con la constante de gravitación universal mediante $M_p = (G)^{-1/2}$, y K se relaciona con la geometría espacial del Universo: el Universo es plano si $K = 0$, finito o cerrado si $K > 0$, o infinito y abierto si $K < 0$.

Al definir $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}$, se toma ρ_t como la densidad de energía total tal que⁵ $\rho_t = \rho + \rho_\Lambda$, de modo que la ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_t}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2}. \quad (6)$$

De la ecuación de Friedmann, vemos que para un valor dado del parámetro de Hubble, hay una densidad particular conocida como la densidad crítica para la cual el Universo es espacialmente plano en la ausencia de una constante cosmológica

$$\rho_{cvi} = \frac{3H^2 M_p^2}{8\pi}. \quad (7)$$

Es usualmente más simple medir la densidad de energía como una fracción de la densidad crítica, definiendo el parámetro de densidad $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cvi}}$. Éste puede ser aplicado separadamente a diferentes contenidos energéticos del Universo, tales como materia no relativista, radiación y bariones. Se puede incluir también una contribución $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}$ asociada a la constante cosmológica, tal que $\Omega_{tot} = \Omega + \Omega_\Lambda$ ⁶. Entonces la ecuación de Friedmann puede ser descrita como

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (8)$$

2.4. La ecuación de continuidad

La dependencia temporal de ρ está dada por la ecuación de continuidad (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009;

Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (9)$$

la cual corresponde a la componente 0 de la ecuación (3).

La anterior expresión se puede escribir de la forma

$$\dot{a} \left(\frac{d\rho}{da} \right) = -3H(\rho + P), \quad (10)$$

que a su vez es equivalente a la expresión

$$\frac{d(\rho a^3)}{da} = -P \frac{d(a^3)}{da}. \quad (11)$$

La anterior ecuación corresponde a la primera ley de la termodinámica para una expansión adiabática, $dU = -PdV$, en donde $U = V\rho$ es la energía interna en un volumen $V \propto a^3$. La expansión de un Universo isótropo es de hecho adiabática porque no puede haber transferencia de energía de una región comóvil a otra, de acuerdo con el principio cosmológico.

2.5. El paradigma inflacionario

La definición exacta de inflación es simplemente una época durante la cual la expansión del Universo es acelerada

$$\text{INFLACION} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0. \quad (12)$$

Existe una expresión alternativa equivalente a la condición de inflación que proporciona una interpretación más física

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0, \quad (13)$$

en donde $\frac{H^{-1}}{a}$ corresponde al radio de Hubble comóvil, y es directamente proporcional al horizonte de partículas⁷ comóvil.

La condición para que se dé inflación es que el horizonte de partículas comóvil, la cual es la más importante característica del Universo en expansión, decrezca con el tiempo (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Dicha condición impone un requerimiento sobre la naturaleza del contenido energético que genera inflación. Directamente de la ecuación de Friedmann (6) se encuentra que

$$\rho + 3P < 0. \quad (14)$$

Puesto que ρ es siempre positivo, es necesario que P sea negativo para satisfacer esta condición, la cual es independiente de la curvatura del Universo. Inflación fue generada

⁵Aquí ρ puede considerar tanto densidad de energía de materia como de radiación.

⁶El valor actual de Ω_Λ , de acuerdo al último reporte de datos del satélite WMAP (Komatsu et al., 2011), es $\Omega_{\Lambda 0} = 0,728 \pm 0,016$.

⁷Se define como la distancia física que hay desde un punto A (nosotros) hasta un punto B (emisión de la radiación cósmica de fondo) de la cual se podría recibir información si la radiación siempre hubiese sido libre.

aparentemente por un tipo especial de contenido energético: uno con $P < 0$.

Una de las particularidades durante inflación es que el parámetro de Hubble H_I puede permanecer constante⁸. En este caso $\frac{da}{a} = H_I dt$, y el factor de escala evoluciona como

$$a(t) = a_e e^{H_I(t-t_f)}; \quad t < t_f, \quad (15)$$

en donde t_f es el tiempo al final de la inflación y a_e es el parámetro de expansión al final de inflación.

3. Poniendo a prueba un primer motor cósmico

En esta sección se inicia la construcción de un modelo inflacionario partiendo de un fondo métrico espacialmente homogéneo e isótropo para un universo constituido por dos fluidos desacoplados, uno de vacío y otro de radiación. Dichos fluidos actúan como fuente de la inflación cósmica. A partir de la ecuación de Friedmann se encuentra una solución para la evolución del factor de escala la cual debe ser consistente con la de un período inflacionario primordial. Esta primera condición determina “la eficiencia de este primer motor cósmico”.

3.1. Evolución de la densidad de energía de vacío y de radiación en un Universo en expansión

Según la definición de la densidad de energía de vacío (parametrizada a través de una constante cosmológica Λ) $\rho_\Lambda = cte$, de aquí que su variación temporal sea nula. Considerando esta característica, se encuentra de la ecuación de continuidad (9) su ecuación de estado⁹ $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

En el contexto cosmológico, a un contenido energético que cumpla con la ecuación de estado $P = \frac{\rho}{3}$ se le llama radiación¹⁰. Al reemplazar la ecuación de estado para la radiación en la ecuación de continuidad, se encuentra que su variación corresponde a la ecuación diferencial

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r. \quad (16)$$

Expresando el parámetro de Hubble como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, y separando las variables respectivas integradas bajo las condiciones

iniciales $\rho_r(a_0) = \rho_{r0}$, se consigue determinar una ecuación de evolución de la densidad de energía de radiación con el factor de escala a

$$\int \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \int \frac{da}{a}, \quad (17)$$

$$\Rightarrow \rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (18)$$

Esta expresión implica que la densidad de energía disminuye como $\rho_r \sim a^{-4}$ a medida que el universo se expande. ρ_{r0} es la densidad de energía inicial de radiación y a_0 es el parámetro de expansión al comienzo de inflación.

La teoría corpuscular de la luz nos dice que la energía para cada fotón de radiación está dada por $E = h\nu$, en donde h es la constante de Planck y ν su frecuencia. Por otra parte su frecuencia se da en términos de la velocidad de la luz c y su longitud de onda λ , $\nu = c/\lambda$. Reemplazando esta expresión en la de la energía para el fotón y dividiendo por el volumen V para expresarla como una densidad de energía se encuentra que

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{\lambda V}. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que, debido al corrimiento al rojo $\lambda \propto a$, y que, debido a la expansión cósmica $V \propto a^3$, se obtiene

$$\rho_\gamma \propto \frac{1}{a \cdot a^3} = a^{-4}, \quad (20)$$

lo cual es consistente con lo encontrado en la ecuación de evolución (18) para la densidad de energía de radiación ρ_r .

3.2. Solución del factor de escala y del parámetro de Hubble para un universo dominado por constante cosmológica y radiación

Al considerar un universo plano ($K = 0$) dominado por constante cosmológica y radiación, es decir $\rho_t = \rho_r + \rho_\Lambda$, y al reemplazar la relación para la densidad de energía de radiación (18) en la ecuación de Friedmann (6) se obtiene

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4}{3M_p^2a^4} + \frac{8\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2}. \quad (21)$$

Multiplicando y dividiendo por H_0^2 cada término y considerando las definiciones

$$\rho_{cri} = \frac{3M_p^2H^2}{8\pi}, \quad (22)$$

⁸Esta es una condición suficiente mas no necesaria para generar inflación, y es satisfecha por los modelos del tipo slow-roll (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

⁹Esta ecuación de estado no es satisfecha por un ensamble de partículas sino, por ejemplo, por campos escalares en el estado de vacío.

