

DINÁMICA CAÓTICA DE CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN EN TRAMPAS DE POTENCIAL

por

Oscar Y. Fajardo¹ & Diógenes Campos^{2,3}

Resumen

Fajardo, O.Y. & Campos, D.: Dinámica caótica de condensados de Bose-Einstein en trampas de potencial. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **31** (119): 241-251, 2007. ISSN 0370-3908.

Se estudia la dinámica caótica de condensados de Bose-Einstein (BEC) dentro de trampas de potencial mediante el uso de una formulación hamiltoniana y un espacio de fase generalizado. El inicio del comportamiento caótico en el sistema se identifica mediante la técnica de secciones de Poincaré y el espectro de evolución; la cuantificación del grado de caoticidad del sistema, en varios escenarios, se hace con base en los exponentes de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov-Sinai (KS).

Palabras clave: Condensado de Bose-Einstein, sección de Poincaré, exponentes de Lyapunov, entropía de Kolmogorov-Sinai.

Abstract

Chaotic dynamics of Bose-Einstein Condensates in Potential traps. An analysis of chaotic dynamics of Bose-Einstein Condensate (BEC) within potential traps is presented by using a Hamiltonian formulation and a generalized phase space. Onset of chaotic behavior of the system is identified by taking advantage of Poincaré sections and evolution spectrum; chaoticity degree is measured by means of Lyapunov exponents and Kolmogorov-Sinai (KS) entropy.

Key words: Bose-Einstein Condensates, Poincaré section, Lyapunov exponents, Kolmogorov-Sinai entropy.

1. Introducción

Bajo condiciones apropiadas un sistema de bosones presenta el fenómeno de condensación de Bose-Einstein (BEC) que es una propiedad de origen cuántico; para su realización experimental se requiere un proceso de enfriamiento del sis-

tema mediante técnicas apropiadas con trampas láser. La formación de un condensado de Bose-Einstein (BEC) se origina en una transición de fase de carácter estadístico que se presenta tanto en un gas ideal de partículas cuánticas bosónicas como en un gas de átomos bosónicos interactuantes; el BEC se forma a temperaturas muy cercanas al cero absoluto.

¹ Escuela de Física, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. E-mail: yofar008@yahoo.es

² Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá. E-mail: dcampos@utadeo.edu.co.

³ Miembro de Número, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá.

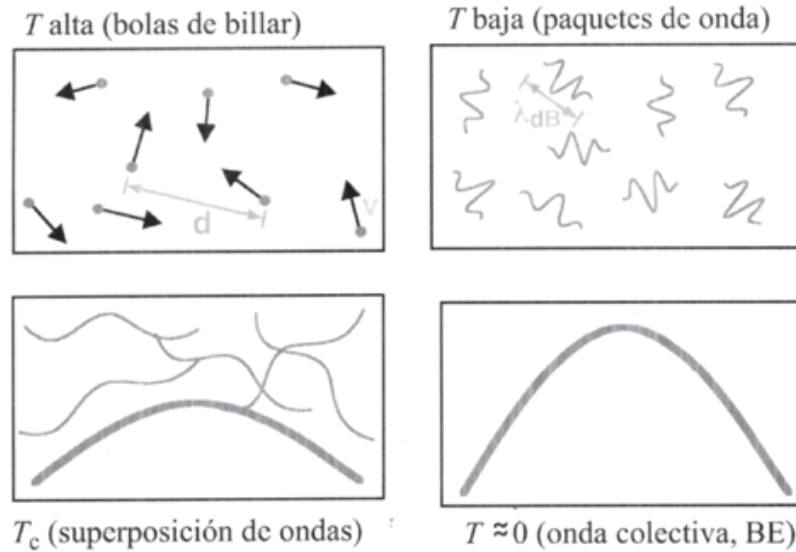


Figura 1: Esquema para describir la aparición del condensado de Bose Einstein: a medida que baja la temperatura del sistema las partículas cambian su comportamiento. Adaptada de <http://online.kitp.ucsb.edu/online/lecture/ketterle/oh/08.html>.

Para entender el proceso que da lugar al BEC conviene recordar algunos conceptos teóricos básicos: (a) En la mecánica clásica el estado de una partícula de masa m se identifica por sus variables de posición y de momento, (\mathbf{r}, \mathbf{p}) . (b) En la mecánica cuántica existe la dualidad onda-partícula en la que ellas se propagan como ondas pero se detectan como partículas. (c) La naturaleza del comportamiento de las partículas, clásico o cuántico, depende del resultado de comparar la distancia típica d entre las partículas del sistema y la longitud de onda de de Broglie (ver figura 1)

$$\lambda_{dB} := \frac{2\pi\hbar}{p} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi mkT}}, \quad (1)$$

donde \hbar es la constante de Planck (reducida) y T la temperatura del sistema. (d) A altas temperaturas, $\lambda_{dB} \ll d$ el comportamiento es clásico como si las partículas fuesen bolas de billar; a bajas temperaturas, $\lambda_{dB} < d$, las partículas se comportan como ondas con la longitud de onda de de Broglie; cuando $\lambda_{dB} \approx d$, se alcanza la temperatura crítica T_c que permite la superposición de ondas de materia y la existencia del fenómeno de condensación de BE; a muy bajas temperaturas, $T < T_c$, $\lambda_{dB} \gg d$, todo el condensado se comporta como una onda de materia gigante. La temperatura crítica T_c depende de la masa y del espín de los bosones, al igual que del número de partículas por unidad de volumen.

