

# CIMENTACIÓN DE LA FÓRMULA EMPÍRICA DE ÅNGSTRÖM REFERENTE A LA RADIACIÓN ATMOSFÉRICA EN SUPERFICIE

*A la memoria de Jesús A. Eslava Ramírez,  
quien con celo patrio impulsó la meteorología académica en Colombia*

Por

Joaquín Pelkowski<sup>1</sup>

## Resumen

**Pelkowski, Joaquín:** Cimentación de la fórmula empírica de Ångström referente a la radiación atmosférica en superficie. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **33** (129): 513-527, 2009. ISSN 0370-3908.

En muchos campos prácticos, agrometeorología en particular, es preciso estimar la radiación atmosférica que llega al suelo, sobre la base de elementos meteorológicos de fácil acceso. La temperatura y humedad relativa, registradas regularmente al nivel de las garitas meteorológicas, han servido como parámetros de entrada en fórmulas empíricas que facilitan la estimación de la radiación devuelta por la atmósfera. Una de tales fórmulas, clásica como otras que llevan el nombre de su artífice, es la de Ångström. Las tentativas de fundamentarla teóricamente no son convincentes. En este ensayo se intenta nuevamente una fundamentación, partiendo de un modelo bipotámico de radiación infrarroja atmosférica.

**Palabras clave:** radiación atmosférica (nocturna), irradiación infrarroja, fórmula empírica de Ångström.

## Abstract

In many fields of practice, like agrometeorology, there is a need to estimate the downwelling radiation at the surface, on the basis of meteorological parameters of easy access. Air temperature and relative humidity, which are regularly measured at shelter height, have

<sup>1</sup> JRG Dynamical Systems, KlimaCampus, University of Hamburg, Germany. Email: Joachim.Pelkowski@zmaw.de

served as the entries in empirical formulae laid down in estimating the air's radiation returned to earth. One such classic formula bears Ångström's name. Attempts to derive it from theory have not been convincing. This essay offers a fresh attempt, starting from a two-stream model of infrared radiation.

**Keywords:** (Nighttime) downwelling longwave radiation, infrared irradiance, Ångström's empirical formula.

## 1. Introducción

La radiación atmosférica, emitida hacia la superficie terrestre en el régimen infrarrojo de ondas largas, es una parte sustancial en el balance energético al nivel del suelo. A este "efecto atmosférico", general y popularmente conocido como "efecto invernadero", se deben las placenteras condiciones de habitabilidad sobre la Tierra.

Un aumento paulatino a largo plazo de ese "contraflujo" constituye la esencia del problema del calentamiento global.

No obstante, el flujo "devuelto" por la atmósfera en cualquier momento es de interés más inmediato, en agrometeorología por ejemplo, puesto que aminora el enfriamiento del suelo por radiación durante la noche, o para el pronóstico de niebla en un aeropuerto.

Hoy por hoy se dispone de elaborados y precisos modelos para calcular dicho flujo descendente, pero su utilidad en la práctica continúa siendo muy restringida. Y en lo que respecta a su medición en superficie, raras son las estaciones que disponen del presupuesto que permita mantener y calibrar los costosos instrumentos de medición, necesarios para verificar los cálculos.

Los archivos actuales de las medidas en superficie de la radiación infrarroja proveniente de la atmósfera, de buena calidad y alta resolución temporal, distan de ser suficientes en su extensión geográfica y la duración de las series cronológicas. Existen en el mundo entero apenas tres docenas de estaciones certificadas para su medición exacta (Vardavas & Taylor, 2007). Incluso las observaciones desde satélite precisan, para su verificación, de mediciones locales. Por estas razones, no dejan de tener interés fórmulas empíricas que indirectamente permitan estimar la radiación de onda larga incidente en la superficie de algún lugar determinado.

Hace décadas se idearon con tal fin unas primeras fórmulas empíricas que partían de observaciones realizadas en superficie, y se establecieron unas expresiones sencillas en las que intervienen únicamente la temperatura y la cantidad de vapor de agua cerca del suelo.

Es obvio que una aproximación teórica al problema debería tener en cuenta muchas más variables que éstas. Sin embargo, dichas fórmulas resultaron ser medios notablemente eficaces para estimar la irradiación infrarroja en superficie. De las diversas fórmulas propuestas (véanse, p. ej., las resumidas por Sellers, 1965; Brutsaert, 1982, o una propuesta por Elsasser, 1942), la mayoría de ellas en función de la temperatura y la presión del vapor, no discutiremos sino dos, en virtud de su carácter modélico.

Sobre la base de propias y extensas observaciones nocturnas realizadas en Argelia y California, publicadas en 1915, Anders Ångström (1888-1981), famoso miembro de la dinastía sueca de los expertos en radiación atmosférica, sacó las siguientes conclusiones acerca de la radiación infrarroja medida al nivel del suelo (Ångström, 1916): I) Las variaciones de la contrarradiación de las capas inferiores de la atmósfera son causadas directamente por variaciones de la temperatura y la humedad. II) La contrarradiación atmosférica es casi proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta ( $T_a$ ) en el lugar de la observación. III) La dependencia de la contrarradiación ( $R^{\downarrow}$ ) de la tensión del vapor de agua ( $e$ ) se puede expresar por la fórmula exponencial (incorporando la segunda conclusión):

$$R_{\text{sup}}^{\downarrow} = \sigma T_a^4 (a_A - b_A \times 10^{-\tau}) (0.5 < e < 12 \text{ mm}). \quad (1)$$

IV) Un aumento de la tensión del vapor causa una disminución en la emisión efectiva. V) Las observaciones sugieren que la atmósfera seca ( $e < 1 \text{ mm}$ ) posee un poder de radiación importante: a la altura de 4400 metros alcanza la radiación (devuelta) casi el 50% de la magnitud de radiación de un cuerpo negro a la temperatura del lugar de

observación. VI) Variaciones en la radiación de ondas cortas transmitida por la atmósfera apenas influyen en la magnitud de la contrarradiación. (Aclaro que el término de "contrarradiación", muy estilado en la época, ha caído en desuso.)

En 1932 Brunt propone una nueva fórmula empírica, que según él se ajustaba mejor a unos datos específicos recogidos en Inglaterra:

$$r^{\downarrow} = a_B + b_B \sqrt{e}. \quad (2)$$

Introducimos desde ahora, siguiendo la costumbre de la mayoría de los autores que discuten la fórmula, el cociente

$$r^{\downarrow} = \frac{R_{\text{sup}}^{\downarrow}}{\sigma T_a^4}, \quad (3)$$

que Brutsaert (1982) llama ambiguamente la "emisividad atmosférica con el cielo despejado", pero es preferible denominarlo "contraflujo relativo", siendo  $R_{\text{sup}}^{\downarrow}$  el flujo infrarrojo descendente en superficie (más adelante,  $R_{\text{sup}}^{\downarrow}$  se reemplazará por  $R^{\downarrow}(\tau_0^{\downarrow})$ , donde el argumento se refiere a la profundidad óptica total de la atmósfera en régimen de ondas largas).

En estas fórmulas,  $e = p_v(0)$  significa la presión del vapor de agua cerca de la superficie, y  $a_A$ ,  $b_A$ ,  $\gamma$ ,  $a_B$  y  $b_B$  son las "constantes" de las fórmulas empíricas. La fórmula de Brunt tiene la ventaja de depender de solamente dos "constantes", pero por otro lado no está sostenida por consideraciones tan claras como las de Ångström (Raman, 1935). El mismo Brunt la consideraba una mera fórmula empírica, a despecho de una tentativa de derivarla por vía teórica (Pekeris, 1935).

La fórmula de Ångström (1) se puede reescribir de la siguiente manera (Raman, 1935):

$$r^{\downarrow} = (a_A - b_A) + b_A(1 - 10^{-\gamma e}),$$

siendo aproximadamente  $a_B = a_A - b_A$ . Siguiendo a Raman (1935),  $b_A(1 - 10^{-0.405 e}) \sim 0.06\sqrt{e}$  para valores típicos de la presión del vapor de agua. En vista de esta posibilidad y del hecho de que la fórmula de Brunt es considerada como una mera expresión empírica sin fundamento teórico (Brutsaert, 1982), de ahora en adelante me ceñiré a establecer, por vía teórica, la fórmula

de Ångström. No hicieron falta, claro está, tentativas de justificarla teóricamente, incluso de la misma pluma de Ångström, pero no cabe calificarlas de concluyentes.