¹⁰Las partículas asociadas a estos contenidos energéticos se les considera relativistas debido a que poseen velocidades cercanas a la de la luz, de lo contrario al contenido energético se le denomina materia y satisface la ecuación de estado $P = 0$.

y

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cri}}, \quad (23)$$

se obtiene una ecuación diferencial en términos del factor de escala

$$\dot{a}^2 = \Omega_{r0} \frac{H_0^2 a_0^4}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} H_0^2 a^2, \quad (24)$$

en donde¹¹ $\Omega_{r0} = \frac{8\pi\rho_{r0}}{3M_p^2 H_0^2}$, $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{8\pi\rho_{\Lambda}}{3M_p^2 H_0^2}$, y H_0 es el parámetro de Hubble al inicio de este período.

La ecuación (24) es una ecuación diferencial de primer orden y de variables separables, por consiguiente se puede llevar a la forma

$$\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{a} \sqrt{\Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda 0} a^4}, \quad (25)$$

en donde se ha elegido que¹² $a_0 = 1$. Separando variables y factorizando Ω_{r0} , se encuentra

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \int \frac{ada}{\sqrt{1 + a^4 \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{r0}}}} = \int H_0 dt. \quad (26)$$

La anterior expresión es equivalente a

$$\frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = H_0 t, \quad (27)$$

en donde se ha realizado la sustitución $u = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{r0}}} a^2$. Así, y al realizar una nueva sustitución $u = \sinh \theta$, se obtiene

$$\frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \int \frac{\cosh \theta d\theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} = H_0 t, \quad (28)$$

cuya solución corresponde a

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{4}} \sinh^{1/2} \left[2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right], \quad (29)$$

en donde se ha ajustado la constante de integración asociada a la integral indefinida de tal manera que $a(t=0) = 0$.

A partir de la definición $H = \frac{\dot{a}}{a}$ se obtiene para el parámetro de Hubble la solución

$$H(t) = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 \coth \left[2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right]. \quad (30)$$

Si se sustituye la definición de cada parámetro de densidad asociado a cada componente en la ecuación (29), se determina la forma funcional del factor de escala. Dado que $\left(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)^{1/4} = \left(\frac{8\pi\rho_{r0}}{\Lambda M_p^2}\right)^{1/4} = c_0$ y el argumento del $\sinh^{1/2}$ equivale a $2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t = \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t$, se encuentra que la evolución temporal del factor de escala está en función de la densidad de energía inicial de radiación y de la constante cosmológica Λ .

$$a(t) = c_0 \sinh^{1/2} \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t, \quad (31)$$

mientras que para el parámetro de Hubble, considerando que $\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 = \sqrt{\frac{8\pi\Lambda M_p^2}{3M_p^2 8\pi H_0^2}} H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, se encuentra que

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth \left(\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} t \right). \quad (32)$$

Analizando la Figura 1 se observa que, para un tiempo determinado t_0 , existe un punto de inflexión el cual está asociado con el inicio de un período inflacionario. Dicho período se prolonga indefinidamente¹³ y por consiguiente no corresponde a un período inflacionario primordial¹⁴. En la Figura 2 se presenta la evolución temporal del parámetro de Hubble, la cual sólo depende de la constante cosmológica Λ ; como se puede observar, el parámetro de Hubble disminuye continuamente en este modelo.

4. Dinámica de un modelo inflacionario sin inflatones

Habiendo probado previamente la insuficiencia del primer motor cósmico, se prosigue a perfeccionar su dinámica con el fin de que nuestro modelo sea consistente con un período inflacionario primordial. Por consiguiente, es necesario introducir un nuevo mecanismo para generar la expansión inflacionaria. Para ello es necesario considerar dos fluidos mutuamente acoplados en donde se produzca transferencia de energía de vacío a radiación.

¹¹Nótese que la densidad de energía de vacío ρ_{Λ} no varía, a diferencia de la densidad de energía de radiación. De aquí que sea relevante denotar ρ_{r0} , como la densidad de energía de radiación inicial.

¹²Esto es posible debido a que el factor de escala no es una cantidad observable.

¹³Contrario al período inflacionario primordial el cual debe tener una duración finita.

¹⁴Por período inflacionario primordial se entiende un período en el que se da origen a las estructuras a gran escala (inhomogeneidades) y se identifica antes del Big Bang, a diferencia del período inflacionario que experimenta nuestro Universo actual que podría en esencia ser modelado con este primer motor cósmico.

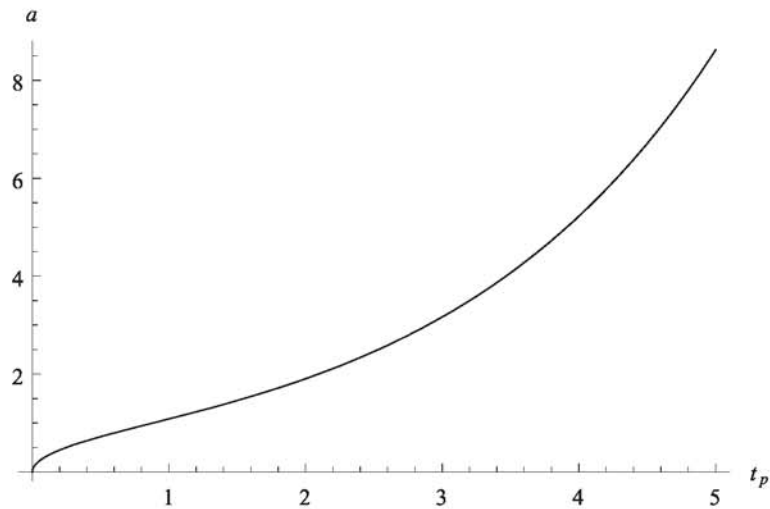


Figura 1: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos no interactuantes: constante cosmológica y radiación

Se puede apreciar que para un tiempo determinado t_0 (correspondiente a $a_0 = 1$) existe un punto de inflexión el cual está asociado con el inicio de un período inflacionario ($\ddot{a} > 0$). Aquí $\Lambda = \frac{3}{4}M_p^2$, $\rho_{r0} = \frac{3}{32\pi}M_p^4$, y $t_p = tM_p$ (unidades de tiempo de Planck), de tal manera que $a(t_p) = \sinh^{1/2} t_p$. El período inflacionario se prolonga indefinidamente y por consiguiente no corresponde a un período inflacionario primordial.

