DESCOMPOSICIÓN MÍMIMA DE UN AUTOMORFISMO

A. R. Moyano, R. M. Rubio[1]

Resumen

Moyano, A. R., R. M. Rubio: Descomposición mínima de un automorfismo. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **35** (137): 485-490, 2011. ISSN 0370-3908.

Es bien conocido que todo automorfismo unimodular de un espacio vectorial puede descomponerse como un producto de transvecciones. En este trabajo depuramos la cantidad mínima de transvecciones que permiten tal descomposición.

Palabras clave: espacio vectorial, automorfismo, transvección.

Abstract

It is well-known that every unimodular automorphim of a vector space can be expressed as a product of transvections. In this work, we deal with the necessary minimal number of transvections for to give this product.

Key words: vector space, automorphim, transvection.

1. Introducción

Todo automorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita $n \geq 2$ puede descomponerse en una cantidad finita de homologías automorfismos con un hiperplano de vectores dobles). Si su determinante es igual a μ, se descompone en una deformación de razon μ, seguida de una transformación unimodular (automorfismo de determinante unidad) (ver [1]). En lo que sigue trataremos un método geométrico que nos permitirá establecer la cantidad mínima de transvecciones necesaria en la descomposición de todo automorfismo unimodular.

1 Departamento de Matemáticas, Campus de Rabanales, Universidad de Córdoba, 14071 Córdoba, Spain. Correos electrónicos: ma1rimoa@uco.es, rmrubio@uco.es.

AMS Classification 2010: 15A04, 15A21.

Para las definiciones básicas de los conceptos que aparecen en este trabajo se puede consultar la referencia [1].

2. Descomposición de un automorfismo

Proposición 2.1. *Sea f un automorfismo con determinante μ. Entonces, f se descompone en una transformación unimodular seguida de un deslizamiento oblícuo de razón μ.*

Demostración. Sea $g = k \circ f$, donde k es un deslizamiento de razón $\mu^{-1}y$ sea $h = k^{-1}$. Entonces, $f = h \circ g$, donde g es unimodular porque $\det(g) = \det(k)\det(f) = \mu^{-1}\mu = 1$, mientras que h es un deslizamiento de razón $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$. Si $\mu = 1$, directamente f es unimodular. En general, la descomposición de f se reduce a la descomposición de automorfismos unimodulares. Éstos, lo harán en deslizamientos de razón 1, es decir, en transvecciones. □

3. Composición de transvecciones

Proposición 3.1. *Sea $\mathbf{V}$ de dimensión $n \geq 2$. Sea f una transformación unimodular descompuesta en m transvecciones. Si $\mathbf{D}$ es el subespacio de vectores fijos de f, se cumple que* $\dim(\mathbf{D}) \geq n$ - m.

Demostración. Supongamos que $f = t_m \circ \ldots \circ t_2 \circ t_1$, donde cada t_j, con ecuación $t_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tau_j(\mathbf{x})\mathbf{d}_j$ es una transvección. Entonces, $\mathrm{Ker}\,(t_j - I) = \mathrm{Ker}\ \tau_j$, y se tiene

$$\cap_{j=1}^{m}\mathrm{Ker}\ \tau_j = \cap_{j=1}^{m}\mathrm{Ker}\,(t_j - I) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f - I) = \mathbf{D}.$$

Ahora bien, siendo $r = \mathrm{rang}\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$, sabemos que $\dim(\cap_{j=1}^{m}\mathrm{Ker}\ \tau_j) = n - r$, y, puesto que $r \leq m$, concluimos que $n - m \leq n - r \leq \dim(\mathbf{D})$. □

Obsérvese que esta fórmula tiene dos lecturas:

a) Si el dato es m, da el número $n - m$ como valor mínimo para la dimensión de $\mathbf{D}$. Por ejemplo, al componer $n-1$ transvecciones, sale una transformación que tiene al menos una recta de vectores fijos.

b) Pero, si $\dim(\mathbf{D})$ es conocida, nos dice que $n - \dim(\mathbf{D})$ es la cantidad mínima de transvecciones necesarias para poder descomponer f.