El comportamiento de un átomo del condensado se describe por la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) (Dalfvo,

1999),

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \nu_0 U_0 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

que es una ecuación de Schrödinger no lineal, donde ν_0 es el número de partículas en el condensado y $U_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ una constante de acoplamiento que describe la interacción entre pares de partículas, con a_s la longitud de dispersión de ondas- s , y $V_{ext}(\mathbf{r})$ el potencial externo que mantiene confinado el condensado.

El propósito de este trabajo es aplicar la ecuación de Gross-Pitaevskii en varios escenarios (figura 2):

1. Condensado de BE en una red óptica inclinada (figura 2, izquierda), que se describe por la expresión

$$V_{ext}(x) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + Fx, \quad (3)$$

con parámetros apropiados (V_0, d, F). La red inclinada se genera en la práctica como una superposición de dos ondas láser que se propagan en direcciones contrarias y presentan un desfase que varía linealmente. Se genera así una onda plana de longitud de onda λ , que genera una constante de red $d = \lambda/2$. En el marco de referencia no inercial de la onda, este efecto se contextualiza como una inclinación de la red.

2. Condensado de BE en un potencial tridimensional armónico

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 + \omega_3 z^2), \quad (4)$$

en un régimen fuertemente repulsivo (figura 2, centro), donde $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ son frecuencias que caracterizan la trampa.

3. Condensado de BE en un potencial tipo cosenoidal (figura 2, derecha), de la forma

$$V_{ext} = V_0 \cos(\kappa x), \quad \text{con } \kappa = \frac{2\pi}{d}. \quad (5)$$

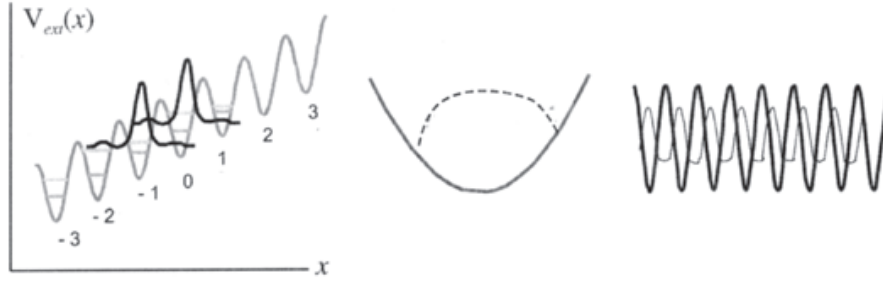


Figura 2: Descripción de los tres escenarios empleados: (Izquierda) BEC dentro de una red óptica inclinada modelado empleando los estados de W-S más bajos en cada pozo. (Centro) Perfil de un BEC dentro de un potencial tipo armónico y en el régimen de interacción fuertemente repulsivo. (Derecha) Perfil de un BEC dentro de un potencial tipo cosenoidal.

2. Condensado de BE en una red óptica inclinada

Los estados de Bloch son los estados propios del hamiltoniano asociado con una partícula que se mueve en una red periódica, ecuación (3) con $F = 0$. Si la red tiene una inclinación ($F \neq 0$), los estados propios del hamiltoniano son los estados de Wannier-Stark (WS). Estos estados se pueden emplear para estudiar un condensado de Bose-Einstein dentro de una red óptica inclinada; es decir, un sistema con un gran número de partículas interactuantes (Thommen, 2003).

2.1. Descripción del modelo

Desígnese como $\varphi_{nm}(x)$ el estado de Wannier-Stark localizado en el pozo n de la red y rotúlese con el índice m las diferentes bandas en ese pozo. Estos estados, que son altamente localizados, son invariantes ante traslaciones de un número entero de pasos de red,

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}(x) &= \varphi_{0m}(x - n) \\ E_{nm} &= E_{0m} + n\omega_B. \end{aligned} \quad (6)$$

La ecuación de Gross-Pitaevskii (2) toma la forma

Este trabajo se fundamenta en los artículos de Thommen *et al* (2003), Salasnich (2000) y van Noort *et al* (2007). El propósito es el estudio de los escenarios ya citados con el fin de entender los regímenes dinámicos que se originan en la evolución temporal. El énfasis se centra en el estudio de la evolución temporal del sistema y, en la última parte, en la dinámica espacial.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} &= \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{ext}(x) + U_0 |\Psi(x,t)|^2 \right) \Psi(x,t), \end{aligned} \quad (7)$$

donde la energía potencial $V_{ext}(x)$ es dada por (3). La función de onda del condensado de BE se expande ahora en términos de los estados de Wannier-Stark más bajos en la red inclinada, que denominaremos como $\varphi_n(x)$:

$$\Psi(x,t) = \sum_n C_n(t) \varphi_n(x), \quad C_n(t) = \sqrt{I_n} e^{i\theta_n}; \quad (8)$$

los coeficientes de la expansión son números complejos que se escriben como el producto de un módulo por una fase, lo que permite interpretar I_n como la población de condensado localizada en el pozo n -ésimo.