Nuestro enfoque en este ensayo es deducir, en la medida de lo posible, la fórmula empírica (1), partiendo de un modelo hipotámico de corte inicialmente introducido en meteorología por Emden (1913). Este esfuerzo fue inspirado por una tentativa de cimentar la no menos célebre fórmula empírica de Ångström que permite estimar la irradiación solar, o insolación, en función de la heliofanía (Polkowski, 2009).

Hoy se calcula la irradiación infrarroja en superficie a partir de la teoría fenomenológica de transferencia radiativa de Chandrasekhar (1950), quien sintetizó los dispersos esfuerzos previos en su magistral exposición, ofreciendo una teoría coherente y pormenorizada de los intercambios radiativos que tienen lugar dentro de una atmósfera estelar, en términos de la longitud de onda, la polarización y la dirección de las ondas electromagnéticas que la atraviesan. Esta teoría presupone, en su aplicación a nuestro problema, los perfiles de temperatura y vapor de agua en un lugar dado, amén de información detallada sobre el espectro de absorción del vapor de agua y de los gases que absorben radiación infrarroja. En la práctica no se cuenta con la información necesaria sino en ciertas estaciones meteorológicas o en casos excepcionales, mientras que para ciertos fines, como el pronóstico de las heladas o de las nieblas, es deseable disponer de una estimación de la radiación infrarroja proveniente de la atmósfera, a partir de mediciones meteorológicas asequibles (en superficie). Por consiguiente, las fórmulas empíricas siguen gozando de cierta popularidad, e incluso se plantean nuevas fórmulas, para satisfacer las necesidades de ciertos grupos, dedicados a objetivos más limitados.

## 2. Modelación de los flujos infrarrojos

Para calcular de manera elemental los flujos infrarrojos que atraviesan perpendicularmente la atmósfera, basta recurrir a la clase de los modelos hipotáticos. En particular, a continuación

nos basaremos en una versión propuesta recientemente (Pelkowski, 2007), especializada con vistas a describir una atmósfera semigris, transparente a la radiación solar. Bajo este supuesto, las ecuaciones diferenciales que determinan los flujos de onda larga son (Pelkowski, 2007, § 4):

$$\bar{\mu}^+ \frac{dR^{\downarrow}(\tau)}{d\tau} = R^{\downarrow}(\tau) - \pi B(\tau)$$

$$\bar{\mu}^+ \frac{dR^{\uparrow}(\tau)}{d\tau} = -R^{\uparrow}(\tau) + \pi B(\tau).$$

$R^{\downarrow}(\tau)$ ,  $R^{\uparrow}(\tau)$  y  $B(\tau)$  simbolizan, respectivamente, la densidad del flujo infrarrojo ascendente, del flujo infrarrojo descendente y la función fuente en el infrarrojo. La profundidad óptica en el infrarrojo se define como de costumbre:

$$\tau(z) = \int_z^{H_0} \rho k dz', \quad (4)$$

significando  $\rho$  la densidad de los gases que absorben radiación infrarroja,  $k$  el coeficiente de absorción específico (por unidad de masa),  $z$  la altura sobre el nivel del mar, y  $H_0$  una altura donde la densidad del aire se pueda considerar como despreciable ("altura de la atmósfera"). En las ecuaciones generales del modelo bipotámico presentado en el trabajo citado, optamos por cosenos directores de igual magnitud ( $\mu_+^* = -\mu_-^* \equiv \bar{\mu}^+$ ), con  $\bar{\mu}^+$  función de la profundidad óptica total,  $\tau_0 \equiv \tau(0)$ :  $\bar{\mu}^+(\tau_0)$ . La determinación, algo engorrosa, de este coseno efectivo nos llevaría demasiado lejos en esta exposición, por lo que suponemos el valor constante  $\bar{\mu}^+(\tau_0) = 0.6$ , valor intermedio entre  $\bar{\mu}^+(0) = 0.5$  para una atmósfera enteramente transparente ( $\tau_0 = 0$ ) y  $\bar{\mu}^+(\infty) = 2/3$  para una atmósfera suficientemente opaca en el infrarrojo. En el contexto de este artículo, es posible prescindir de un ajuste de este coseno con miras a reproducir un valor exacto para un límite dado.

Introduciendo la profundidad óptica efectiva (o dilatada) mediante la definición  $\tau^* = \tau/\bar{\mu}^+(\tau_0)$ , las ecuaciones anteriores se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\frac{dR^{\downarrow}(\tau^*)}{d\tau^*} = R^{\downarrow}(\tau^*) - \pi B(\tau^*) \quad (5)$$

$$\frac{dR^{\uparrow}(\tau^*)}{d\tau^*} = -R^{\uparrow}(\tau^*) + \pi B(\tau^*). \quad (6)$$

Integrándolas en seguida con respecto a  $\tau^*$ , se obtienen las densidades formales de los flujos descendente y ascendente:

$$R^{\downarrow}(\tau^*) = R^{\downarrow}(\tau_0^*)e^{-\tau_0^* - \tau^*} + \pi \int_{\tau_0^*}^{\tau^*} e^{-(\tau_0^* - \tau')} B(\tau') d\tau' \quad (7)$$

$$R^{\uparrow}(\tau^*) = R^{\uparrow}(0)e^{-\tau^*} + \pi \int_0^{\tau^*} e^{-(\tau_0^* - \tau')} B(\tau') d\tau'. \quad (8)$$

Díceseles formales porque la función fuente  $B$  depende de la temperatura, la cual, a su vez, depende de los flujos de radiación, entre otros procesos. Aplicadas a toda la atmósfera, las condiciones de frontera son:

$$R^{\downarrow}(0) = 0, \quad (9)$$

$$R^{\uparrow}(\tau_0^*) = \epsilon_s \sigma T_s^4 + (1 - \epsilon_s) R^{\downarrow}(\tau_0^*). \quad (10)$$

Significan:  $\sigma$ , la constante de Stefan-Boltzmann;  $T_s$ , la temperatura de la superficie terrestre (tierra o agua);  $\epsilon_s$ , la emisividad gris de ésta y albedo infrarrojo igual a  $1 - \epsilon_s$ . La atmósfera no recibe radiación infrarroja en su frontera superior, mientras que la superficie emite como un cuerpo gris (casi negro, por regla general, para el cual  $\epsilon_s = 1$ ).

El flujo que aquí interesa primordialmente es la irradiancia (infrarroja) en superficie (otrotra llamada contrarcorriente), o sea, el flujo descendente en el nivel donde  $\tau^* = \tau_0^*$ :

$$R^{\downarrow}(\tau_0^*) = \pi \int_0^{\tau_0^*} e^{-(\tau_0^* - \tau')} B(\tau') d\tau'. \quad (11)$$

En equilibrio termodinámico local, se tiene  $\pi B(\tau^*) = \sigma T^4(\tau^*)$ . Queda así patente que la irradiancia en superficie depende de la distribución vertical de la temperatura,  $T(\tau^*)$ , y, a través de  $\tau_0^*$ , de los perfiles verticales de la densidad o concentración de los gases atmosféricos que absorben la radiación infrarroja, entre ellos el dióxido de carbono y el ozono, cuyas concentraciones pueden suponerse constantes a corto plazo, mas no a la del vapor de agua.

Un sondeo vertical a cierta hora permite establecer tanto el perfil de temperatura reinante en ese momento como el de la humedad relativa, del cual se deduce la repartición vertical del vapor de agua, el gas más variable de todos los que absorben en el infrarrojo. Si se dispone de esta

información, la ecuación (11) se podría integrar numéricamente y el objetivo de nuestra tarea actual quedaría burlado.

No obstante, a menudo se carece de la información necesaria, y el objetivo es entonces estimar la radiación atmosférica en superficie prescindiendo precisamente de los sondeos, y aprovechando en su lugar variables de fácil acceso, como la temperatura y la humedad relativa, que regularmente se observan al nivel del suelo (de hecho, en la garita meteorológica a menos de dos metros de éste). Para lograrlo, ya sabemos que se suele recurrir a las fórmulas empíricas de Ångström o de Brunt, o incluso a las menos difundidas que se han propuesto desde entonces (Brutsaert, 1982). Pero si consiguiéramos tender un puente entre (11) y una de las fórmulas clásicas, reforzaríamos nuestra confianza en ella. Veamos si es posible llevar a cabo tal empresa con respecto a la fórmula de Ångström, arrancando de la ec. (11).