Por ejemplo, si f carece de vectores dobles no nulos, harán falta al menos n transvecciones. Este es el caso de las homotecias unimodulares de razón $\lambda \neq 1$. Para ellas, podemos matizar más aún:

Proposición 3.2. *Una homotecia unimodular no idéntica se descompone como mínimo en $n+1$ transvecciones.*

Demostración. Como f carece de vectores dobles no nulos, se descompone como mínimo en n transvecciones. Supongamos ahora que $f = t_n \circ t_{n-1} \circ \ldots \circ t_2 \circ t_1$ donde cada t_j es una transvección. Puesto que el subespacio de vectores dobles de $t_{n-1} \circ \ldots \circ t_2 \circ t_1$ es al menos unidimensional, siempre podemos tomar un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en él. Cumplirá que $f(\mathbf{u}) = t_n((t_{n-1} \circ \ldots \circ t_2 \circ t_1)(\mathbf{u})) = t_n(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \tau_n(\mathbf{u})\mathbf{d}_n$.

Si f fuese una homotecia de razón $\lambda \neq 1$, se tendría

$$\omega\mathbf{u} = \mathbf{u} + \tau_n(\mathbf{u})\mathbf{d}_n \Rightarrow$$
$$\mathbf{u} = \frac{\tau_n(\mathbf{u})}{\lambda - 1}\mathbf{d}_n \Rightarrow \mathbf{u} \in < \mathbf{d}_n >$$
$$\Rightarrow \tau_n(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

lo que contradice la elección de $\mathbf{u}$. Por tanto, es imposible que f se descomponga en n transvecciones, siendo precisas al menos $n+1$. □

4. Descomposición en dimensión 2

Proposición 4.1. *Si f es una transformación de determinante 1 en un plano vectorial $\mathbf{V}$, f se descompone a lo sumo en dos transvecciones salvo que f sea una homotecia de razón $\lambda \neq 1$, en cuyo caso hacen falta tres.*

Demostración. Sea $\mathbf{D} = \mathrm{Ker}\,(f - I)$ el subespacio de vectores dobles. Según su dimensión, se presentan tres posibilidades:

a) $\dim(\mathbf{D}) = 2$. En este caso, $f = I$, que siempre se descompone en dos transvecciones: una arbitraria y su inversa.

b) $\dim(\mathbf{D}) = 1$. Como $\mathbf{D}$ es un hiperplano, la propia f es ya una transvección.

c) $\dim(\mathbf{D}) = 0$. Distingamos aquí dos opciones:

1) f no es una homotecia. Entonces, existe al menos una recta que no es f–invariante, es decir, existe al menos un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$ son linealmente independientes. Al formar una base de $\mathbf{V}$, podemos determinar una forma lineal σ tal que $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v}) = 1$, y con ella construir la transvección $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \sigma(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, en la cual $s(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \Rightarrow (s \circ f)(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. De aquí se concluye que la recta $< \mathbf{u} >$ es de vectores dobles para la transformación $t_1 = s \circ f$,

con lo que t_1 es una transvección. Siendo, finalmente, $t_2 = s^{-1}$, queda $f = t_2 \circ t_1$, es decir, f se descompone en dos transvecciones.

2) f es una homotecia (no idéntica). Tratándose de un plano vectorial, la única opción que queda es la de $f = -I \Leftrightarrow f(x, y) = (-x, -y)$. Siendo s la transvección $s(x, y) = (x, y) + y(1, 0) = (x + y, y)$, se cumple que $(s \circ f)(x, y) = (-x - y, -y)$ es un transformación unimodular no homotética, donde por ejemplo

$$(0, 1) \mapsto (-1, -1),$$

que no es proporcional a $(0, 1)$. Por otro lado, el sistema de vectores dobles es

$$x = -x - y, y = -y \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Aplicando el caso anterior, existen dos transvecciones t_1, t_2 tales que $s \circ f = t_2 \circ t_1$. Poniendo $t_3 = s^{-1}$, quedará finalmente $f = t_3 \circ t_2 \circ t_1$. Que esta transformación no puede obtenerse con dos transvecciones se sigue de la proposición 3.2. $\square$

Después de este resultado, en lo sucesivo, supondremos que $n \geq 3$.