El sistema dinámico que rige la evolución de la población

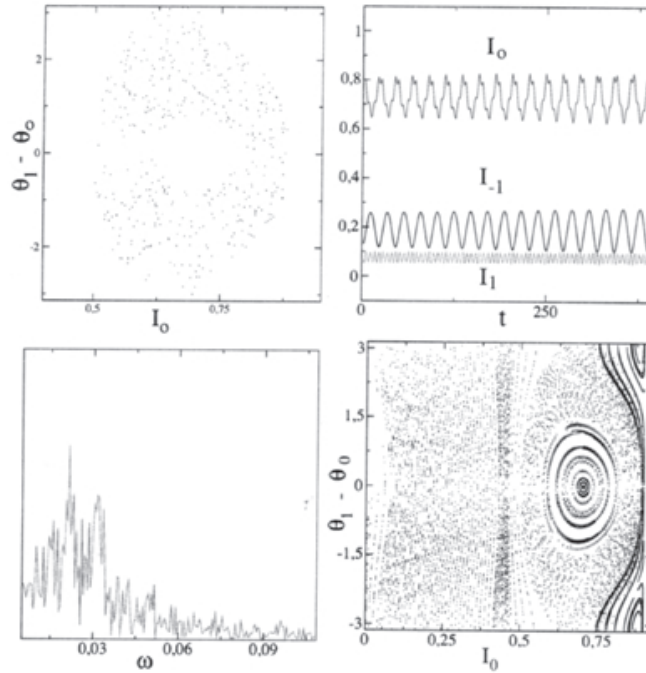


Figura 3: Caracterización dinámica, con condición inicial ($I_{-1} = 0.1, \theta_{-1} = 0, I_0 = 0.78, \theta_0 = 0, I_1 = 0.12, \theta_1 = 0$). La sección de Poincaré individual (superior izquierda) despliega características de comportamientos caóticos, predicción confirmada por el espectro de evolución (inferior izquierda) de la condición inicial simulada. (Inferior derecha) Sección de Poincaré mostrando los diferentes regímenes dinámicos del sistema.

y de la fase del pozo n -ésimo de la red es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{I}_n &= \epsilon f(I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}), \\ \dot{\theta}_n &= -nF - \sigma_g I_n + \epsilon S(I_{n-1}, I_n, I_{n+1}, \theta_{n-1}, \theta_n, \theta_{n+1}), \end{aligned} \tag{9}$$

donde ϵ es un parámetro de control, cuyo valor lo determina el grado de interacción entre las fracciones de condensado de pozos adyacentes ($n - 1, n, n + 1$); $f(\dots)$ y $S(\dots)$ son funciones apropiadas; σ_g es un parámetro que depende de valores característicos del sistema.

Como se puede ver, el sistema no perturbado admite la estructura ángulo-acción; es decir, si $\epsilon = 0$,

$$I_n = I_n(0) = \text{constante}, \quad \theta_n = \theta_n(0) + \omega_n t,$$

donde

$$\omega_n = \omega_n = -nF - \sigma_g I_n = n w_B + \frac{U_o \chi_{ooo}}{h} I_n \tag{10}$$

es una frecuencia característica del sistema no perturbado (χ_{ooo} es una constante). Las trayectorias tienen lugar sobre toroides en el espacio de fase.

La condición inicial del sistema dinámico (9) se fija distribuyendo el condensado entre los pozos de la red inclinada. A partir de este estado inicial se sigue la evolución temporal del condensado en cada uno de los pozos de la red, para lo cual se hace uso de variables canónicamente conjugadas $\{I, \theta\}$, que corresponden a la población y a la fase del condensado, respectivamente.

2.2. Resultados numéricos

En el caso de acoplamiento entre los pozos, se tiene $\epsilon \neq 0$ en las ecuaciones (9). Los resultados de la simulación que se presentan aquí, que se obtuvieron al emplear un método de paso adaptativo tipo Runge-Kutta para evoluciones temporales no muy lejanas, muestran los aspectos más relevantes de la topología del espacio de fase del sistema. Existen dos grandes regiones, una completamente regular de toroides conectados ligeramente deformados y una zona en la cual coexisten algunos comportamientos regulares dentro de un mar caótico. Se muestra el espectro de evolución de una trayec-

toría perteneciente a este último régimen (ver figura 3) que, como se puede ver, revela características propias de una evolución caótica.

Los comportamientos caóticos se presentan en la región del espacio de fase para la cual las frecuencias del sistema no perturbado se relacionan en forma racional, caso en el cual se tiene una resonancia:

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} = \frac{a}{b}, \quad a \text{ y } b \text{ enteros.}$$

Cuando $a = b = 1$ (resonancia 1:1), la condición de resonancia es $\hbar\omega_B = U_0\chi_{000}(I_0 - I_1)$.

En conclusión, como lo muestra el análisis, la dinámica del condensado BE dentro de una red óptica inclinada tiene un variado comportamiento: el espacio de fase consiste principalmente de dos regiones, una regular en la cual el sistema oscila periódicamente y la otra en la cual el condensado se caracteriza por movimientos caóticos originados cerca de la condición de resonancia. Se ha empleado un espacio de fase generalizado, donde el rol principal lo desempeña los coeficientes utilizados en la expansión de la función onda del condensado.

3. Condensado de BE en un potencial armónico

En esta sección se sigue a Salasnich (2000) para analizar la dinámica de un condensado de Bose-Einstein dentro de una trampa modelada por el potencial (4), en un régimen de interacciones repulsivas con un número grande de átomos en estado de condensación. El análisis se realiza a partir de un sistema dinámico de carácter hamiltoniano que describe la evolución temporal de un conjunto $\{q_i\}$ de coordenadas generalizadas. Dichas coordenadas están directamente relacionadas con los coeficientes utilizados en la expresión de una clase de soluciones analíticas encontradas para la densidad del condensado, por lo tanto el análisis dinámico de este sistema es un mecanismo válido para inspeccionar la evolución del condensado en las condiciones señaladas.