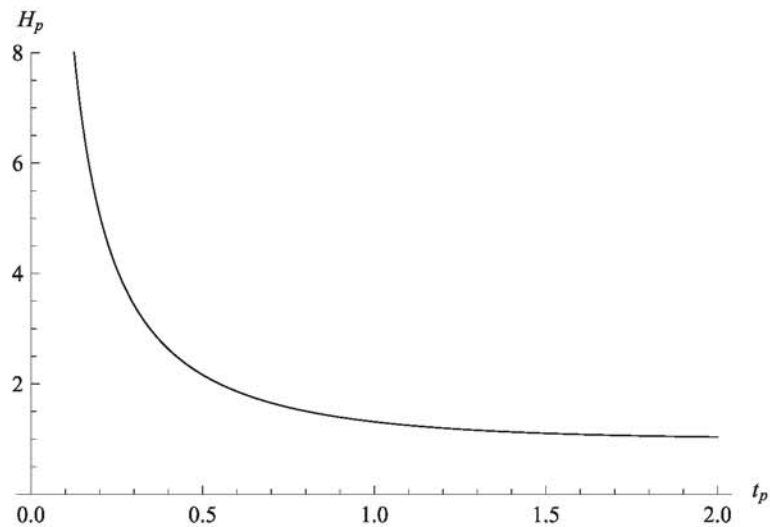


Figura 2: Evolución temporal del parámetro de Hubble para un universo compuesto por dos fluidos no interactuantes: constante cosmológica y radiación

Se puede apreciar que el parámetro de Hubble disminuye continuamente. Aquí $\Lambda = \frac{3}{4}M_p^2$, $H_p = HM_p^{-1}$ (unidades de energía de Planck), y $t_p = tM_p$ (unidades de tiempo de Planck), de tal manera que $H_p(t_p) = \frac{1}{2} \coth t_p$.

4.1. Ecuaciones de evolución para el fondo métrico

Nuestro Universo homogéneo e isótropo es gobernado por la ecuación de evolución

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2}. \quad (33)$$

Derivando la ecuación de Friedmann con respecto al tiempo cósmico se obtienen ecuaciones de evolución "alternativas" para el factor de escala y para el parámetro de Hubble¹⁵

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + 3P), \quad (34)$$

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{M_p^2}(\rho + P). \quad (35)$$

Las anteriores expresiones tienen como objetivo expresar las nuevas ecuaciones de evolución en términos de parámetros que caracterizan el fluido, tales como la densidad y la presión (las cuales actúan como fuente).

Se considera como fuente para las ecuaciones de evolución un fluido constituido por vacío (denotado con el subíndice Λ) y radiación, tal que

$$\rho = \rho_\Lambda + \rho_r, \quad (36)$$

$$P = P_\Lambda + P_r. \quad (37)$$

Dichas componentes del fluido se caracterizan mediante las relaciones¹⁶

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}, \rho_r = \frac{\rho_{ro}}{a^4}, \quad (38)$$

y sus respectivas ecuaciones de estado

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, P_r = \frac{\rho_r}{3}. \quad (39)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de evolución las componentes para la densidad de energía y presión (ecuaciones (36) y (37) respectivamente) y las respectivas relaciones para la presión de cada componente del fluido (39), se encuentra

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (40)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda - \rho_r), \quad (41)$$

$$\dot{H} = -\frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r. \quad (42)$$

De igual manera la ecuación de continuidad toma la forma

$$\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r = -3H(\rho_\Lambda + \rho_r + P_\Lambda + P_r), \quad (43)$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (44)$$

dado que $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ y $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$. De la ecuación (41) se determina que $\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho_\Lambda > \rho_r$, lo cual implica que la componente dominante del fluido debe ser el vacío, mientras que la componente subdominante debe ser la radiación. De esta manera se ha impuesto una condición sobre el contenido energético del Universo para poder generar un período inflacionario¹⁷.

4.2. Transferencia de energía entre los fluidos interactuantes

En la solución (29) del factor de escala se tomó $\Lambda = cte$ o lo que es equivalente $\dot{\rho}_\Lambda = 0$ y como resultado de esta consideración se obtuvo una solución del factor de escala que no es consistente con la de una época inflacionaria primordial. Ahora, si se considera dependencia temporal en la densidad de energía de vacío¹⁸ (Watson, Perry, Kane & Adams, 2007), las cuales surgen como producto de la interacción mutua de dos fluidos acoplados, uno de vacío y otro de radiación, se verá que dicho mecanismo conduce a un período inflacionario primordial.

Para cuantificar la interacción entre los fluidos es necesario definir la razón de transferencia de energía $Q \equiv d\rho/dt$ asociada a cada constituyente de nuestro Universo como

$$\nabla_\mu T_\Lambda^{\mu 0} = Q_\Lambda = -\Gamma\rho_\Lambda, \quad (45)$$

$$\nabla_\mu T_r^{\mu 0} = Q_r = \Gamma\rho_\Lambda, \quad (46)$$

en donde $\nabla_\mu T_{(\alpha)}^{\mu 0}$ es la derivada covariante del respectivo tensor momentum-energía. Γ , la cual se asume constante, es la razón de decaimiento y establece la razón a la que decae la densidad de energía de vacío en densidad de energía de radiación.

Las ecuaciones (45) y (46) describen un modelo fenomenológico de intercambio de energía entre fluidos, motivado por su simplicidad (al asumir Γ como una constante) y por la ausencia de una microfísica que permita entender el origen del fluido de vacío considerado y su interacción con el fluido

¹⁵En realidad se tiene sólo una ecuación de evolución adicional dado que las ecuaciones (34) y (35) son equivalentes.

¹⁶De nuevo, se ha escogido $a_0 = 1$.

¹⁷Esta condición proporciona un período inflacionario, pero no garantiza que sea primordial.

¹⁸Para este modelo se requiere no sólo que la densidad de energía de vacío domine sobre la densidad de energía de radiación, sino que también varíe temporalmente según (45).

de radiación. Existen escenarios alternativos, usando campos escalares, pero en esencia similares a este modelo que permiten describir la microfísica de interacción entre el vacío y la radiación (Abbott, 1985; Berera, Moss & Ramos, 2009; Freese, Liu & Spolyar, 2005; Freese & Spolyar, 2005); sin embargo, y dado que emplean campos escalares, estos escenarios carecen de una de las motivaciones del presente trabajo que es la implementación de un modelo inflacionario sin inflatones en vista de la ausencia de observaciones de partículas escalares fundamentales. Uno de estos escenarios corresponde a la bien conocida "inflación caliente" (Berera, Moss & Ramos, 2009); en él, la razón de decaimiento Γ es variable en el tiempo. Una descripción de la microfísica asociada al modelo estudiado en este artículo está más allá de los propósitos del presente trabajo.

4.3. Ecuación de continuidad modificada

Al considerar la transferencia de energía de un fluido a otro, se produce una modificación sobre la ecuación de continuidad que describe cada fluido individual (Malik & Wands, 2009)

$$\dot{\rho}_\alpha = -3H(\rho_\alpha + p_\alpha) + Q_\alpha, \quad (47)$$

en donde Q_α determina la cantidad de energía transferida entre los fluidos. Por esta razón, se encuentra que la nueva ecuación de continuidad para cada fluido, considerando la transferencia de energía según (45) y (46), es respectivamente

$$T_{\Lambda;\nu}^{\nu 0} = \dot{\rho}_\Lambda = Q_\Lambda, \quad (48)$$

$$T_{r;\nu}^{\nu 0} = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = Q_r. \quad (49)$$

De esta manera se encuentra para cada componente del fluido su respectiva ecuación de continuidad modificada, (48) y (49), de acuerdo con (47). Como consecuencia, se tiene que la densidad de energía de radiación no sólo varía a medida que se expande el universo¹⁹, sino que se produce una contribución a su variación debido a la transferencia de energía. De igual forma $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$.