### 3. Perfil de temperatura semiteórico

En trabajos anteriores (véase por ejemplo, Anduckia & Pelkowski, 2000; Pelkowski et al. 2008), ha sido posible deducir unas expresiones analíticas de la distribución de temperaturas con la altura para una atmósfera (semigris) en equilibrio radiativo local, pese a que esta condición no se cumple en la troposfera. En el caso de la estratosfera, un perfil en equilibrio radiativo local es una lógica primera aproximación al perfil realmente observado, y por lo tanto supondremos que la estratosfera de nuestro modelo se encuentra en equilibrio radiativo. En cambio, para la troposfera, en donde la convección (diurna) y la liberación de calor por condensación modifican netamente el perfil del equilibrio radiativo, no es lícito presuponer esta condición. Hasta ahora, no se ha logrado calcular analíticamente un perfil troposférico de temperaturas, de manera que no queda otro remedio que recurrir a un perfil estándar, o resignarnos a definir por lo menos un perfil que se parezca a éste o a los perfiles medios normalmente observados. Un tal perfil es, implícitamente, producto de todos aquellos procesos que mencionáramos hace un momento. En este sentido, representa un perfil promedio realista.

Hemos optado por definir el siguiente perfil (Pelkowski, 1994):

$$T(\tau^*) = \begin{cases} T_{ef}(a + b\tau^*)^{1/4} & 0 \leq \tau^* \leq \tau_{tr}^*, \\ T_s \left(\frac{\tau^*}{\tau_0^*}\right)^{1/16} & \tau_{tr}^* \leq \tau^* \leq \tau_0^*. \end{cases} \quad (12)$$

$\tau_{tr}^*$  designa la profundidad óptica de la estratosfera, siendo  $\tau_0^*$  la profundidad óptica de la atmósfera en conjunto.  $T_{ef}$  es una temperatura efectiva de la atmósfera, definida mediante la radiación emergente en el tope de la atmósfera:  $\sigma T_{ef}^4 \equiv R^{\downarrow}(0)$ . Para pasar al espacio geométrico de alturas  $z$ , nos serviremos de la relación

$$\tau(z) = \tau_0 e^{-z/H_0}, \quad (13)$$

donde  $H_0 \sim 2.5$  km es la altura de una atmósfera de vapor de agua homogénea. La relación es válida para el vapor de agua (Goody & Yung, 1989) y está basada en la ley de Ham, quien la estableció hace más de un siglo para la atmósfera de latitudes medias, pero que hoy en día no se recuerda como tal.

En la Figura 1 se puede apreciar el perfil (12), con  $a = b = 0.5$ ,  $\tau_{tr}^* = 0.0316$ ,  $\tau_0^* = 3$ ,  $T_s = 288$  K y  $T_{ef} = 254.4$  K (el valor de  $\tau_{tr}^*$  resulta de la condición de continuidad de temperaturas en la tropopausa).

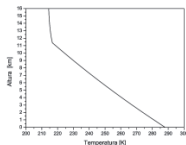


FIGURA 1. Distribución vertical de temperatura semejante a la de la atmósfera estándar

La distribución (12) se caracteriza, en términos de la altura, por un comportamiento casi lineal en

la troposfera ( $0 \leq z \leq H_T = 11.38$  km) y una estratosfera ( $H_T \leq z \leq H_s$ ) casi isotérmica. El declive medio de la temperatura es un poco inferior al de la troposfera estándar, cuyo valor constante es igual a 6.5 K/km. **Brutsaert** (1982) utiliza un perfil parecido para toda la atmósfera. La ventaja de la expresión (12) es que permite evaluar la integral en (11), mientras que una función lineal de la altura  $z$  se convierte en una función logarítmica de  $\tau$  en el espacio óptico. También podemos considerar el caso más general de un perfil troposférico cuasi-lineal variable, simplemente introduciendo en el exponente un parámetro  $\omega$  tal que el tramo troposférico sea descrito por

$$T(\tau) = T_s \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-\omega/16} \quad (14)$$

La temperatura que interviene en las fórmulas empíricas de la introducción es la del aire, medida al nivel de la garita meteorológica; si la designamos por  $T_a$ , y a la profundidad óptica correspondiente por  $\tau_{\text{aerita}}$  =  $\tau_0 - \epsilon$ , siendo  $\epsilon \ll 1$ , tendremos la relación

$$\sigma T_a^4 = \sigma T_s^4 \left( 1 - \frac{\epsilon}{\tau_0} \right)^{-\omega/4} \approx \sigma T_s^4 \quad (15)$$

entre la temperatura de la superficie y la temperatura del aire junto al suelo. La aproximación es aceptable, a menos que la diferencia entre ambas temperaturas sea notable, como es el caso en circunstancias excepcionales (**Sellers**, 1965).

El perfil de la estratosfera se tomó aquí de una solución aproximada de una capa en equilibrio radiativo y se expresa así:

$$T(\tau) = T_{s2}(a + b\tau)^{1/4} \quad (16)$$

los coeficientes  $a(\tau_0)$  y  $b(\tau_0)$  se pueden determinar por diferentes vías (**Pelkowski**, 1993; **Anduckin & Pelkowski**, 2000). Esta solución no incluye la absorción de radiación solar debida a la presencia del ozono en la estratosfera, pero se podría ampliar para tenerla en cuenta. En el apéndice A emplearemos los coeficientes que resultan de la solución exacta a una ecuación integral aproximada. La solución completamente rigurosa del equilibrio radiativo con absorción de radiación solar y esparcimiento isotrópico se ha publicado recientemente (véase su aplicación a la atmósfera terrestre en **Pelkowski et al.**,

2008), pero es demasiado elaborada para nuestro propósito actual. Por lo demás, como se demostrará en el apéndice A, el estado térmico de la estratosfera escasamente influye en la irradiación en superficie, y por lo tanto se puede descartar.

#### 4. Profundidad óptica

Hemos de examinar ahora detenidamente la profundidad óptica del vapor de agua, para lo cual se parte de la definición de la profundidad óptica de la atmósfera entera, ec. (4):

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau(0) = \int_0^{H_s} \rho k dz \\ &= \int_0^{H_T} \rho k dz + \int_{H_T}^{H_s} \rho k dz \\ &= \int_0^{H_T} (\rho_v k_v + \rho_d k_d) dz + \tau_{\text{str}} \\ &= \tau_{\text{vapor}} + \tau_{\text{dry}}, \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $\rho_v$  es la densidad del vapor de agua contenido en el aire,  $k_v$  su coeficiente de absorción.  $k_d = \sum_i \frac{d_i}{\rho_i} k_{di}$  representa el coeficiente de absorción de los demás gases activos en el espectro infrarrojo. En el modelo presente podemos suponer la profundidad óptica de la atmósfera seca como relativamente invariable, es decir,  $\tau_{\text{dry}} = \tau_0 + \int_0^{H_T} \rho_d k_d dz$  es constante, siendo  $\tau_0 = \int_0^{H_s} \rho k dz$  la contribución a la profundidad total debida a la absorción de radiación infrarroja por parte de los gases traza de la estratosfera ( $\text{CO}_2$  y  $\text{O}_3$ ). El coeficiente de absorción efectivo del vapor de agua ( $k_v$ ) es independiente de la longitud de onda, puesto que en un modelo elemental como el nuestro, sería contraproducente tener en cuenta la compleja estructura de absorción selectiva que ostenta el vapor de agua en el infrarrojo. Basta con emplear un promedio aritmético, incluyendo tan sólo la dependencia del coeficiente efectivo de la presión (y por tanto de la altura), mas no de la temperatura (de la cual depende también, pero más débilmente). Haremos uso de la siguiente función (**Henschel**, 1956):

$$k_v(z) = k_v(0)e^{-\gamma z}, \quad (18)$$

donde  $\gamma_k \approx 0.014$  km<sup>-1</sup> y

$$k_v(0) = \frac{1}{\lambda_M - \lambda_m} \sum_{i=1}^N k_i \Delta_i \lambda$$

( $\lambda$ : longitud de onda). Para la determinación de este valor promedio remito a la tabla publicada por **Gónima** (1992). El promedio de los 65 valores que figuran en ella y que corresponden al espectro infrarrojo entre  $5 = \lambda_m < \lambda < \lambda_M = 43$   $\mu\text{m}$  resultó ser  $k_v(0) = 6.26$  m<sup>2</sup>/kg.