3.1. Descripción del modelo

Supóngase que el condensado está en condiciones tales que $N|a_s/a_h| \gg 1$, con a_s la longitud de onda- s , que mide esencialmente el rango y el tipo de interacción entre partículas, a_h un parámetro que caracteriza el diámetro medio del condensado y $N = \nu_0$ el número de bosones presentes en el condensado. Esta última relación esencialmente es una escala que enuncia el rango en el cual los efectos de interacción llegan a ser importantes para la dinámica del sistema, ya que expresa la importancia de la interacción átomo-átomo comparada a la energía cinética de las partículas (Dalfovo, 1999).

$$\frac{E_{interaccion}}{E_{cinetica}} \propto N \frac{|a_s|}{a_h}$$

En este régimen y para este tipo de trampa, la ecuación de GP puede ser reescrita en forma de dos ecuaciones con características formales semejantes a ecuaciones hidrodinámicas acopladas que describen la naturaleza coherente del sistema (Salasnich, 2000).

Escribbase la función de onda en términos de un módulo ρ que describe la densidad del condensado y de una fase S que lleva la información de la coherencia del sistema:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (11)$$

expresando $\rho(\mathbf{r}, t)$ en la forma $\rho(x, y, z, t) = a_0(t) - a_1(t)x^2 - a_2(t)y^2 - a_3(t)z^2$, en la región en que es positiva. La transformación de variables $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (q_1, q_2, q_3)$, con $a_i = m\omega_i^2(2gq_i^2q_1q_2q_3)^{-1}$, conduce al siguiente sistema dinámico de carácter hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\perp &= 2p_\perp, & \dot{p}_\perp &= -2q_\perp + \frac{2}{q_\perp^3 q_3}, \\ \dot{q}_3 &= \lambda^2 p_3, & \dot{p}_3 &= -q_3 + \frac{1}{q_\perp^2 q_3^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\{q_\perp, q_3\}$ son coordenadas que describen la parte axial y longitudinal del condensado, respectivamente. El carácter hamiltoniano del sistema dinámico anterior permite analizar la evolución temporal del condensado por medio del comportamiento temporal de coordenadas canónicamente conjugadas, $\{(q_\perp, p_\perp), (q_3, p_3)\}$. Por otro lado, la integración del sistema dinámico permite la visualización de los diferentes regímenes dinámicos.

3.2. Resultados numéricos

Los resultados numéricos, que se obtuvieron al simular el sistema vía un método de composición de 8° orden, revelan un espacio de fase desplegando características regulares para energías muy cercanas al mínimo de energía potencial del sistema (ver figura 4, superior izquierda). Para mayores energías el espacio de fase presenta características mezcladas; una gran parte del espacio de fase accesible es cubierto por órbitas caóticas que coexisten con pequeñas regiones de naturaleza regular (figura 4).

El análisis muestra que el inicio de comportamientos caóticos se da para energías cercanas a $E = 2.925$ (figura 4, superior derecha), lo cual corresponde a un incremento de $\chi = 17\%$ respecto al mínimo de energía potencial. Incrementos de energía a partir de este valor producen un fortalecimiento de la región caótica y la subsecuente destrucción de toroides que estaban ligeramente deformados. La caracterización cuantitativa confirma estas conclusiones, mostrando un progresivo incremento del valor de la entropía de Kolmogorov-Sinai en función de la energía del sistema (ver figura 5 y 6).