5. Teorema de Dieudonné

Proposición 5.1. *Sea* $\mathbf{V}$ *de dimensión* $n \geq 3$. *Sea* f *un automorfismo no homotético. Se afirma que existen dos vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{w}$ *tales que* $\mathbf{u}, \mathbf{v} = f(\mathbf{u}), \mathbf{w}$, *son linealmente independientes y, además,* $f(\mathbf{w}) \notin < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$.

Demostración. Por ser no homotético, existe al menos un $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $f(\mathbf{u}) \notin < \mathbf{u} >$. Tomando $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$, la pareja $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ será libre. Puesto que $\dim(\mathbf{V}) \geq 3$, siempre existirán vectores $\mathbf{x}$ fuera de $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$. En el caso en que $f(\mathbf{x}) \notin < \mathbf{v}, \mathbf{x} >$, tomamos $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ y el lema queda demostrado. Por el contrario, si $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{x} \in < \mathbf{v}, \mathbf{x} >$, tomamos $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{x}$, que sigue siendo independiente con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y para el cual se cumple

$$f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + a\mathbf{v} + b\mathbf{x} = -b\mathbf{u} + (1+a)\mathbf{v} + b\mathbf{w}.$$

Si $b = 0$, tendremos que

$$f(\mathbf{w}) = (1+a)\mathbf{v} = (1+a)f(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{w} = (1+a)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = a\mathbf{u},$$

lo que contradice la elección de $\mathbf{x}$. Siendo, pues, $b \neq 0$, es claro que $f(\mathbf{w}) \notin < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$. $\square$

Proposición 5.2. *Sea* $\mathbf{V}$ *de dimensión* $n \geq 3$. *Sea* f *un automorfismo unimodular no homotético. Entonces,* f *se descompone en otro automorfismo unimodular no homotético* g, *con al menos una recta de vectores dobles, seguido de una trasvección* t.

Demostración. Tomando dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ como los del teorema anterior, por ser independientes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, puede determinarse una forma τ tal que $\tau(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v}) = 1, \tau(\mathbf{w}) = 0$ y con ella construir la transvección t de ley $t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tau(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, la cual cumple $t(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, t(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Entonces, $g = t \circ f$ vuelve a ser unimodular y tiene una recta de vectores dobles porque $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Además, no puede ser $g(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w}$, pues entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}) &= t^{-1}(g(\mathbf{w})) = t^{-1}(\lambda\mathbf{w}) \\ &= \lambda t^{-1}(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w} \in < \mathbf{w} > \subseteq < \mathbf{v}, \mathbf{w} > \end{aligned}$$

contradice la elección de $\mathbf{w}$. Por tanto, g no es una homotecia. $\square$

Proposición 5.3. *Con las hipótesis del resultado previo se concluye que los vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ *y* $g(\mathbf{w})$ *son independientes.*

Demostración. Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ lo son, basta ver que $g(\mathbf{w})$ no es combinación lineal de estos vectores. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{w} \Rightarrow f(\mathbf{w}) &= t^{-1}(g(\mathbf{w})) \\ &= at^{-1}(\mathbf{u}) + bt^{-1}(\mathbf{w}) = a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in < \mathbf{v}, \mathbf{w} >, \end{aligned}$$

en contra de la elección de $\mathbf{w}$. $\square$

Proposición 5.4. *Sea* $\mathbf{V}$ *de dimensión* $n \geq 3$. *Si* f *es una transformación unimodular no homotética de* $\mathbf{V}$, *siempre es posible descomponerla en una cantidad de transvecciones igual a* n.

Demostración. Tomando tres vectores independientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2$ tales que

$\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2) \notin < \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 >$, construímos una transvección t_1 y un automorfismo unimodular no homotético f_1 de manera que $f = t_1 \circ f_1, f_1(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$. Abrimos dos alternativas:

a) Si $n - 1 = 2 (n = 3)$, determinamos una forma τ_2 tal que $\tau_2(\mathbf{u}_1) = 0, \tau_2(\mathbf{u}_2) = \tau_2(f_1(\mathbf{u}_2)) = 1$, y construimos la transvección $t_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tau_2(\mathbf{x})(\mathbf{u}_2 - f_1(\mathbf{u}_2))$ en la cual se cumple que $t_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, t_2(f_1(\mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_2$. A continuación, consideramos $f_2 = t_2 \circ f_1 = t_2 \circ t_1 \circ f$, y se observa que $f_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, f_2(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$. De aquí se sigue que el plano $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ es de vectores dobles para f_2, luego f_2 es una transvección. Así, f se despeja como composición de tres transvecciones y el teorema queda probado.