La fórmula empírica de Ångström presupone una distribución de temperaturas sin inversiones, es decir, una disminución continua de la temperatura con la altura, como en nuestro perfil cuasi-lineal. La presión atmosférica decrece exponencialmente con la altura, y otro tanto podemos afirmar de nuestro perfil térmico, en vista de la relación (13). En cuanto al vapor de agua, como componente de la mezcla ideal que constituye el aire húmedo, se ha demostrado (**Dufour & van Mieghem**, 1975) que obedece a la ecuación de estado  $p_v = p/R_v T = cp/R_a T$ , siendo  $R_v$  y  $R_a$  las constantes del vapor de agua y del aire seco, respectivamente, y  $\epsilon \approx 0.622$  el cociente  $R_v/R_a$ . Para representar la disminución de la presión del aire con la altura, es suficiente atendernos a su comportamiento en la atmósfera estándar,  $p = p_0 e^{-\gamma_p z}$ ,  $\gamma_p = 0.13$  km<sup>-1</sup>. Recordemos además que, con arreglo a una definición esencial en el contexto de la ley de Dalton, se tiene la relación  $p_v = p N_v$ , y en particular,  $\epsilon = p_v N_v$ , siendo  $N_v$  la fracción molar del vapor de agua. Combinando esta información, obtenemos para el vapor de agua

$$\rho_v = \frac{\epsilon e}{N_v R_a T_s} e^{-(\gamma_p - \gamma)z},$$

o sea, una disminución exponencial con la altura. Por otro lado, los meteorólogos invariablemente favorecen la relación  $\rho_v = \epsilon e/R_a T$ , lo cual nos permite hacer caso de una distribución estándar del vapor de agua, basada en un promedio de muchas distribuciones observadas:

$$\rho_v = \frac{\epsilon e}{R_a T_s} e^{-\gamma_p z}, \quad (19)$$

con  $\gamma_p = 0.44$  km<sup>-1</sup> (**Brutsaert**, 1982; valor citado también por **Gónima**, 1992). Privilegiaremos esta expresión empírica en lo que sigue, porque  $\gamma_p$  es tan solo un valor idéneo del perfil cuasi-lineal de temperatura (12), a saber,  $\gamma_p = (16H_T)^{-1} = 0.025$  km<sup>-1</sup>.

Insertando ahora en (17) la densidad del vapor de agua según (19) y el coeficiente de absorción según (18), la integración desemboca en la

siguiente expresión de la profundidad óptica del vapor de agua:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{vapor}} &\equiv \int_0^{H_T} \rho_v k_v dz \\ &= \frac{\epsilon k_v(0)e}{R_a T_s} \int_0^{H_T} e^{-(\gamma_p + \gamma)z} dz \\ &= \frac{\epsilon k_v(0)e}{R_a T_s (\gamma_k + \gamma_p)} [1 - e^{-(\gamma_p + \gamma)H_T}] \\ &\approx \frac{K \epsilon}{T_s}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde se introdujo la abreviatura

$$K \equiv \frac{\epsilon k_v(0)}{R_a (\gamma_k + \gamma_p)}. \quad (21)$$

Vemos que la profundidad óptica del vapor de agua es proporcional a su presión en superficie, e inversamente proporcional a la temperatura  $T_s$  de la misma, que es casi la misma que la del aire en superficie. En la práctica, se toman los valores de la temperatura y de la humedad relativa medidos en la garita meteorológica.

En definitiva, la profundidad óptica efectiva de nuestro modelo es la suma de dos contribuciones:

$$\tau_0^* = \tau_{\text{dry}}^* + \tau_{\text{vapor}}^* \quad (22)$$

una independiente del vapor de agua en la atmósfera (profundidad óptica del aire seco) y otra variable según la humedad relativa (profundidad óptica debida a la presencia del vapor de agua).

#### 5. La irradiación infrarroja en superficie

Insertando el perfil de temperatura (12) en la integral del flujo descendente de radiación infrarroja incidente sobre la superficie, ec. (11), tenemos:

$$\begin{aligned} R^{\downarrow}(\tau_0^*) &= \sigma \int_0^{\tau_0^*} T^4(t) e^{-(\tau_0^* - t)} dt \\ &= R^{\downarrow}(\tau_0^*)_0 e^{-(\tau_0^* - \tau_0^*)} \\ &+ \sigma T_s^4 \frac{e^{-\tau_0^*}}{\gamma_k^{1/4}} \int_{\tau_0^*}^{\tau_0^*} t^{3/4} e^t dt, \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $R^{\downarrow}(\tau_0^*)_0$  representa el flujo infrarrojo descendente al nivel de la tropopausa. La integral del miembro derecho figura en tablas de integrales y se puede consultar, por ejemplo, en el atlas de funciones de **Spanier & Oldham** (1987), del cual

extraigo el siguiente resultado:

$$\int_0^x t^{\omega/4} e^t dt = \frac{x^{1+\omega/4}}{1+\omega/4} M(1+\omega/4; 2+\omega/4; x), \tag{24}$$

donde  $M(1+\omega/4; 2+\omega/4; x)$  es la función de Kummer o función hipergeométrica  ${}_1F_1(1+\omega/4; 2+\omega/4; x)$ , igual a la unidad cuando el argumento  $x$  se anula. Para  $\omega = 1$  obtenemos:

$$\frac{e^{-\tau_n^*}}{\tau_n^{1/4}} \int_{\tau_n^*}^{\tau_0^*} t^{1/4} e^t dt = \frac{4}{5} \tau_n^{*5} e^{-\tau_n^*} M(5/4; 9/4; \tau_n^*) - \frac{4}{5} \frac{e^{-\tau_0^*}}{\tau_0^{1/4}} \tau_0^{*5/4} M(5/4; 9/4; \tau_0^*). \tag{25}$$

La ecuación (23) se compone entonces de dos aportes. Un aporte estratosférico, disminuido por el término proporcional al segundo sumando de esta última ecuación,

$$R_2^1(\tau_n^*) = R_2^1(\tau_0^*) e^{-(\tau_0^* - \tau_n^*)} - \sigma T_a^4 \frac{4}{5} \frac{e^{-\tau_n^*}}{\tau_n^{1/4}} \tau_n^{*5/4} M(5/4; 9/4; \tau_n^*), \tag{26}$$

aporte cuya magnitud es, como se demostrará en el apéndice A, despreciable frente a la contribución troposférica  $R_{top}^1(\tau_n^*)$ , la cual es proporcional al primer sumando de la ec. (25). Si la estratosfera es suficientemente transparente al flujo infrarrojo, podemos anular (26) eligiendo el valor  $\tau_n^* = 0$ , y la ecuación (23), expresada como  $R^1(\tau_n^*) = R_{top}^1(\tau_n^*) + R_2^1(\tau_n^*)$ , se reduce a:

$$r^1(\tau_n^*) = \frac{R_{top}^1(\tau_n^*)}{\sigma T_a} = \frac{4}{5} \tau_n^{*5} e^{-\tau_n^*} M(5/4; 9/4; \tau_n^*), \tag{27}$$

en donde se tuvieron en cuenta la definición (3) y la aproximación (15). En la Figura 2 se grafica el comportamiento de este flujo en función de la profundidad óptica infrarroja  $\tau_n^*$ . Al mismo tiempo se exhibe la función  $0.9(1 - 10^{-0.4\tau_n^*})$ , una excelente aproximación a (27), si nos limitamos a valores de  $\tau_n^* \lesssim 3$  (para  $\tau_n^* \gtrsim 3$ , la aproximación  $0.97(1 - 10^{-0.35\tau_n^*})$  es globalmente mejor).

Queda patente que es posible reemplazar el contraflujo teórico (27) por la fórmula

$$r^1(\tau_n^*) \approx \alpha(1 - 10^{-\beta\tau_n^*}) \tag{28}$$

con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que no dependen sino débilmente de  $\tau_n^*$  ( $\alpha$  aumenta de 0.87 a 0.97 para  $\tau_n^* \in (0.05, 10)$ , manteniéndose constante a  $\beta = 0.4$ ), y

que por tanto se pueden considerar constantes en la práctica. Mediante un método variacional se podrían expresar los valores óptimos de estos dos parámetros en función de  $\tau_n^*$ , pero debido a que la dependencia respecto de la profundidad es débil, no vale la pena detenernos en este aspecto accidental del problema.

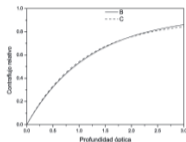


FIGURA 2. Contraflujo relativo (27) en función de  $\tau_n^*$  (línea continua B) y su aproximación (28) (línea a trazos C).

Teniendo en cuenta la relación (22), esta última aproximación cobra ahora la forma

$$r^1(\tau_n^*) = \alpha(1 - 10^{-\beta\tau_n^*}) = \alpha - b_A 10^{-\beta\tau_n^*},$$

En la sección anterior se dedujo que la profundidad óptica del vapor de agua se puede expresar como  $\tau_{vap} = Ke/T_a$ , donde  $e$  designa su presión en superficie, de modo que nuestro proceder desemboca en una fórmula "de tipo Ångström":  $r^1(\tau_n^*) = a_A - b_A 10^{-\gamma\tau_n^*}$ , cuyos coeficientes son:  $a_A = \alpha$ ,  $b_A(\tau_{dry}^*) = \alpha \times 10^{-\beta\tau_{dry}^*}$  y  $\gamma = \beta K/T_a$ .