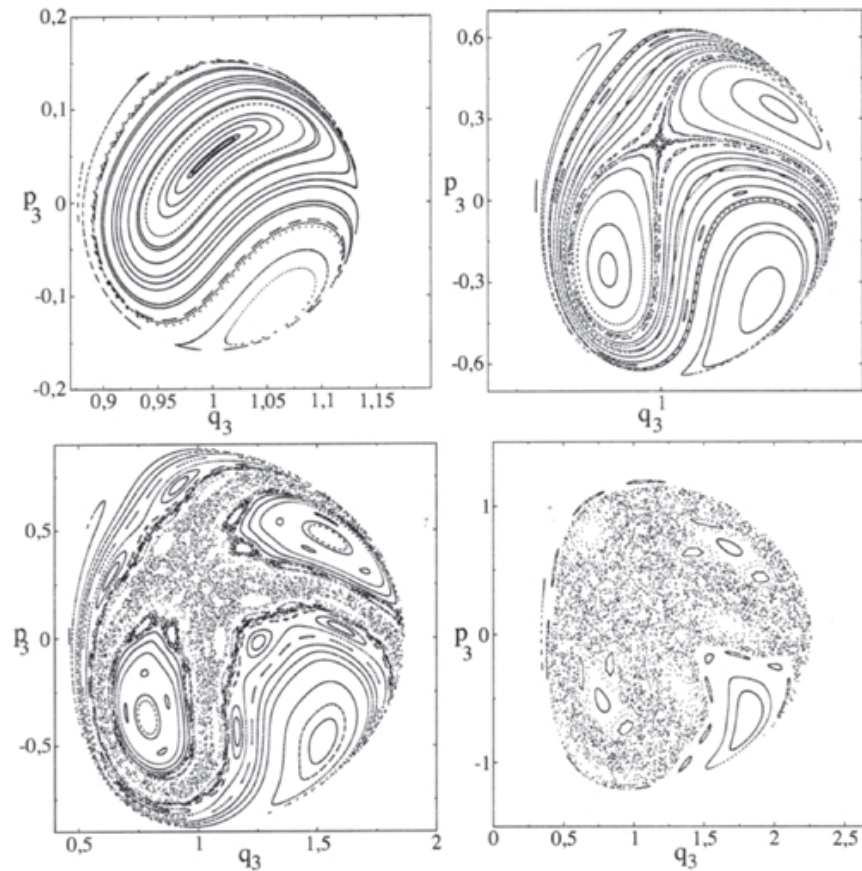


Figura 4: Caracterización cualitativa de la dinámica del condensado de BE; en esta figura se muestra la transición orden-caos con ayuda de las secciones de Poincaré. Se destaca el inicio de comportamientos caóticos para una energía del sistema $E = 2.925$, conclusión confirmada y cuantificada posteriormente. Superior izquierda: $E = 2.525$, $\chi = 1$, la dinámica del sistema es enteramente regular. Superior derecha: $E = 2.925$, $\chi = 17$, aparecen los primeros comportamientos caóticos, contextualizados en la destrucción de los primeros toroides del sistema. Inferior izquierda: $E = 3.275$, $\chi = 31$, el incremento de la energía del sistema conlleva un número mayor de toroides destruidos y de ahí un fortalecimiento de la región caótica. Inferior derecha: $E = 4.0$, $\chi = 60$, gran parte del espacio de fase accesible al sistema es cubierto por una mar caótica y solo sobreviven pequeñas regiones con dinámica regular.

Durante las simulaciones numéricas se rastreó la preservación del volumen en el espacio de fase, empleando para ello el criterio $\sum_i \lambda_i$, que es útil para sistemas hamiltonianos.

El análisis numérico que se realizó muestra que los efectos no-lineales, producto de la interacción entre partículas, se incrementan fuertemente con el aumento de la energía del sistema, al igual que por el cambio en la anisotropía de la trampa; en estos casos las trayectorias caóticas llegan a

ocupar grandes regiones del espacio de fase accesible.

4. Condensado de BE en un potencial cosenoidal

En la tercera y última parte de este trabajo, se inspecciona el comportamiento espacial de la función de onda de un condensado dentro de una red óptica de estructura espacial de tipo cosenoidal, ecuación (5). La función de onda del sistema se expresa en términos de una amplitud a lo largo de la