De acuerdo a lo observado en la Sección 2.2, las ecuaciones de campo de Einstein conllevan a la conservación local del cuadrivectorial sin importar si el fluido perfecto descrito por $T_{\mu\nu}$ corresponde a un único fluido o a múltiples fluidos, en general, interactuantes. Ahora bien, teniendo en cuenta que para múltiples fluidos el tensor energía-momentum es

la suma de los tensores energía-momentum de los fluidos individuales

$$T^{\mu\nu} = \sum_\alpha T_{(\alpha)}^{\mu\nu}, \quad (50)$$

se obtiene que, para el modelo en cuestión que considera un fluido de vacío y otro de radiación,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (T_\Lambda^{\mu\nu}) + \nabla_\mu (T_r^{\mu\nu}) = 0. \quad (51)$$

De aquí se concluye que $Q_\Lambda = -Q_r$, lo cual explica la relación entre las ecuaciones (45) y (46). Las ecuaciones (45) y (46) nos dicen que el cuadrivectorial asociado a cada fluido es conservado localmente únicamente en el caso de que los fluidos no interactúen, de modo que $Q_{(\alpha)} = 0$.

4.4. Ecuaciones de movimiento para el fondo métrico considerando transferencia de energía de vacío a radiación

Sustituyendo las ecuaciones (45) y (46) en (48) y (49) respectivamente se obtiene que

$$\dot{\rho}_\Lambda = -\Gamma\rho_\Lambda, \quad (52)$$

y

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Gamma\rho_\Lambda. \quad (53)$$

De la ecuación diferencial (52) se puede obtener una solución para la evolución de ρ_Λ en términos de la razón de decaimiento Γ

$$\int \frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \int -\Gamma dt, \quad (54)$$

con condición inicial $\rho_\Lambda(t=0) = \rho_{\Lambda 0}$. Así, para un tiempo t :

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (55)$$

De esta manera se ha determinado la forma funcional en el tiempo en que ocurre el decaimiento de la densidad de energía de vacío a radiación. Consecuentemente, la fuente de las ecuaciones de evolución viene alterada acoplando las ecuaciones de evolución (33) y (35). Si se suman estas dos ecuaciones se obtiene

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r) - \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r, \quad (56)$$

y por consiguiente, empleando la solución (55),

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_\Lambda, \quad (57)$$

¹⁹Recordando que, en este caso, $\rho_r \propto a^{-4}$.

²⁰Al final del acoplamiento existirá un pequeño remanente de densidad de energía de vacío que permanecerá constante y dominará después de que la densidad de energía de radiación se haya diluido a través de la expansión del Universo.

$$\Rightarrow 2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (58)$$

Este acoplamiento se mantiene activo hasta que prácticamente toda la densidad de energía de vacío se transforma en densidad de energía de radiación²⁰. El paso a seguir es obtener una solución para la ecuación (58)²¹ por lo que se sugiere llevarla a otra forma y así poder obtener la solución del factor de escala. Reemplazando $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y derivando la mencionada ecuación con respecto al tiempo cósmico se encuentra

$$\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}, \quad (59)$$

$$\Rightarrow \ddot{a}a + \dot{a}^2 = a^2 \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (60)$$

Por otra parte $\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = 2(\ddot{a}a + \dot{a}^2)$, entonces

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = a^2 \frac{32\pi}{3M_p^2} \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (61)$$

Definiendo el parámetro adimensional $\tau^2 = \frac{128\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2\Gamma^2} e^{-\Gamma t} \equiv \tau_0^2 e^{-\Gamma t}$ se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2 a^2. \quad (62)$$

Realizando la sustitución $a^2 = y$, su primera derivada es

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy/dt}{d\tau/dt} = \frac{2a(da/dt)}{-\frac{\Gamma}{2}\tau}, \quad (63)$$

y su segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} &= \frac{(d^2y/dt^2)(d\tau/dt) - (d^2\tau/dt^2)(dy/dt)}{(d\tau/dt)^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right), \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{d\tau^2} &= \frac{(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(-\Gamma\tau/2) - (\Gamma^2\tau/4)2a\dot{a}}{\Gamma^2\tau^2/4} \left(\frac{-2}{\Gamma\tau}\right), \end{aligned} \quad (64)$$

$$(65)$$

en donde $\frac{dt}{d\tau} = \frac{-2}{\Gamma\tau}$. De esta manera se obtiene

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{4}{\Gamma^2\tau^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{\Gamma\tau^2} \frac{dy}{dt}, \quad (66)$$

la cual, despejando $\frac{d^2y}{dt^2}$, conduce a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau}. \quad (67)$$

Al introducir esta expresión en (62), se encuentra una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2y, \quad (68)$$

$$\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \tau \frac{dy}{d\tau} - \tau^2y = 0. \quad (69)$$

Esta ecuación es la de Bessel modificada (Abramowitz & Stegun, 1972; Arfken & Weber, 2005), y su solución es una combinación lineal de funciones de Bessel modificadas de primera especie I_0 y de segunda especie K_0 ²² respectivamente y de orden cero. Entonces la solución del factor de escala viene dada por

$$a^2 = \frac{4}{\Gamma} (\alpha_1 I_0(\tau) + \alpha_2 K_0(\tau)), \quad (70)$$

en donde α_1 y α_2 son constantes.

Al igual que en la Sección 3, se obtiene el parámetro de Hubble a partir de su definición $H = \frac{\dot{a}}{a}$:

$$2a\dot{a} = \frac{4}{\Gamma} (\alpha_1 I_0'(\tau) + \alpha_2 K_0'(\tau)) \frac{d\tau}{dt}, \quad (71)$$

con

$$\frac{dI(\tau)}{dt} = I'(\tau) \left(\frac{-\Gamma\tau}{2}\right), \quad (72)$$

en donde la prima indica la derivada con respecto al parámetro τ . Las derivadas requeridas para las funciones de Bessel modificadas son

$$I_0'(\tau) = I_1(\tau), \quad (73)$$

$$K_0'(\tau) = -K_1(\tau), \quad (74)$$

en donde $I_1(\tau)$ y $K_1(\tau)$ son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie respectivamente y de orden uno. Finalmente, se encuentra que la evolución en el tiempo del parámetro de Hubble viene dada por

$$H = \frac{\Gamma\tau}{4} \left(\frac{\alpha_2 K_1(\tau) - \alpha_1 I_1(\tau)}{\alpha_2 K_0(\tau) + \alpha_1 I_0(\tau)} \right). \quad (75)$$

Las constantes α_1 y α_2 ²³ se determinan a partir de las condiciones iniciales $H(t = 0) = H_b$ y $a(t = 0) = 1$, y sus valores corresponden respectivamente a

$$\alpha_1 = H_b \left[K_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) - K_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (76)$$

²¹Lo interesante de esta ecuación es que depende únicamente de la densidad de energía de vacío al inicio del período inflacionario y de cómo ésta decae en densidad de energía de radiación.

²²Las funciones de Bessel modificadas de primera especie presentan un crecimiento de tipo exponencial mientras que las de segunda especie presentan una atenuación también de tipo exponencial.