b) $n-1 \geq 3$. Tomemos, ahora, un complemento $\mathbf{V}_1$ de la recta $< \mathbf{u}_1 >$, que incluya a los vectores $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v}_2 = f_1(\mathbf{u}_2)$. Como en la proposición 5.1, en $\mathbf{V}_1$ hay un vector $\mathbf{u}_3$ tal que $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_3$ sean independientes y, además, $f_1(\mathbf{u}_3) \notin < \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 >$. Determinamos, entonces, una forma τ_2 tal que $\tau_2(\mathbf{u}_1) = \tau_2(\mathbf{u}_3) = 0, \tau_2(\mathbf{u}_2) = \tau_2(\mathbf{v}_2) = 1$, y con ella la transvección $t_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tau_2(\mathbf{x})(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2)$ y el nuevo automorfismo $f_2 = t_2 \circ f_1$, en el cual $f_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, f_2(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$. Como en la proposición 06, f_2 no es homotético, pues al menos $\mathbf{u}_3$ es independiente de su imagen. En efecto, si fuese $f_2(\mathbf{u}_3) = \lambda \mathbf{u}_3$, se tendría

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{u}_3) &= t_2^{-1}(f_2(\mathbf{u}_3) = t_2^{-1}(\lambda \mathbf{u}_3) \\ &= \lambda t_2^{-1}(\mathbf{u}_3) = \lambda \mathbf{u}_3 \in < \mathbf{u}_3 > \\ &\subseteq < \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 >, \end{aligned}$$

lo que contradice la elección de $\mathbf{u}_3$. Además, como en la proposición 5.3, los vectores $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ y $f_2(\mathbf{u}_3)$ son independientes: como $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ lo son, basta ver que $f_2(\mathbf{u}_3)$ no es combinación lineal de estos vectores. En efecto,

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{u}_3) &= a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 \\ &\Rightarrow f_1(\mathbf{u}_3) = t_2^{-1}(f_2(\mathbf{u}_3)) \\ &= t_2^{-1}(a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) \\ &= a_2 t_2^{-1}(\mathbf{u}_2) + a_3 t_2^{-1}(\mathbf{u}_3) \\ &= a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{u}_3 \in < \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 >, \end{aligned}$$

en contra de la elección de $\mathbf{u}_3$. Abrimos de nuevo dos alternativas:

i) Si $n-2 = 2 (n = 4)$, determinamos una forma σ_3 tal que $\sigma_3(\mathbf{u}_1) = \sigma_3(\mathbf{u}_2) = 0, \sigma_3(\mathbf{u}_3) = \sigma_3(f_2(\mathbf{u}_3) = 1$ y construimos la transvección $t_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \sigma_3(\mathbf{x})(\mathbf{u}_3 - f_2(\mathbf{u}_3))$ en la cual se cumple $t_3(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, t_3(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, t_3(f_2(\mathbf{u}_3)) = \mathbf{u}_3$. A continuación, consideramos $f_3 = t_3 \circ f_2 = t_3 \circ t_2 \circ f_1 = t_3 \circ t_2 \circ t_1 \circ f$, y se observa que $f_3(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, f_3(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2, f_3(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3$. De aquí se sigue que el subespacio $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 >$ es de vectores dobles para f_3, luego f_3 es una transvección. Así, f se despeja como composición de cuatro transvecciones y el teorema queda probado.

ii) Si $n-2 \geq 3$, tomamos un complemento $\mathbf{V}_2$ del plano $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ que incluya a los vectores $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{v}_3 = f_2(\mathbf{u}_3)$ y reiteramos el procedimiento. Esto es: se busca $\mathbf{u}_4 \in \mathbf{V}_2$ tal que $\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4$ sean independientes y, además, $f_2(\mathbf{u}_4) \notin < \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4 >$; se construye una forma τ_3 tal que $\tau_3(\mathbf{u}_1) = \tau_3(\mathbf{u}_2) = \tau_3(\mathbf{u}_4) = 0, \tau_3(\mathbf{u}_3) = \tau_2(\mathbf{v}_3) = 1$, y las transformaciones $t_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tau_3(\mathbf{x})(\mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_3), f_3(\mathbf{x}) = t_3 \circ f_2$, resultando que f_3 es unimodular no homotética con el espacio tridimensional $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 >$ de vectores dobles, etcétera, etcétera.