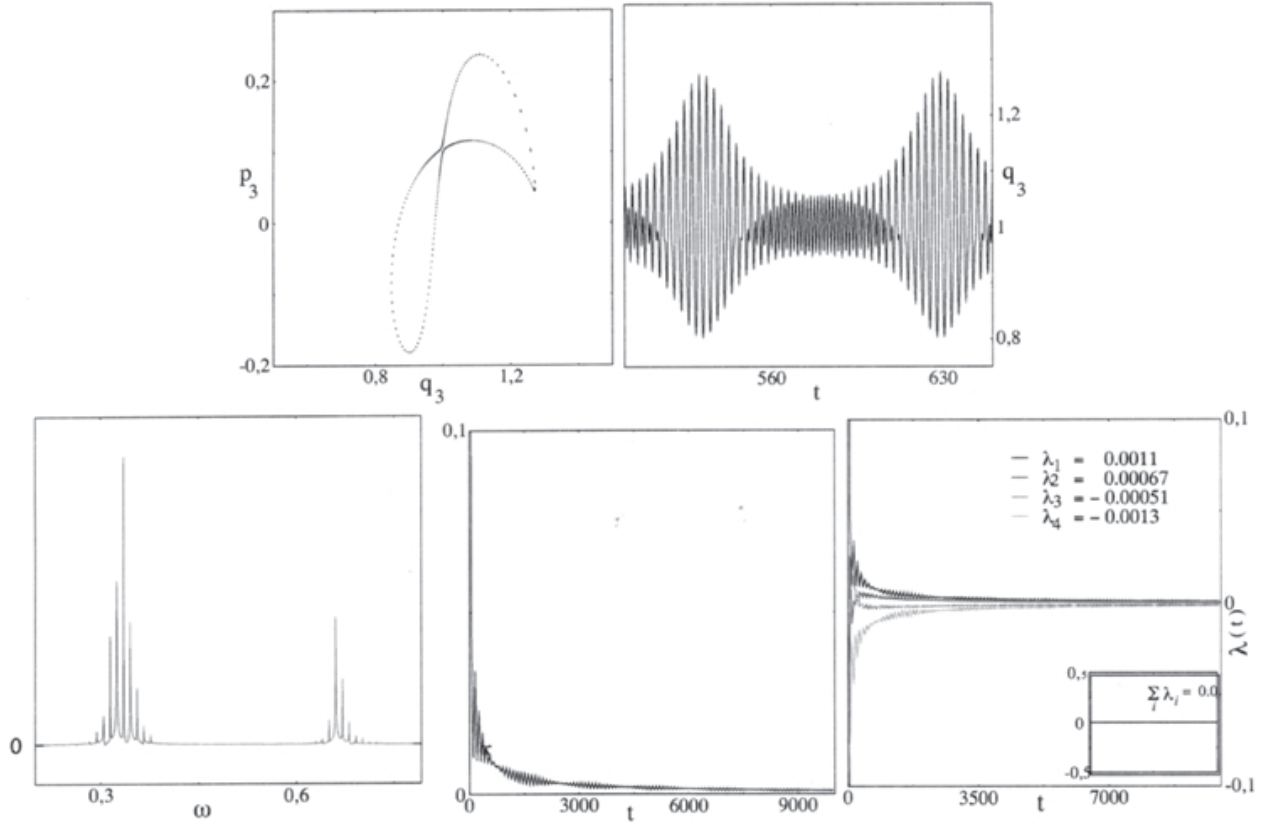


Figura 5: Caracterización dinámica de la condición inicial ($q_3 = 1.0$, $p_3 = 0.1$) correspondiente a la energía ($E = 2.6$, $\chi = 4$). La sección de Poincaré revela características de comportamientos regulares, conclusión confirmada por el espectro de evolución y los picos bien definidos característicos de comportamientos periódicos y cuasiperiódicos. La caracterización cuantitativa revela una convergencia ($t \rightarrow \infty$) de los exponentes de Lyapunov y del valor de la entropía de Kolmogorov-Sinai hacia cero y una preservación del volumen en el espacio de fase ($\sum_i \lambda_i = 0$).

red y una fase. Se obtiene un sistema dinámico para la amplitud, semejante al del modelo de Duffing, más un término adicional que se origina en la red óptica; el sistema dinámico tiene todas las características formales de un forzamiento, por lo cual se acuña en la literatura el nombre de término de forzamiento, mientras que para el modelo se usa el nombre de tipo Duffing forzado (van Noort *et al.*, 2007).

El espacio de fase del sistema revela una topología en la cual una región caótica está rodeada por curvas suaves, típicas de comportamientos regulares. Esta característica se presenta a partir del momento en el que los comportamientos caóticos entran en escena, como es indicado por los resultados numéricos incluidos en la última parte de esta sección.

4.1. Descripción del modelo

Para estudiar el comportamiento de un condensado dentro de una red óptica espacialmente periódica, seguimos a (van Noort *et al.*, 2007) y analizamos la evolución espacial de la amplitud.

Acéptese para la función de onda unidimensional del condensado de BE la forma

$$\Psi(x, t) = R(x)e^{i[\theta(x) - \mu t]} \quad (13)$$

donde $R(x)$ y $\theta(x)$ son una funciones reales que representan la amplitud y fase de la función de onda, respectivamente. Al introducir este expresión en la ecuación de Gross-Pitaevskii,