²³Observando cuál debe ser el valor de las constantes, se determina que $\alpha_2 \gg \alpha_1$ para que el término $\alpha_2 K_0(\tau)$ de la ecuación (70) domine sobre el otro término de tipo decreciente y proporcione una expansión acelerada. Lo anterior es debido a que $K_0(\tau)$ crece a medida que transcurre el tiempo debido a la relación inversa $\tau = \tau_0 e^{-\Gamma t/2}$.

$$\alpha_2 = H_b \left[I_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) + I_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (77)$$

en donde se ha encontrado que $\tau(t=0) = \tau_0 = \frac{4H_b}{\Gamma}$.

La Figura 3 ilustra la evolución en el tiempo (en el rango $800M_p^{-1} \leq t \leq 2000M_p^{-1}$) del parámetro de expansión para el modelo estudiado. En ella se identifica el final de inflación ($t_e \simeq 1170 M_p^{-1}$) con el inicio de un período que corresponde a $\ddot{a} < 0$.

La Figura 4 presenta la evolución en el tiempo del parámetro de expansión, para los mismos valores de H_b y Γ usados en la construcción de la Figura 3, en los rangos $700M_p^{-1} \leq t \leq 1200M_p^{-1}$ (Figura 4(a)) y $0 \leq t \leq 2M_p^{-1}$ (Figura 4(b)). Se aprecia que el comportamiento del factor de escala es consistente con un período inflacionario primordial. Adicionalmente, se observa según la Figura 4(b), que inflación comienza cuando $a(t=0) = 1$, tal como se había escogido.

Con respecto al parámetro de Hubble, éste disminuye durante inflación (ver Figura 5). Se ha tomado como un ejemplo $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$, y se ha determinado que el valor del parámetro de Hubble al final de inflación corresponde a $H_e \simeq 0,005 M_p$.

4.5. Parámetro de deformación

De manera similar a como se define uno de los parámetros de slow-roll para modelos escalares inflacionarios (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008), se define el parámetro de deformación asociado al modelo de inflación sin inflatones sin ninguna aproximación:

$$\hat{\epsilon}(t) \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{a}/a}{H^2} + 1. \quad (78)$$

Éste es una función dependiente del tiempo debido a la transferencia de energía. Reemplazando la ecuaciones (33) y (34) en la definición anterior se obtiene

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{\rho + 3P}{2\rho} + 1 = \frac{3\rho + 3P}{2\rho}. \quad (79)$$

Sustituyendo las expresiones (36) y (37) se determina el parámetro de deformación

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\rho_r}{\rho_\Lambda + \rho_r}. \quad (80)$$

Otra manera de expresar tal ecuación es multiplicar y dividir por la densidad crítica ρ_c , de tal forma que $\hat{\epsilon}(t)$ ²⁴ queda expresado en términos del parámetro de densidad²⁵; así

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\Omega_r}{\Omega_\Lambda + \Omega_r} = 2\Omega_r. \quad (81)$$

Para obtener una expresión que dé cuenta de la evolución del parámetro de densidad en términos de la densidad de energía de vacío, se despeja de la ecuación de Friedmann para el fondo métrico (Ec. (33))

$$2 = \frac{16\pi}{3M_p^2 H^2} (\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (82)$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + \frac{16\pi\Omega_r\rho_c}{3M_p^2 H^2} = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + 2\Omega_r, \quad (83)$$

en donde se ha hecho uso de la ecuación (7). De (81) y (55) se concluye que

$$\hat{\epsilon}(t) = 2 - \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2 H^2}, \quad (84)$$

y de esta forma se ha obtenido una expresión para la evolución del parámetro de deformación²⁶.

Para el análisis del parámetro de deformación es conveniente dirigir nuestra atención a la ecuación (80) e ignorar por un instante su forma exacta (84). Al inicio de inflación existe sólo una pequeña contribución de la densidad de energía de radiación a la densidad de energía total, de modo que el denominador en (80) está controlado por ρ_Λ . Así, puesto que $\rho_\Lambda \gg \rho_r$, se obtiene que

$$\hat{\epsilon} \ll 1. \quad (85)$$

Inflación termina cuando $\ddot{a} = 0$. De acuerdo a (41), esto ocurre cuando $\rho_\Lambda = \rho_r$, es decir, cuando el parámetro de deformación toma el valor

$$\hat{\epsilon} = 1. \quad (86)$$

Cuando prácticamente “toda” la densidad de energía de vacío es convertida en densidad de energía de radiación, ρ_r controla el denominador y por tanto $\hat{\epsilon} \approx 2$. El Universo en este momento está completamente lleno de radiación gracias a la producción de partículas.

El comportamiento de $\hat{\epsilon}$, de acuerdo al anterior análisis, puede ser visualizado en la Figura 6. Al inicio de inflación se tiene que $\hat{\epsilon} \ll 1$ dado que $\hat{\epsilon} \sim \rho_r$. A medida que transcurre el tiempo la densidad de energía de radiación aumenta debido a la transferencia de energía hasta que domina el contenido energético del Universo, lo cual ocurre cuando $\hat{\epsilon} \approx 2$.

²⁴ $\hat{\epsilon}(t)$ se puede interpretar, según la expresión (81), como una medida de la cantidad de radiación existente en la etapa inflacionaria.

²⁵El parámetro de densidad total cumple con la condición $\Omega_{tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_r = 1$ (c.f. Ec. (8)).

²⁶No hay que olvidar que ahora el parámetro de Hubble evoluciona según la solución (75).

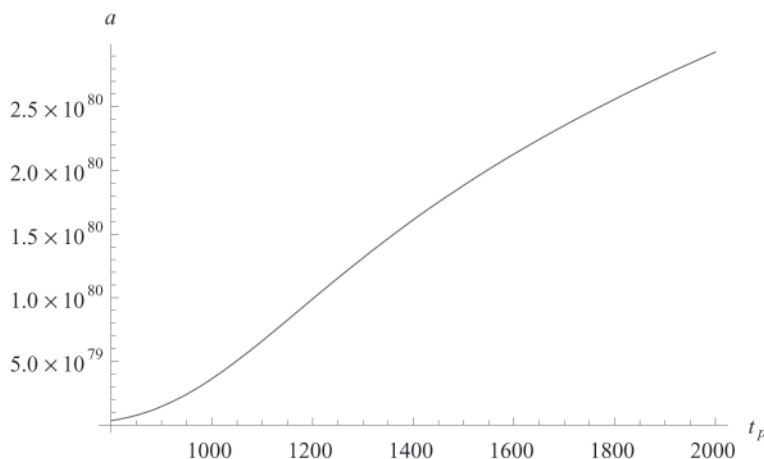


Figura 3: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

El período inflacionario termina justo cuando inicia $\ddot{a} < 0$, es decir en el punto de inflexión. En la construcción de esta gráfica, se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$. Las unidades de tiempo son tales que $t_p = t M_p$ (unidades de tiempo de Planck).

4.6. Parámetro de densidad

La evolución de la densidad de energía de cada componente del fluido relativa a la densidad total se determina a partir de la condición $\Omega_{tot} = \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$. De la ecuación (81) se encuentra que $\Omega_r = \frac{\hat{\epsilon}(t)}{2}$; por lo tanto, $\Omega_\Lambda = 1 - \frac{\hat{\epsilon}(t)}{2}$.

En la Figura 7 se observa que la densidad de energía de vacío decae en densidad de energía de radiación. Cuando $\rho_r = \rho_\Lambda$ se llega al final de inflación, el cual es indicado por la línea horizontal. Sin embargo, el acoplamiento se mantiene hasta que prácticamente toda la densidad de energía de vacío se ha transferido a densidad de energía de radiación con $\Omega_r \simeq 1$, quedando un pequeño remanente de energía de vacío que permanecerá constante.