Se comprende que en n pasos, la proposición concluye. □

Este resultado puede mejorarse en el sentido de descomponer, según cada caso, f en menos de n transvecciones. Hay un caso en que no:

Proposición 5.5. *Sea* $\mathbf{V}$ *de dimensión* $n \geq 3$. *Una transformación unimodular* f *no homotética y carente de vectores dobles, se descompone en* n *transvecciones y no es posible descomponerla en menos.*

Demostración. Es consecuencia direscta de las proposiciones 5.4 y 3.1. □

Proposición 5.6. *Una homotecia* $f = \lambda I$, *con* $\lambda \neq 1$, *se descompone en* $n+1$ *transvecciones y no es posible descomponerla en menos.*

Demostración. Considerando la transvección $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + x_n\mathbf{e}_{n-1}$, sea $g = s \circ f$. Entonces, g sigue siendo unimodular. Además,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= (s \circ f)(\mathbf{x}) = s(f(\mathbf{x})) = s(\lambda \mathbf{x}) \\ &= \lambda s(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x} + x_n\mathbf{e}_{n-1}), \end{aligned}$$

$$g(\mathbf{e}_i) = \lambda \mathbf{e}_i, i = 1, 2, \ldots, n-1, g(\mathbf{e}_n) = \lambda(\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n).$$

El último vector no es proporcional a sí mismo, luego g no es una homotecia. El único autovalor de g sigue siendo λ, luego g carece de vectores dobles no nulos. Como g se descompone en n transvecciones, f lo hará en $n+1$. Que no es posible en menos se probó en 3.2. □

6. Transformaciones con la unidad como único autovalor

Proposición 6.1. *Sea* $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ *una descomposición donde* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{W}$ *sean propios. Si* s *es una transvección de* $\mathbf{U}$, *se extiende a otra* t *de* $\mathbf{V}$, *de manera que su restricción a* $\mathbf{W}$ *sea la idéntidad.*

Demostración. Sean $n = \dim(\mathbf{V}), r = \dim(\mathbf{U})$. Tomamos una base $\{\mathbf{u}_i; \mathbf{w}_j\}$ de $\mathbf{V}$ uniendo una de cada sumando directo. Si B es la matriz de s en la base $\{\mathbf{u}_i\}$, basta construir t mediante la matriz

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

en la base unión. Si s fijaba a $r-1$ vectores independientes de $\mathbf{U}$, es claro que t fija a esos mismos más los $n-r$ de la base de $\mathbf{W}$, es decir, fija $n-1$ vectores independientes de $\mathbf{V}$. Por ello, y porque $\det(t) = \det(s) = 1$, t es una transvección. □

Proposición 6.2. *Sea* $\mathbf{V}$ *de dimensión* $n \geq 3$ *y supóngase* $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, *donde* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{W}$ *son* f*-invariantes y* $\dim(\mathbf{U}) \geq 2$. *Sea* t *una transvección cuyo espejo incluya a* $\mathbf{W}$. *Entonces, la restricción de* $t \circ f$ *a* $\mathbf{W}$ *coincide con* f.

Demostración. En efecto, si $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, también $f(\mathbf{w}) \in \mathbf{W}$ porque $\mathbf{W}$ es f- invariante. Como $\mathbf{W}$ está en el espejo de t, se tiene $t(f(\mathbf{w})) = f(\mathbf{w})$. En particular, si t procede por extensión de una transvección en uno de los sumandos directos, al componerla con f, los vectores del otro sumando directo se siguen transformando como en f. □

En particular, si t procede por extensión de una transvección en uno de los sumandos directos, al componerla con f, los vectores del otro sumando directo se siguen transformando como en f.