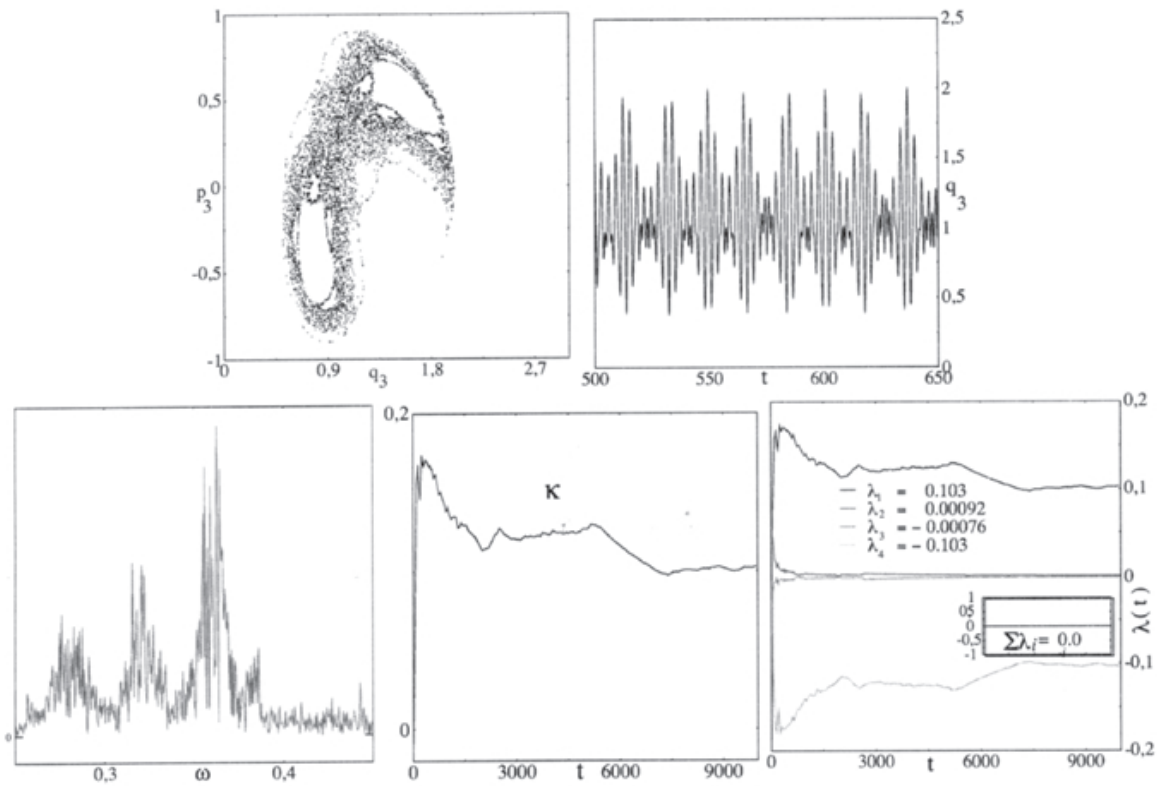


Figura 6: Caracterización dinámica de la condición inicial ($q_3 = 1.05, p_3 = 0.25$) correspondiente a la energía ($E = 3.5, \chi = 40$). La sección de Poincaré revela características de comportamiento caótico, predicción confirmada por el espectro de evolución y el inicio de formación de un fondo ancho. La caracterización cuantitativa revela un grado de caoticidad ($\lambda > 0$) como lo indica el valor del máximo exponente de Lyapunov ($\lambda_1 = 0.103$) y el valor positivo de la entropía de Kolmogorov-Sinai ($\kappa = 0.103$). La eficiencia de los algoritmos se verifica examinando la preservación del volumen en el espacio de fase ($\sum_i \lambda_i = 0$) y la verificación de la importante característica de organización en parejas con aproximadamente igual valor numérico y de signo contrario en el espectro de Lyapunov como se espera para este tipo de sistema.

(2), después de separar la parte real e imaginaria se obtiene:

$$\hbar\mu R(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}R''(x) + \left[\frac{\hbar^2}{2m}(\theta'(x))^2 + g|R(x)|^2 + V_{ext}(x) \right] R(x) \quad (14)$$

$$0 = \frac{\hbar^2}{2m} [2\theta'(x)R'(x) + R(x)\theta''(x)] \quad (15)$$

con $'' \equiv d^2/dx^2$. Tomando las soluciones de ondas planas (el caso específico $\theta(x) = 0$) el sistema resultante se simplifica

en la forma

$$R''(x) = -2 \left\{ \frac{m\mu}{\hbar} - \frac{m}{\hbar^2} V_{ext}(x) \right\} R(x) + \frac{2mg}{\hbar^2} R^3(x), \quad (16)$$

que es una ecuación de tipo Duffing con un término de forzamiento que se origina en la estructura de la red.

Después de aplicar la regla de la cadena y reescalar el período de forzamiento a 1, $\xi = x/T \text{ mod } 1$, se obtiene el sistema dinámico

$$\begin{aligned} S(x) &= R'(x) \\ S'(x) &= -\frac{\partial}{\partial R} U(\xi, R) \quad \text{donde: } ' \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \xi' &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

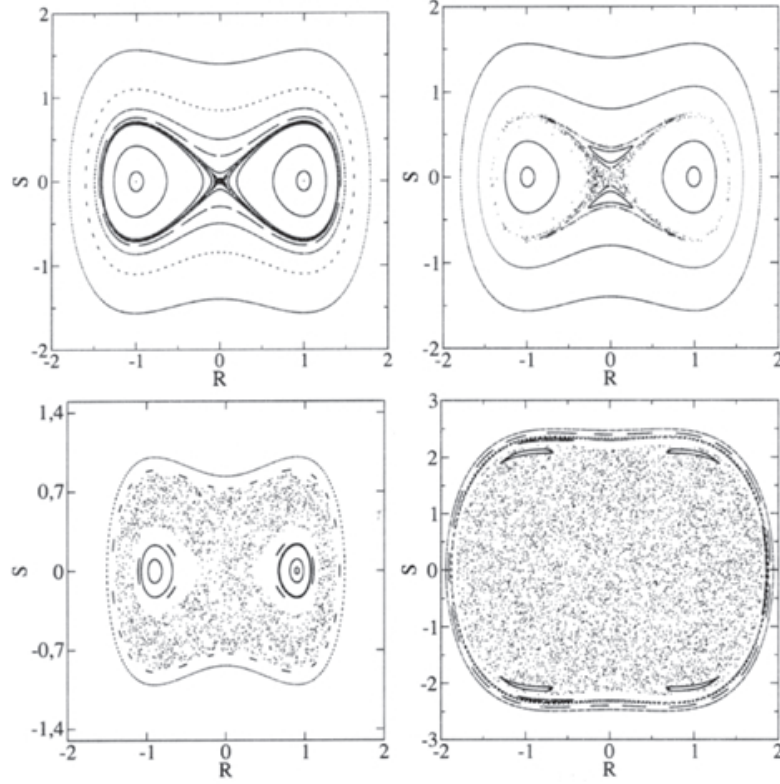


Figura 7: Secciones de Poincaré ilustrando la transición orden-caos en el sistema. La amplitud $R(X)$ de la función de onda presenta características de tipo periódico y cuasiperiódico para magnitudes del potencial de forzamiento $V_1 = 0.001$, superior derecha. Para valores del potencial cercanos a $V_1 = 0.007$ se presentan los primeros comportamientos caóticos producto de la destrucción de algunos toroides, superior izquierda. Para valores mayores la extensión de región caótica presenta un fuerte incremento, haciéndose notar una coexistencia de un mar caótico siempre rodeado de algunos toroides preservados, $V_1 = 0.1$ inferior derecha e $V_1 = 1.0$ inferior izquierda, respectivamente.