Si en la distribución troposférica (14) eligiéramos  $\omega = 3/2$ , se obtendría un perfil de temperaturas inferiores, con una tropopausa netamente más fría. En este caso la contribución troposférica a la irradiación en superficie se puede aproximar por una fórmula del mismo tipo, pero con otros coeficientes:  $r^1(\tau_n^*) \approx 0.84(1 - 10^{-0.4\tau_n^*})$  ( $\tau_n^* \lesssim 2$ ). Para  $\omega = 2$ , se tiene  $r^1(\tau_n^*) \approx 0.79(1 - 10^{-0.4\tau_n^*})$  ( $\tau_n^* \lesssim 2$ ). Para  $\omega = 3$ , a la contribución en cuestión resulta ser excelente la aproximación  $r^1(\tau_n^*) \approx 0.75(1 - 10^{-0.35\tau_n^*})$  ( $\tau_n^* \lesssim 2$ ), y para

$\omega = 5$ ,  $r^1 \approx 0.68(1 - 10^{-0.3\tau_n^*})$  ( $\tau_n^* \lesssim 2$ ). Da la impresión de que  $\alpha$  ( $\omega$ ) es función decreciente de  $\omega$ , así como  $\beta$  ( $\omega$ ) < 0.

Otra posibilidad de disminuir el coeficiente  $\alpha$  es dar cuenta de la ventana espectral del vapor de agua, tal como se describe en el apéndice B, a raíz de lo cual los coeficientes  $a_A$  y  $b_A$  se acercan a los valores de la fórmula de Ångström, demostrándose así que su fórmula empírica puede explicarse mediante un modelo semigris modificado.

A la luz de estas consideraciones fugitivas se sigue que podemos adoptar la siguiente forma general para estimar la irradiación infrarroja relativa en superficie:

$$r^1(\tau_n^*) \approx a_A - b_A 10^{-\gamma\tau_n^*}, \tag{29}$$

con coeficientes (véase el apéndice B)

$$a_A = \alpha[1 - \beta_w(T_m)] \tag{30}$$

$$b_A = a_A \times 10^{-\beta\tau_{dry}^*} \tag{31}$$

$$\gamma = \frac{\beta K}{T_a}. \tag{32}$$

Esta forma es idéntica a la propuesta por Ångström, quien de hecho también despreció el aporte estratosférico (ver apéndice A). Es evidente que  $a_A \lesssim \alpha$ . El modelo también permite determinar la influencia de la anchura relativa de la ventana espectral sobre este coeficiente en función de  $T_a$  y de  $\tau_n^*$ , pero no hace falta extendernos sobre este aspecto. Puesto que  $\beta_w < 0.3$  (apéndice B),  $a_A > 0.7\alpha$ , y queda así demostrado que los valores inferiores que Ångström y otros obtuvieron se deben a la presencia de la ventana en el espectro infrarrojo.

Advirtérase que para una atmósfera seca ( $e = 0$ ):  $r^1(\tau_n^*) = a_A - b_A$ ; en el otro extremo está una atmósfera muy húmeda —con posible formación de nubes que podemos interpretar aquí como constituyendo un vapor muy espeso—, tenemos  $r^1(\tau_n^*) = a_A \sim 0.75$  (con  $\beta_w(260) = 0.22$ ), o sea que el 75% de la energía irradiada por un cuerpo negro a la temperatura del aire cabe la superficie es devuelto por una atmósfera muy húmeda, cuyo perfil corresponde a (12). El caso particular de una atmósfera pura y seca, desprovista de gases poliatómicos (los responsables del efecto invernadero) corresponde a  $\tau_{dry}^* = 0$ , y entonces  $r^1(\tau_n^*) = 0$ , como era de esperar. Mediante el

contraflujo relativo (29), y con la condición de frontera (10), el flujo neto de radiación infrarroja en superficie (la "emisión efectiva" del suelo, como solía decirse antaño), reza:

$$R(\tau_n^*) = R^1(\tau_n^*) - R^1(\tau_0^*) = \epsilon_s \sigma T_s^4 (1 - a_A + b_A 10^{-\gamma\tau_n^*}).$$

Esta emisión efectiva es decisiva en la predicción de las heladas nocturnas y en la climatología de un lugar, aunque para ésta tendríamos que incluir la nubosidad. El mismo Ångström, y su colaborador Åshöf, pronto introdujeron un factor de corrección en función de la nubosidad  $n$  (en décimas), modificando la fórmula (1), válida solamente para una atmósfera con cielo raso. En la sección siguiente indicaremos cómo es posible añadir el factor de corrección dentro de nuestro marco teórico.

**5.1. Radiación atmosférica con nubosidad.**

Nuestro modelo permite incluir *grasso modo* la nubosidad. Comencemos por contemplar el caso de un tiempo completamente nublado, con una capa homogénea de nubes cuya temperatura uniforme sea  $T_c$ . Resolviendo la ecuación de transferencia (Sanderson & Chandrasekhar, 1950) para una temperatura constante, se desprende la siguiente emisividad de la capa nublada, en función de la profundidad óptica de la nube en régimen infrarrojo,  $\tau_{nc}$ :

$$\epsilon_c = 1 - 2E_3(\tau_{nc}),$$

donde  $E_3(\tau_{nc})$  es la integral exponencial de tercer orden (la forma aproximada  $1 - e^{-3\tau_{nc}/2}$  resulta de utilizar los flujos aproximados (7) y (8) y  $\beta_c^T = 2/3$ ). Generalmente  $\tau_{nc} \gg 1$ , y por consiguiente,  $\epsilon_c \approx 1$ ; para nubes (ópticamente) muy delgadas habría que tener en cuenta su emisividad inferior a la unidad, pero el hecho de que en tal caso la capa de nubes sea translúcida (transalórica), complica la definición de las condiciones de contorno, que entonces incluyen aportes que dependen del estado térmico de toda la atmósfera e incluso, de nos ser  $\epsilon_s = 1$ , del albedo infrarrojo de superficie. Bástenos, pues, en este apartado, esbozar la solución en el caso de emisividades unitarias. Entonces podemos proceder de la siguiente manera para modificar la irradiación (29).

Para la atmósfera infranefélica (entre la superficie y la capa de nubes), podemos postular un

perfil de temperaturas semejante a (14):

$$T_l(\tau_l^+) = T_c + \left(\frac{\tau_l^+}{\tau_{10}^+}\right)^{\varpi/16} (T_s - T_c),$$

en el cual el índice  $l$  nos recuerda que las variables se refieren a la capa infrarroja, cuya profundidad óptica es  $\tau_{10}^+$ .

$$R_l^{\downarrow}(\tau_{10}^+) = \sigma T_c^4 e^{-\tau_{10}^+} \left[ 1 + \tau_{10}^+ \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{T_s - T_c}{1 + k\nu}\right)^k M(1 + k\nu, 2 + k\nu, \tau_{10}^+) \right]$$

( $\nu \equiv \varpi/16$ ). Para  $T_c = 0$ ,  $\varpi = 1$  y  $\tau_{10}^+ = \tau_0^+$ , esta expresión se reduce a la expresión (27), reteniendo la relación (15). Para una capa infrarroja incapaz de absorber radiación térmica,  $\tau_{10}^+ = 0$ , y entonces se obtiene  $R_l^{\downarrow}(\tau_{10}^+ = 0) = \sigma T_s^4$ , la energía emitida por la capa de nubes.

Cuando la nubosidad  $n$  es una fracción entre 0 y 1, la irradiación de la superficie se calcula ponderando los dos flujos, el de una atmósfera con cielos nublados (Vardavas & Taylor, 2007):

$$R^{\downarrow}(\tau_0^+; n) = R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0)(1 - n) + R_l^{\downarrow}(\tau_0^+)n$$

siendo ahora  $R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0)$  la expresión (23). Con las mismas aproximaciones efectuadas en el apartado anterior, obtenemos la corrección deseada:

$$R^{\downarrow}(\tau_0^+; n) = R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0)(1 + \kappa_{\rho}n) \quad (33)$$

donde

$$\kappa_{\rho} \equiv \frac{R^{\downarrow}(\tau_0^+; 1)}{R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0)} - 1 \quad (34)$$

y  $R^{\downarrow}(\tau_0^+; 1) = R_l^{\downarrow}(\tau_{10}^+)$ ;  $\kappa_{\rho}$  es un factor nefético que varía con la altura de las nubes (a través de  $\tau_{10}^+$ ,  $T_c$ ), y en la práctica también con el tipo de nubes.