Proposición 6.3. *Sea* f *una transformación unimodular tal que*

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - 1)^n, \dim(\operatorname{Ker}(f - I)) = 1.$$

Entonces, f *se descompone en* $n-1$ *transvecciones.*

Demostración. Bajo estas hipótesis sabemos que la matriz canónica de Jordan consta de un único bloque (celular). Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es la base en que f alcanza dicha matriz, consideremos las $n-1$ transvecciones

$$t_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + x_2\mathbf{v}_1, t_2 = \mathbf{x} + x_3\mathbf{v}_2, \ldots, t_{n-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + x_n\mathbf{v}_{n-1}$$

y sea $g = t_{n-1} \circ \ldots \circ t_2 \circ t_1$. Puesto que $g(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \ldots, g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, se sigue que $g = f$ y el resultado queda probado. □

Proposición 6.4. *Sea* f *una transformación unimodular tal que*

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - 1)^n, \quad \dim(\operatorname{Ker}(f - I)) = r \geq 1.$$

Entonces, f *se descompone en* $n-r$ *transvecciones.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ la base en que f alcanza su matriz canónica de Jordan, la cual estará formada por r bloques celulares de dimensiones $d_1, d_2, \ldots, d_r$. En cada uno aplicamos el teorema anterior y obtendremos

$$(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \ldots + (d_r - 1) = n - r$$

transvecciones. Como en la proposición 6.1, cada una de ellas se extiende a todo $\mathbf{V}$. Teniendo en cuenta la proposición 6.2, la composición de todas ellas conduce a f. □

Como resumen de nuestros resultados podemos observar:

Sea f una transformación unimodular de un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión finita $n \geq 3$. Supongamos que

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - 1)^s \mathcal{D}(\xi), \text{ con } \mathcal{D}(1) \neq 0, r = \dim(\operatorname{Ker}(f - I)).$$

Hay dos casos extremos:

a) $s = n \Leftrightarrow \mathcal{D}(\xi) = 1$. En este caso f se descompone en $n-r$ transvecciones y no es posible descomponerla en menos (proposiciones 6.4 y 3.1).

b) $s = 0$. Ahora f se descompone en n transvecciones si f no es una homotecia y en $n+1$ si es una homotecia no idéntica (proposiciones 5.5 y 5.6). Exceptuados tales casos (es decir, asumiendo que $0 < s < n$), tendremos la descomposición directa

$$\mathbf{V} = \operatorname{Ker}(f - I)^s \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{D}(f)).$$

La restricción de f a $\operatorname{Ker}(f - I)^s$ se descompone en $s-r$ transvecciones, las cuales se extienden a transvecciones de $\mathbf{V}$ según el modelo de la proposición 6.1. Su consideración no afecta a los vectores del otro sumando directo (proposición 6.2) porque sus espejos lo incluyen. En cuanto a este segundo sumando directo, la restricción de f carece de vectores dobles no nulos, luego se descompone en $n-s$, o bien en $n-s+1$, transvecciones según sea homotecia o no. También estas se extienden a todo $\mathbf{V}$ según la proposición 6.1 y se recuerda que no afectan al primer sumando de acuerdo con la proposición 6.2. Así, f se descompone en

$$(s - r) + (n - s + \epsilon) = n - r + \epsilon,$$

donde $\epsilon = 0, 1$ según el caso.

Las proposiciones 3.1 y 3.2 no permiten descomposiciones en menores cantidades. Esta fórmula abarca los casos extremos ya comentados. Por tanto, llegamos a nuestro teorema final:

Theorem 6.5. *Sea f una transformación unimodular de un espacio* $\mathbf{V}$ *de dimensión finita $n \geq 3$. Supongamos que*

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - 1)^s \mathcal{D}(\xi), \ \text{con } \mathcal{D}(1) \neq 0, r = \dim(\operatorname{Ker}(f - I)).$$

Entonces, f se descompone en $n - r + \epsilon$ transvecciones, donde $\epsilon = 0$ si la restricción de f a $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}(f))$ no es homotecia y $\epsilon = 1$ si lo fuese. En cada caso, la descomposición no puede serlo en una cantidad menor que la dicha.

Referencias

[1] **M. Suzuki**, *Group Theory*, Springer-Verlag (1982).

Recibido el 5 de julio de 2011

Aceptado para su publicación el 24 de noviembre de 2011