4.7. Estimativo del monto de inflación

El monto de inflación normalmente es cuantificado por el cociente entre el factor de escala en el tiempo final t_e , y el factor de escala en el tiempo inicial t_b . Dado que este cociente es típicamente una cantidad grande, se toma el logaritmo natural de éste, el cual proporciona el monto de inflación cuantificado en *e-folds* (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008)

$$N(t_e) \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_b)}. \quad (87)$$

Usando la ecuación (84) se encuentra que

$$H^2 = \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2(2 - \hat{\epsilon}(t))}. \quad (88)$$

Por otra parte

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} = \left(\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2(2 - \hat{\epsilon}(t))} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (89)$$

Separando las variables

$$\int \frac{da}{a} = \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \hat{\epsilon}(t)}} dt, \quad (90)$$

y usando $a(t_b = 0) = a_b$ y $a(t)$ como límites de integración, se obtiene

$$N(t) = \ln(a(t)/a_b) = \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \hat{\epsilon}(t)}} dt. \quad (91)$$

Teniendo en cuenta la forma funcional de $\hat{\epsilon}$, esta integral es imposible de ser calculada exactamente por medios analíticos. Sin embargo, dado que $\hat{\epsilon}(t)$ varía ligeramente en el período inflacionario desde $\hat{\epsilon} \ll 1$ hasta máximo $\hat{\epsilon} \approx 1$, haciendo que el denominador de la expresión (91) varíe entre $\sqrt{2}$ y máximo 1, y que $e^{-\Gamma t_b/2} = 1$ mientras que $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$, la mayor variación en el tiempo está asociada con la función exponencial, permitiendo aproximar muy bien la integral en la expresión (91) a la integral únicamente

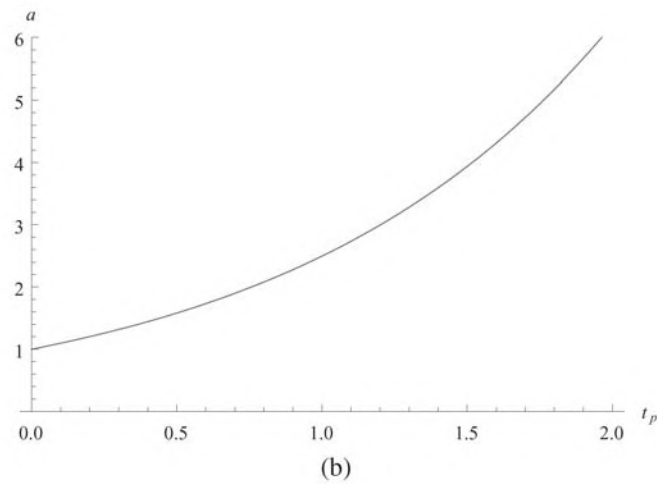
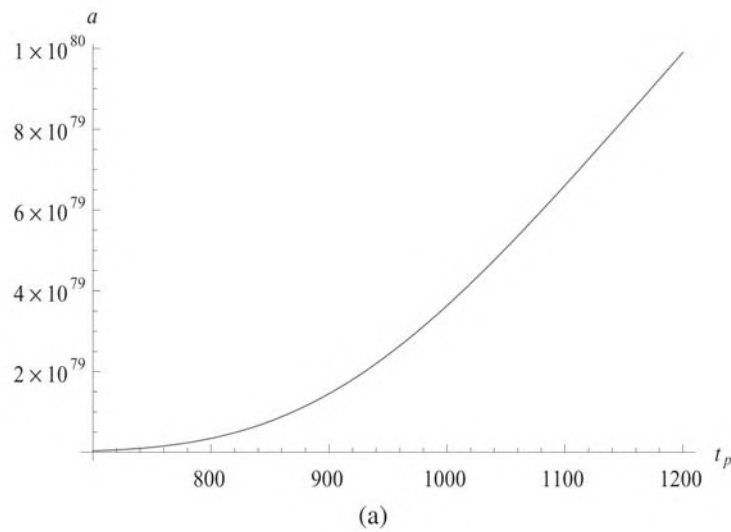


Figura 4: Evolución temporal del factor de escala para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

El comportamiento del factor de escala es consistente con un período inflacionario primordial. (a) Durante inflación se observa un incremento de tipo exponencial en el factor de escala. (b) Para $t = 0$ el factor de escala es igual a 1. En la construcción de estas gráficas se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$. Las unidades de tiempo son tales que $t_p = tM_p$ (unidades de tiempo de Planck).

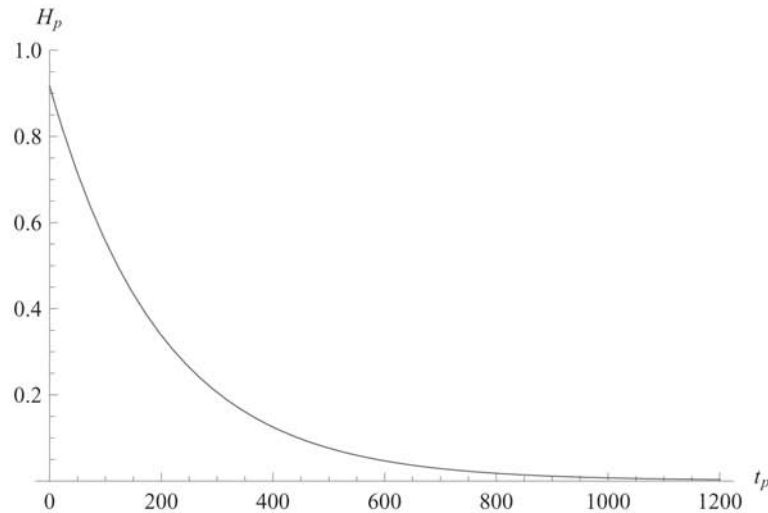


Figura 5: Evolución temporal del parámetro de Hubble para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

Se aprecia que el parámetro de Hubble disminuye durante inflación. Se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$. Las unidades para el parámetro de Hubble y para el tiempo son tales que $H_p = H M_p^{-1}$ (unidades de energía de Planck) y $t_p = t M_p$ (unidades de tiempo de Planck) respectivamente. El valor del parámetro de Hubble al final de inflación corresponde a $H_e \simeq 0,005 M_p$.

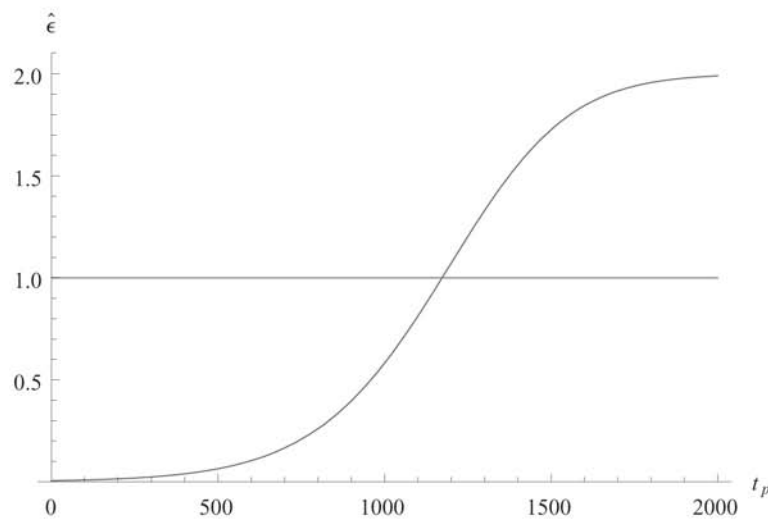


Figura 6: Evolución temporal del parámetro de deformación para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

Al comienzo de inflación, $\hat{\epsilon} \ll 1$ y además es proporcional a ρ_r . A medida que transcurre el período inflacionario, más y más energía de vacío es transferida a energía de radiación a través del acoplamiento Γ . La línea horizontal indica el final de inflación y corresponde a $\hat{\epsilon} = 1$. Se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$. Las unidades de tiempo son tales que $t_p = t M_p$ (unidades de tiempo de Planck).