Nuestro resultado (33) se inscribe en la categoría de fórmulas empíricas que se pueden resumir en la expresión

$$R^{\downarrow}(\tau_0^+; n) = R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0)(1 + an^b)$$

(Brutsaert, 1982). Las fórmulas originales requieren  $b = 1$ , pero hay quien (Bolz, 1949) obtuvo un valor próximo a  $b = 2.5$  (recomendando como suficiente el de  $b = 2$ ). El mismo Bolz indica

Pasando a calcular el flujo descendente (8), bajo la nueva condición de contorno  $R_l^{\downarrow}(0) = \sigma T_c^4$ , tenemos que la superficie es inundada por un contraflujo infrarrojo procedente tanto de las nubes como de la capa infrarroja:

que  $a \in (0.04, 0.25)$ , calculando un valor promedio de  $a = 0.22$ , sobre la base de datos recogidos al borde del mar Báltico. Con emisividades no unitarias, se concibe que nuestro modelo proporciona un término cuadrático en  $\nu$ , pero elegamos una derivación de este caso más general a un trabajo futuro.

**5.2. Ejemplo numérico.** A modo de ilustración, calcularemos algunos valores de los coeficientes de la fórmula de Ångström, partiendo de  $r^{\downarrow}(\tau_0^+) \approx \alpha(1 - 10^{-\beta\tau_0^+})$  con  $\alpha = 0.97$  y  $\beta = 0.33$ , la fórmula electa para valores de  $\tau_0^+ \leq 10$ . Sean también  $T_s = 288$  K,  $T_c = 270$  K, y  $\tau_{10}^+ = 1.2$  (o sea, con  $\bar{\mu}^+ = 0.6$ ,  $\tau_{10}^+ = 1.2 \times \bar{\mu}^+ = 0.72$ ). Para la medida de la ventana espectral tenemos entonces  $\beta_w(T_w) = 0.22$  (apéndice B).

En cuanto a  $K$ , usaremos los valores espectrales del coeficiente de absorción del vapor de agua publicados por Gónima (1992), que abarcan las longitudes de onda entre 5.25  $\mu\text{m}$  y 71.64  $\mu\text{m}$ . Si promediamos solamente entre 5.25  $\mu\text{m}$  y 25  $\mu\text{m}$ , que correspondería al intervalo que Ångström podía captar con sus aparatos, entonces  $K = 8$ ; si empleamos todos los valores,  $k_w(0) = 20.75$  m<sup>2</sup>/kg y por tanto  $K = 98.5$ , y si promediamos sin el último valor que figura en la tabla,  $\lambda = 71.64$  (banda de fortísima absorción), se tiene  $k_w(0) = 6.26$  m<sup>2</sup>/kg y  $K = 29.9$ , nuestro valor predilecto de ahora en adelante.

Obtenemos entonces los siguientes coeficientes:  $a_A = 0.76$ ,  $b_A = 0.30$ ,  $\gamma = 0.034$  ( $\gamma = 0.136$

si se toma el valor  $K = 98.5$ ); los coeficientes de Ångström citados en Kondratyev (1969, p. 571) varían entre los siguientes límites:  $a_A \sim 0.75 - 0.85$ ,  $b_A \sim 0.17 - 0.32$ ,  $\gamma \sim 0.055 - 0.126$ . Este último valor depende en el modelo de la temperatura de la superficie  $y$ , por lo tanto, habría que mencionarla al citarse valores de  $\gamma$ .

En cuanto al aumento de irradiación en presencia de nubes (con la ventana espectral cerrada, es decir,  $\beta_w = 0$ ), un ejemplo escogido al azar ilumina el sentido de la modificación. Dadas las temperaturas  $T_s = 288$  K,  $T_c = 270$  K (nubes bajas) y un 60% de nubosidad, calculamos mediante (34) un valor de  $\kappa_{\rho}$  igual a 0.2, mientras que de (33) resultan los flujos  $R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0) = 295.43$  W/m<sup>2</sup> y  $R^{\downarrow}(\tau_0^+; 0.6) = 330.96$  W/m<sup>2</sup>.

**5.3. Apostilla a la fórmula de Brunt.** Pensando en Raman (1935), cabe preguntarnos hasta qué punto es posible aproximar la fórmula empírica de Ångström por la de Brunt, ec. (2). Una aproximación burda, pero aceptable en la práctica resulta ser la siguiente (véase la Figura 3). Para demostrar la maleabilidad del modelo, partimos de (28) con  $\alpha = 0.9$  y  $\beta = 0.4$  (que se ajusta mejor en el intervalo  $\tau_0^+ \leq 3$ ), y calculamos los siguientes valores, sin tener en cuenta la ventana atmosférica ( $\beta_w = 0$ ):  $a_A = 0.9$ ,  $b_A = 0.64$  (atmósfera seca menos absorbidora o "contaminada", de profundidad óptica igual a  $\tau_{0.9} = 0.5$ ),  $\gamma = 0.042$ . Para la fracción de  $\sigma T_c^4$  que incide en superficie tenemos entonces:

$$r^{\downarrow}(\tau_0^+) = a_A - b_A 10^{-\gamma\tau_0^+} = a_B + b_B \sqrt{c}$$

donde

$$a_B = a_A - b_A = 0.26$$

$$b_B = 0.12$$

Los valores medios que uno encuentra,  $a_B = 0.44$  y  $b_B = 0.08$ , representan el promedio de distintas series de observaciones (Brunt, 1934), pero las "constantes" parecen oscilar entre amplios límites (Raman, 1935; Sellers, 1965):  $a_B \in (0.26, 0.71)$ ,  $b_B \in (0.023, 0.12)$ . La serie de observaciones realizadas durante un año en Poona, India, a una elevación de 564 m, arrojó los valores  $a_B = 0.26$  y  $b_B = 0.12$ , con un coeficiente de correlación igual a 0.93 (Raman, 1935). La coincidencia entre estos últimos valores y los nuestros, calculados, aunque sin duda fortuita, autoriza a pensar que la teoría

elemental desarrollada aquí compagina con datos observados.

Los valores medios que uno encuentra,  $a_B = 0.44$  y  $b_B = 0.08$ , representan el promedio de distintas series de observaciones (Brunt, 1934), pero las "constantes" parecen oscilar entre amplios límites (Raman, 1935; Sellers, 1965):  $a_B \in (0.26, 0.71)$ ,  $b_B \in (0.023, 0.12)$

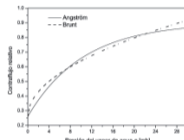


FIGURA 3. Aproximación del contraflujo relativo según la fórmula de Ångström mediante una curva del tipo (2), según Brunt.

## 6. Conclusiones

El marco presentado en este ensayo, sobre la base de un modelo bipotómico de innegable simplicidad conceptual, es más que holgado para la meta que nos propusimos, aunque, claro está, no satisfará al especialista atento a los detalles del intercambio de energía por radiación, como se tienen en cuenta en los modelos contemporáneos de la transferencia radiativa.

El reparo más serio que se puede alegar concierne el hecho de que el trueque inospechado de una función analítica, fruto de una integración exacta, por la fórmula empírica de Ångström, aunque rinda honor a la aguda intuición que éste ostentaba a la hora de proponer sus fórmulas empíricas, no es una deducción rigurosa irrecusable. Los coeficientes que surgen de

la acomodación de una función a otra dependen del intervalo de profundidades ópticas, y de los parámetros de un perfil de temperatura cuasi-realista, además de depender de la emisividad del suelo, que puede llegar a ser un 10% inferior a la unidad para suelos arenosos. Cabe señalar que una disminución de  $\epsilon_s$  implica un aumento del coeficiente  $\alpha$ .

El presente modelo biotérmico de radiación capta los rasgos esenciales del problema planteado, dando pie a la justificación teórica de la fórmula empírica de Ångström. No está basado en el perfil realmente observado, sino en una aproximación oportuna al perfil lineal de la atmósfera estándar (base de los altímetros empleados en aeronaves con barómetros aneroides), permitiendo así calcular sin mayor óbice los dos flujos de radiación infrarroja que se propagan verticalmente en la atmósfera.