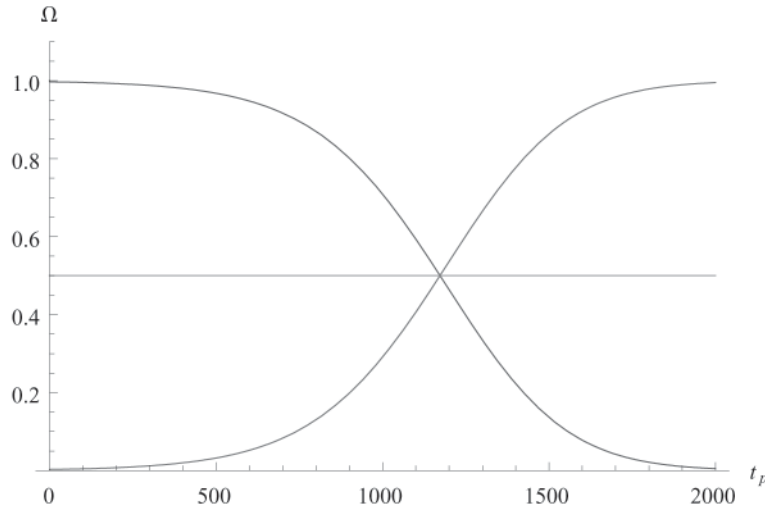


Figura 7: Evolución temporal del parámetro de densidad para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

Al comienzo de inflación, la densidad de energía de vacío domina sobre la densidad de energía total. No obstante, decaerá posteriormente en densidad de energía de radiación. Inflación termina cuando $\rho_\Lambda = \rho_r$, es decir, cuando $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0,5$. La línea roja (línea inferior a la izquierda) representa Ω_r mientras que la azul (línea superior a la izquierda) representa a Ω_Λ . La línea horizontal indica el final de inflación. Para esta gráfica se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$ y $\Gamma = 0,01 M_p$. Las unidades de tiempo son tales que $t_p = t M_p$ (unidades de tiempo de Planck).

sobre la función exponencial:

$$\begin{aligned}
 N(t) &\approx \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{2}{\Gamma} \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2-\epsilon(t)}} \right] \Bigg|_0^t \\
 &\approx \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1 - e^{-\Gamma t/2}), \quad (92) \\
 \Rightarrow N(t_e) &\sim \frac{8\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}{M_p \Gamma}. \quad (93)
 \end{aligned}$$

De la ecuación de Friedmann (c.f. Ec. (33)) evaluada al inicio de inflación se tiene que

$$H_b = \frac{\sqrt{8\pi\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}}{\sqrt{3}M_p}, \quad (94)$$

con lo cual se puede despejar $\rho_{\Lambda 0}^{1/2}$ y sustituir este resultado en (93). Así,

$$N \sim \sqrt{8} \frac{H_b}{\Gamma}. \quad (95)$$

Como un ejemplo, se puede considerar la escala de inflación²⁷ cerca a la escala de la masa de Planck, de modo que

$H_b \sim M_p$ GeV. Para resolver los problemas de horizonte, planitud, y de reliquias no deseadas, se requiere que $N \geq 62$ e-folds (Lyth & Liddle, 2009). Entonces, para conseguir un período inflacionario adecuado, el valor de la razón de decaimiento Γ debe estar ligeramente por debajo de la escala de Hubble al inicio de inflación. De este modo, $\Gamma \lesssim 0,04 M_p$.

En la Figura 8 se presenta el monto de inflación N , calculado a partir de $N(t) = \ln(a(t)/a_b)$ y de la expresión (70), en función del tiempo para diferentes valores de Γ . Antes de que termine inflación ($t = t_e$) cada acoplamiento Γ debe proporcionar una cantidad de e-folds adecuada, de modo que se pueda resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar. La línea horizontal indica la cantidad de e-folds que se debe producir antes de que inflación termine ($N \geq 62$). De lo anterior, se observa la restricción $\Gamma \leq 0,03 M_p$, siendo consistente con el valor obtenido después de la ecuación (95) para obtener el estimativo del monto de inflación.

²⁷La escala de inflación es de hecho desconocida. Sin embargo, debe ser consistente con la razón tensor-escalar debido a que la amplitud de las ondas gravitacionales primordiales generadas es proporcional a dicha escala (Dodson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

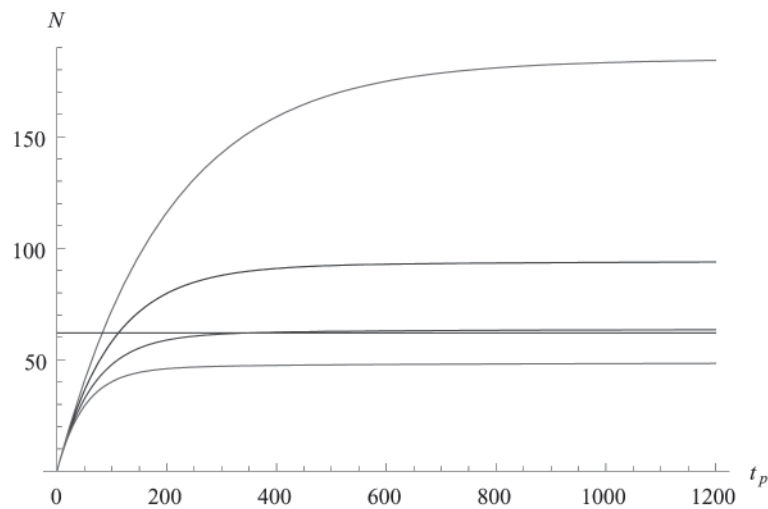


Figura 8: Monto de inflación en función del tiempo para un universo compuesto por dos fluidos interactuantes: vacío y radiación

En esta gráfica se presenta el monto de inflación en función del tiempo para diferentes valores de Γ . De arriba a abajo: $\Gamma = 0,01, 0,02, 0,03, 0,04$ en unidades de masa de Planck. Cuanto mayor es el acoplamiento Γ , más rápido termina inflación con $t_e \approx 1170, 520, 320, 224$ en unidades de tiempo de Planck para los respectivos valores de Γ . La línea horizontal representa el monto mínimo requerido para solucionar los problemas de horizonte, planitud, y reliquias no deseadas, $N = 62$. Las curvas por encima de esta línea corresponden a modelos inflacionarios que resuelven adecuadamente estos problemas. En la construcción de esta gráfica, se ha tomado $H_b = 0,916 M_p$. Las unidades de tiempo son tales que $t_p = tM_p$ (unidades de tiempo de Planck).