En virtud de dos sencillas modificaciones, se logró tener en cuenta una capa de nubes con nubosidad variable, al igual que la consabida "ventana" atmosférica entre 8 y 12  $\mu\text{m}$ , intervalo espectral en el cual el vapor no emite radiación hacia el suelo, siendo transparente a la radiación infrarroja, mientras que nuestro modelo estrictamente semigris, la emisión incluye dichas longitudes de onda. La ventana se introdujo para compensar esta radiación excedente y así se equilibra el expediente de imaginar una temperatura atmosférica más fría que la real ( $\varpi > 1$ ), cuyo efecto es disminuir el coeficiente  $\alpha_A$  en el sentido deseado; con la inclusión de la ventana atmosférica se generan valores de los coeficientes  $\alpha_A$  y  $\beta_A$  más acordes con los que suelen citarse. Si la atmósfera está muy húmeda y da lugar a nubes, la ventana se tapa (se "cierra la cortina", por así decirlo), y entonces la emisión del agua (en forma de vapor o en estado condensado) es relativamente continua, y el reparo al carácter gris del modelo original es menos virulento. A pesar de no ser enteramente rigurosa muestra "deducción" de la fórmula de Ångström, no podemos menos que considerarla acertada. Con el modelo actual es posible interpretar las "constantes" de la fórmula empírica de Ångström, y convenceremos de que las mismas varían según la localidad, mientras que en otras fórmulas empíricas los coeficientes de regresión no parecen apoyarse en un fundamento teórico

nítido. La expresión explícita de  $\beta_A$ , por ejemplo, permite estimar la profundidad óptica de la atmósfera seca, y su variabilidad refleja el grado de contaminación atmosférica. En este trabajo no se aplica la teoría a un caso y lugar concretos con datos actuales, pero se abordará la labor de llevar a sus últimas consecuencias en un proyecto futuro. Mientras tanto, si algún investigador, con los datos necesarios a su alcance, siente el prurito de verificar el contenido teórico de la fórmula, tanto mejor.

#### Agradecimientos

Este trabajo se elaboró expresamente en homenaje a la obra y vida del difunto miembro de número de la Academia, Jesús Antonio Elava Ramírez, climatólogo y meteorólogo de primera hora de la Universidad Nacional de Colombia, quien con maña incomparable supo gerenciar no solamente proyectos meteorológicos de gran aliento, sino fomentar trabajos individuales que no siempre encajaban en ellos, como le consta al autor de este ensayo.

#### Referencias

- Anduekía, J. C. y J. Pelkowski, 2009. Algunos resultados de equilibrio radiativo en atmósferas con nubes. *Meteorología Colombiana*, No. 2, 23-31.
- Ångström, A., 1915: A Study of the Radiation of the Atmosphere. *Smithsonian Miscellaneous Collections* 65, No. 3. City of Washington.
- Ångström, A., 1916: Über die Gegenstrahlung in der Atmosphäre. *Meteor. Zeit.* 33, 529-538.
- Bolz, H.M., 1949: Die Abhängigkeit der infraroten Strahlung von der Bewölkung. *Z. Meteorol.* 3, 201-203.
- Bruno, D., 1932: Notes on radiation in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 58, 389-420.
- Brutsaert, W., 1982: Evaporation into the Atmosphere. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Chandrasekhar, S., 1950: Radiative Transfer. Clarendon Press, Oxford.
- Dufour, L. y J. van Mieghem, 1975: Thermodynamique de l'atmosphère. Institut Royal Meteorologique de Belgique, J. Duclos, Gembloux, Belgique.
- Eisner, W. M., 1942: Heat Transfer by Infrared Radiation in the Atmosphere. *Harvard Meteorological Studies* No. 6. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Emden, R., 1913: Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math-Phys. Klasse*, 55-142.

- Gónima, L., 1992: Validation of a radiation model for estimation of longwave net radiation at the surface. *Clim. Res.* 2, 55-63.
- Goody, R. y Y.L. Yung, 1989: Atmospheric Radiation. Theoretical Basis. Oxford University Press, Nueva York.
- Henschel, K., 1956: Theoretische Betrachtungen über empirische Formeln der Gegenstrahlung. *Z. Meteorol.* 10, 302-308.
- Kondratyev, K. Ya., 1969: Radiation in the Atmosphere. Academic Press, London y Nueva York.
- Pekeris, C. L., 1934: Note on Brunt's formula for nocturnal radiation of the atmosphere. *Astrophys. J.* 79, 441-447.
- Pelkowski, J., 1993: Approximating the source function of an atmosphere in radiative equilibrium: A variational method. *Zeit. Phys.* 466, 259-271.
- Pelkowski, J., 1994: Towards an accurate estimate of the entropy production due to radiative processes: Results with a gray atmosphere model. *Meteorol. Atmos. Phys.* 53, 1-17.
- Pelkowski, J., 2007: El albedo terrestre. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 31 (121), 53-74.
- Pelkowski, J., L. Chevallier, B. Rutly, and O. Titus, 2008: Exact results in modeling planetary atmospheres—III. The general theory applied to the Earth's semi-gray atmosphere. *J. Quant. Spectr. Rad. Transf.* 109, 43-51.
- Pelkowski, J., 2009: A physical rationale for generalized Ångström-Preusselt regression. *Solar Energy* 83, 950-963.
- Pujol, T. y G.R. North, 2002: Runaway greenhouse effect in a semigray radiative-convective model. *J. Atmos. Sci.* 59, 2801-2810.
- Raman, P. K., 1935: Derivation of Ångström's formula for atmospheric radiation and some general considerations regarding spectral cooling of air-layers near the ground. *Proc. Ind. Acad. Sci.* 1, 822-829.
- Sellers, W.D., 1965: Physical Climatology. The University of Chicago Press, Chicago.
- Spanier, J. y K.B. Oldham, 1987: An Atlas of Functions. Hemisphere Publishing Corporation, Springer-Verlag, Berlin.
- Vardavas, I.M. y F.W. Taylor, 2007: Radiation and Climate. Oxford University Press, Oxford.

Recibido el 19 de julio de 2009

Aceptado para su publicación el 20 de diciembre de 2009

#### Apéndice A: El aporte estratosférico

De la ecuación (23) se sigue que la contribución estratosférica a la irradiación infrarroja en superficie viene expresada por  $R^i(\tau_{tr}^*)e^{-(\tau_{tr}^* - \tau_s^*)}$ , ligeramente disminuida por el término

$$\sigma T_{tr}^4 \frac{e^{-\tau_s^*}}{\tau_{tr}^* - 1} \int_{\tau_s^*}^{\tau_{tr}^*} t^{1/4} e^t dt \approx \sigma T_{tr}^4 \alpha (1 - 10^{-0.6\tau_s^*}) e^{-(\tau_s^* - \tau_{tr}^*)}$$

El flujo proveniente de una estratosfera en equilibrio radiativo, al nivel de la tropopausa, se puede expresar como

$$R^i(\tau_{tr}^*) = R^i(\tau_{tr}^*) - R^i(0),$$

suponiendo que no incide radiación de onda larga en el tope de la estratosfera ( $R^i(\tau_{tr}^*) = 0$  para  $\tau_{tr}^* = 0$ ), donde reina una presión atmosférica aproximadamente igual a una milésima de la presión atmosférica en superficie. Mediante la transmisividad infrarroja de la estratosfera, que se define como

$$\bar{\tau}_{str} = \frac{R^i(0)}{R^i(\tau_{tr}^*)},$$

y la de la troposfera,

$$\bar{\tau}_{tr} = \frac{R^i(\tau_{tr}^*)}{R^i(\tau_s^*)}$$

el flujo descendente al nivel de la tropopausa asume la forma

$$R^i(\tau_s^*) = R^i(\tau_s^*) \bar{\tau}_{tr} (1 - \bar{\tau}_{str}),$$

y la ecuación (26) se convierte en la expresión:

$$R^i(\tau_s^*) = R^i(\tau_s^*) [\bar{\tau}_{tr} (1 - \bar{\tau}_{str}) - \left(\frac{T_{tr}}{T_s}\right)^4 \alpha (1 - 10^{-0.6\tau_s^*})] e^{-(\tau_s^* - \tau_{tr}^*)}$$

Hemos elegido en la ec. (10), para no alargar innecesariamente este apéndice, una emisividad superficial igual a la unidad ( $\epsilon_s = 1$ ), un valor que no dista mucho de las emisividades normalmente encontradas en la naturaleza (para la arena sería conveniente elegir un valor menor).

La transmisividad de una estratosfera en equilibrio radiativo local se puede obtener sobre la base de la solución (16). En uno de los posibles métodos para determinar los coeficientes  $a$  y  $b$  (a saber: solución de una ecuación integral aproximada, trabajo inédito en curso de publicación), se obtiene  $a = 0.5$  y  $b = a/\bar{\mu}^+$ , además de

$$\bar{\epsilon}_{str} = \frac{2}{2 + \tau_{tr}^*}.$$

La transmisividad troposférica,  $\bar{\epsilon}_{tr} = R^1(\tau_{tr}^*)/R^1(\tau_{tr}^*)$  se calcula a partir de (7). Con el perfil cuasi-lineal y el resultado

$$\int_0^x t^{1/4} e^{-t} dt = x^{1/4} e^{-x} M(1; 5/4; x) - 1]$$

(Spanier & Oldham, 1987), se obtiene:

$$\bar{\epsilon}_{tr} = e^{-(\tau_{tr}^* - \tau_{tr}^0)} M(1; 5/4; \tau_{tr}^*) - \left(\frac{\tau_{tr}^*}{\tau_{tr}^0}\right)^{1/4} [M(1; 5/4; \tau_{tr}^*) - 1].$$

Es evidente que  $\bar{\epsilon}_{tr}$  depende de  $\tau_{tr}^*$ , o sea, del vapor de agua en la troposfera.  $R_2^1(\tau_{tr}^* = 3) = 0.052$   $\text{Wm}^{-2}$  ( $T_s = 288$  K,  $\tau_{tr}^* = 0.0316$ ),  $R_2^1(\tau_{tr}^* = 1.2) = -0.184943$   $\text{Wm}^{-2}$  ( $T_s = 288$  K,  $\tau_{tr}^* = 0.1$ );  $R_2^1(\tau_{tr}^* = 1.2) = -2.24375$   $\text{Wm}^{-2}$  ( $T_s = 288$  K,  $\tau_{tr}^* = 0.2$ ). Vemos que podemos despreciar el aporte (26), corroborando como excelente la aproximación (29) para la irradiación infrarroja relativa al nivel del suelo.

## Apéndice B: La ventana del vapor de agua

En un afán de armonizar el valor de  $a$  con valores de  $a_A$  que uno encuentra en la literatura, siendo éstos cerca de un 20% menores que aquí, vamos a delinear en este apéndice una modificación llana del modelo actual, reemplazando el supuesto de un solo coeficiente de absorción en el infrarrojo (modelo semigris) por el de dos coeficientes con valores medios generalmente distintos (modelo semigris extendido). La posibilidad más inmediata de reducir la radiación devuelta por la atmósfera húmeda es tener en cuenta el hecho de que el vapor de agua no absorbe radiación infrarroja sino débilmente (espectro continuo de absorción) en el intervalo de ondas que corresponde a lo que se conoce como la ventana atmosférica (de 8 a 12  $\mu\text{m}$ ). Con tal fin, introducimos un coeficiente de absorción  $k_w$  que consta de dos valores, uno válido en el intervalo de dicha ventana ( $k_w$ ) y el otro igual al valor que hemos venido usando ( $k_w$ ), correspondiente al complemento infrarrojo de ese intervalo (el espectro infrarrojo se define para longitudes de onda  $\lambda$  tal que  $\lambda > \lambda_c = 4 \mu\text{m}$ ):

$$k_w(\lambda) = k_w[H(\lambda - \lambda_c) + (\epsilon_w - 1)(H(\lambda - \lambda_1) - H(\lambda - \lambda_2))]. \quad (35)$$

En esta expresión se utilizó la función escalón (o de Heaviside),  $H(\lambda - \lambda_c)$ , igual a la unidad para valores  $\lambda > \lambda_c$ , e igual a cero para  $\lambda < \lambda_c$ . Con el cociente  $\epsilon_w = k_w/k_w$  podemos graduar el aporte de la ventana al flujo de radiación.  $\epsilon_w = 0$  si la ventana es absolutamente transparente (ventana limpia), mientras que  $\epsilon_w = 1$  corresponde a nuestro caso semigris anterior (ventana sucia o cubierta).

La irradiancia (11) varía generalmente con la longitud de onda (por medio del irregular coeficiente de absorción en el integrando de la profundidad óptica y, más suavemente, a través de la función de Planck  $\pi B_{\lambda_1}$ , cuya integración con respecto a  $\lambda$  lleva a la ley de Stefan-Boltzmann,  $\sigma T^4$ ). La expresión del flujo monocromático descendente es:

$$R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) = \pi \int_0^{\tau_{\Delta\lambda}^*} e^{-(\tau_{\Delta\lambda}^* - t)} B_{\lambda_1}(t) dt. \quad (36)$$

El flujo holocromático  $R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*)$  resulta de la integración espectral,  $R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) = \int_0^{\infty} R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) d\lambda$ . En el caso semigris original, la integración produce directamente la forma (11), pero en el caso presente se obtiene, en virtud de (35), un flujo que consta de dos partes:

$$R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) = \sigma \int_0^{\tau_{\Delta\lambda}^*} e^{-(\tau_{\Delta\lambda}^* - t)} (1 - \beta_w) T^4 dt + \sigma \int_0^{\tau_{\Delta\lambda}^*} e^{-(\tau_{\Delta\lambda}^* - t)} \beta_w T^4 dt,$$

donde la función

$$\beta_w(T) = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda} = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_{\lambda} d\lambda,$$

es una medida de la anchura de la ventana espectral, y donde ahora

$$\tau_{\Delta\lambda}^* = \int_0^H k_w \rho dz$$

es la profundidad óptica infrarroja omitiendo la ventana espectral, mientras que a la atmósfera dentro de ésta corresponde la profundidad óptica  $\tau_{\Delta\lambda}^* = \epsilon_w \tau_{\Delta\lambda}^*$ , generalmente menor que  $\tau_{\Delta\lambda}^*$ .<sup>2</sup> La función  $\beta_w(T)$  puede aproximarse gracias a un polinomio cúbico de la temperatura (Pujol & North, 2002):  $\beta_w(T) \approx \sum_{j=0}^3 d_j T^j$ , con coeficientes  $d_0 = -0.737774$ ,  $d_1 = 0.00670592$   $\text{K}^{-1}$ ,  $d_2 = -1.39486 \times 10^{-5}$   $\text{K}^{-2}$ ,  $d_3 = 9.02909 \times 10^{-9}$   $\text{K}^{-3}$  (aquellos autores suprimieron por descuido el signo menos de  $d_2$ ).

La contribución de la ventana al flujo  $R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*)$  no es apreciable cuando  $\epsilon_w \ll 1$ , y en una primera aproximación es justo suponer una ventana limpia, de modo que  $\epsilon_w = 0$  (y por ende  $\tau_{\Delta\lambda}^* = 0$ ). Por consiguiente, el flujo anterior se reduce a:

$$R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) = \sigma \int_0^{\tau_{\Delta\lambda}^*} e^{-(\tau_{\Delta\lambda}^* - t)} [1 - \beta_w(T)] T^4 dt.$$

Para no demorarnos integrando esta expresión con nuestro perfil cuasi-lineal, integración que no ofrece mayor problema si recordamos el resultado (24), seleccionemos un valor intermedio apropiado del peso  $(1 - \beta_w)$  tal que:

$$R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*) = \sigma [1 - \beta_w(T_m)] \int_0^{\tau_{\Delta\lambda}^*} e^{-(\tau_{\Delta\lambda}^* - t)} T^4 dt.$$

Con esta modificación al flujo (23), nuestra aproximación original (28) queda modificada por el factor  $[1 - \beta_w(T_m)]$ , y así se obtienen los coeficientes modificados  $a_A$  y  $b_A$  consignados en las ecs. (30) y (31).  $\beta_w$  varía entre  $\beta_w(200) = 0.1177$  y  $\beta_w(330) = 0.28$  para temperaturas troposféricas.

Podemos permitir estas reflexiones afirmando que la introducción de la ventana atmosférica debajo del vapor de agua permite reducir el coeficiente  $a$  en nuestro ajuste (28), explicando así los valores inferiores de los coeficientes de Ångström que se suelen estimar en la regresión de las mediciones de  $R^1(\tau_{\Delta\lambda}^*)$ .

<sup>2</sup>Para simplificar una vez más, estoy empleando el mismo coseno director  $\mu^{\pm}$  en ambas partes del espectro, pero mejor sería introducir  $\tau_{\Delta\lambda}^* = \epsilon_w \tau_{\Delta\lambda}^* \mu^{\pm} / \mu_w^{\pm}$ , con un coseno director  $\mu_w^{\pm}$  menor en la ventana, puesto que en ella la atmósfera es "panda", es decir, más transparente.