4.8. Temperatura post-inflacionaria

Al final de inflación gran parte de la energía de vacío ha sido convertida en energía de radiación. Para este punto crucial de la historia del Universo se tiene una temperatura, la cual es característica según el modelo en consideración, denominada temperatura post-inflacionaria²⁸ T_r en la cual $\rho_r = \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t_r}$. De la ley de Stephan-Boltzman se obtiene una relación para la densidad de energía de radiación y la temperatura $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_r) T^4$ (Lyth & Liddle, 2009) en donde $g_*(T_r)$ es el número de grados de libertad internos de la colección de partículas elementales que se tiene según el modelo de física de partículas que se considere²⁹. Así

$$T_r = \left[\frac{30}{\pi^2} \frac{1}{g_*(T_r)} \rho_{\Lambda 0} \right]^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (96)$$

$$\Rightarrow T_r = 0,4 \rho_{\Lambda 0}^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (97)$$

en donde se ha obtenido una expresión para la temperatura post-inflacionaria en términos de la densidad de energía de vacío inicial y la razón de decaimiento³⁰.

Otra relación de utilidad es la ecuación de Friedmann al inicio de inflación

$$H_b^2 = \frac{8\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2}, \quad (98)$$

de aquí que

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/4} (M_p H_b)^{1/2}. \quad (99)$$

Si se considera la escala de Hubble inicial $H_b \simeq 10^{19}$ GeV, entonces

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \approx 0,58 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (100)$$

En el estimativo del monto de inflación se observó que $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$, lo cual implica que $e^{-\Gamma t_e/2} \lesssim 10^{-2}$, es decir, que esté al menos dos órdenes de magnitud por debajo de uno. De aquí que $\Gamma t_r \gtrsim 9,21$. Reemplazando este valor y el de $\rho_{\Lambda 0}^{1/4}$ en la ecuación (97), se determina la temperatura post-inflacionaria para este modelo en particular

$$T_r \lesssim 10^{17} \text{ GeV}. \quad (101)$$

A partir del momento en que inflación termina, la radiación comienza a dominar, dando lugar a la época dominada por la radiación (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

5. Conclusiones

En este trabajo se estudió la dinámica de un modelo cosmológico para la evolución de nuestro Universo primordial (Watson, Perry, Kane & Adams, 2007), sin presencia de campos escalares, y se verificó que este modelo puede generar un período de expansión acelerada cuando se considera transferencia de energía de vacío a radiación. Dicha expansión se ve reflejada en la solución analítica del factor de escala $a(t)$. Adicionalmente, se determinó que este modelo puede generar una cantidad de e-folds necesaria para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar con $N \geq 62$. De igual forma, se encontró que este modelo puede proporcionar una temperatura al final de inflación $T_r \lesssim 10^{17}$ GeV. Esta temperatura es consistente con el proceso de nucleosíntesis, para el cual la temperatura es $T_N \sim 1$ MeV, es decir, inflación ocurre mucho antes que este período de tal forma que no interfiere con la producción de elementos ligeros (uno de los pilares observacionales del modelo estándar del Big Bang caliente). De esta manera, los valores encontrados anteriormente para cada una de las cantidades del modelo en cuestión son consistentes con un período inflacionario primordial (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Bajo las condiciones requeridas en los cálculos previos, se determinaron los valores de los parámetros correspondientes para este modelo:

Razón de decaimiento $\Gamma \lesssim 0,03 M_p$,

Escala de Hubble al inicio de inflación $H_b \simeq M_p$,

Escala de Hubble al final de inflación $H_e \simeq 0,005 M_p$,

Densidad de energía de vacío al inicio de inflación $\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \simeq 0,58 \times 10^{19}$ GeV.

Así, se determinó la viabilidad de un mecanismo alternativo de expansión acelerada para el Universo primitivo sin recurrir a campos escalares fundamentales (tales como el inflatón) como elementos indispensables en la construcción de escenarios inflacionarios.

²⁸Esta temperatura es análoga a la temperatura de recalentamiento para modelos escalares inflacionarios del tipo slow-roll (Dodelson, 2003; Lyth & Liddle, 2009; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

²⁹Para el caso de interés, se tomará el modelo estándar de partículas elementales con $g_*(T_r) = 106,75$ (Lyth & Liddle, 2009).

³⁰La ley de Stephan-Boltzman es válida en tanto haya equilibrio termodinámico local, lo cual no es estrictamente cierto en el modelo en consideración en donde los dos fluidos, el de vacío y el de radiación, están interactuando mutuamente. Sin embargo, y debido a que el cálculo de la temperatura se está realizando al final de inflación, se puede asumir con buena aproximación (véase las ecuaciones (45), (46), y (55)) que la interacción entre los fluidos para ese entonces es lo suficientemente débil de tal manera que la ley de Stephan-Boltzman brinda un valor correcto para T_r .

Agradecimientos: Y.R. cuenta con el apoyo financiero de COLCIENCIAS mediante proyecto de investigación número 1102-487-25992 CT-460-2009, y de la DIF (UIS) mediante proyecto de investigación número 5177.

Referencias

- Abbott L. F.**, 1985. A Mechanism for Reducing the Value of the Cosmological Constant, *Phys. Lett. B* **150**, 427.
- Abramowitz M. & Stegun I.**, 1972. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, USA.
- Arfken G.B. & Weber H.J.**, 2005. *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, London, UK.
- Berera A., Moss I. G. & Ramos R. O.**, 2009. Warm Inflation and its Microphysical Basis, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 026901.
- Dimopoulos K., Karčiauskas M., Lyth D.H. & Rodríguez Y.**, 2009. Statistical Anisotropy of the Curvature Perturbation from Vector Field Perturbations, *JCAP* **0905**, 013.
- Dodson S.**, 2003. *Modern Cosmology*, Elsevier Academic Press, London, UK.
- Freese K., Liu J. T. & Spolyar D.**, 2005. Inflating with the QCD Axion, *Phys. Rev. D* **72**, 123521.
- Freese K. & Spolyar D.**, 2005. Chain Inflation: Bubble Bubble Toil and Trouble, *JCAP* **0507**, 007.
- Golovnev A., Mukhanov V. & Vanchurin V.**, 2008. Vector Inflation, *JCAP* **0806**, 009.
- Guth A.**, 1981. Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon and Flatness Problems, *Phys. Rev. D* **23**, 347.
- Kane G.**, 1993. *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Redwood City, USA.
- Komatsu E. et. al.**, 2011. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192**, 18.
- Lyth D.H. & Liddle A.R.**, 2009. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation, and the Origin of Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Malik K.A. & Wands D.**, 2009. Cosmological Perturbations, *Phys. Rep.* **475**, 1.
- Mukhanov V.F.**, 2005. *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Polchinski J.**, 1998. *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Watson S., Perry M.J., Kane G.L. & Adams F.C.**, 2007. Inflation Without Inflation(s), *JCAP* **0711**, 017.
- Weinberg S.**, 1972. *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, USA.
- Weinberg S.**, 2008. *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- Witten E.**, 1984. Cosmic Separation of Phases, *Phys. Rev. D* **30**, 272.

Recibido: noviembre 9 de 2010.

Aceptado para su publicación: octubre 30 de 2010.