Se trata de un sistema dinámico hamiltoniano,

$$\begin{aligned}
 H(R, S, \xi) &= \frac{1}{2}S^2 + U(R, \xi) \quad \text{con} \\
 U(R, \xi) &= Z_2(\xi)R^2 + Z_4(\xi)R^4, \\
 Z_2 &= T^2 \left(\frac{m\mu}{\hbar} - \frac{m}{\hbar^2} V_{ext}(x) \right), \\
 Z_4 &= -\frac{T^2 mg}{2\hbar^2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Hágase ahora uso de la forma explícita del potencial, $V_{ext}(x) = V_1 \cos(\kappa x)$, $\kappa = \frac{2\pi}{T}$, para obtener así el siste-

ma dinámico

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial S} &= S, \\
 \frac{\partial V}{\partial R} &= \alpha_1 R + V_1 \cos(\kappa x) R - \alpha_3 R^3, \\
 x' &= 1,
 \end{aligned} \tag{19}$$

con los parámetros

$$\alpha_1 = \frac{2T^2 m\mu}{\hbar}, \quad \alpha_3 = \frac{2T^2 mg}{\hbar^2}.$$

4.2. Resultados numéricos

La simulación dinámica del sistema, que se realizó mediante un método de composición de 8° orden, revela que para pe-

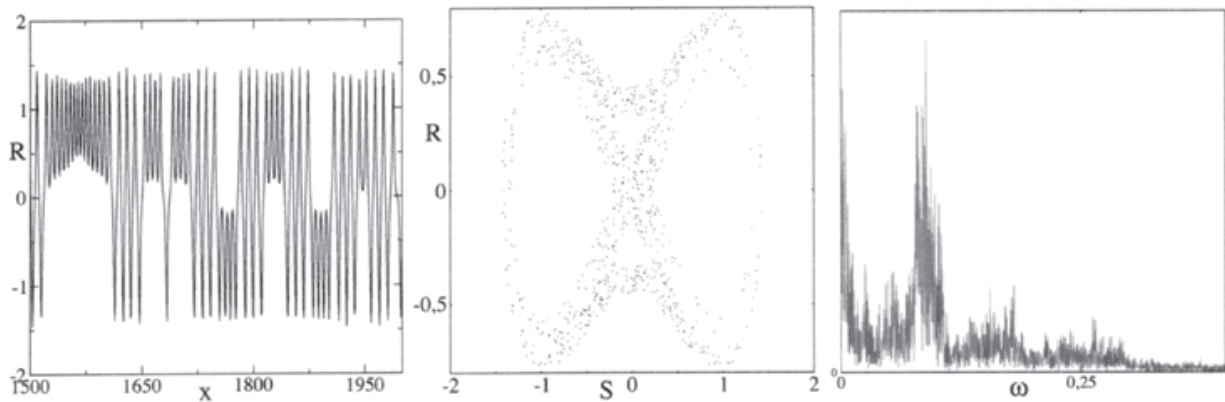


Figura 8: Caracterización del comportamiento caótico en $V_1 = 0.02$, correspondiente a la condición ($R = 0.01, S = 0.01$). La sección individual y el espectro de evolución indican un comportamiento caótico.

queños valores del potencial la dinámica del sistema es enteramente de tipo regular, como lo indican las secciones de Poincaré en la figura 7. El inicio de comportamientos caóticos se presenta cerca del valor de potencial $V_1 = 0.007$; para valores más grandes se presenta un ensanchamiento de esta región.

Otra característica relevante es la coexistencia de dos regiones bien definidas, una región enteramente caótica y la otra de tipo regular rodeando la anterior, para potenciales mayores al que produce el inicio de caos. Estas conclusiones son ratificadas por las secciones de Poincaré presentadas y el espectro de evolución calculado para la trayectoria mostrada (figura 8). Todas las gráficas corresponden al conjunto de parámetros ($\alpha_1 = -1, \alpha_3 = -1$), pero las mismas características se observan para otros valores, con la única condición que $g < 0$ para la cual el análisis dinámico presentado es válido.

5. Conclusiones

En resumen, en este artículo se analizó la evolución dinámica de la población del condensado para diferentes regímenes dinámicos y en varios escenarios importantes. Como principal resultado se resalta la posibilidad de comportamientos caóticos en su evolución tanto en el aspecto temporal como en el espacial, conclusión confirmada por los resultados cualitativos y cuantitativos obtenidos a través del empleo de la técnica de secciones de Poincaré, espectros de evolución así como de exponentes de Lyapunov. Para información básica sobre estos conceptos consultar, por ejemplo, **Ott, 1993**,

o **Campos & Isaza, 2002**.

En el primer escenario estudiado, un condensado de BE dentro de una red óptica inclinada, la existencia de comportamientos caóticos se presenta para valores del parámetro de interacción entre pozos cercanos a $0.15/1.99$.

En el segundo escenario, condensado de BE sujeto a un potencial de trampa tipo armónico, el inicio de comportamientos caóticos tiene lugar para valores de la energía cercanos a $E = 2.925$, valor que corresponde a un incremento del 17% con respecto al mínimo de energía potencial del sistema.

En el tercer escenario, estructura espacial periódica, el inicio de comportamientos caóticos se da para un valor del potencial cercano a $V_1 = 0.007$.

Agradecimientos

Uno de los autores (OYF) agradece las lecciones recibidas en el curso *Métodos de simulación en Física* impartido por el profesor Jose Daniel Muñoz de la Universidad Nacional de Colombia.

Referencias

- Thommen Q., Garreau J.C., and Zehnlé V.**, 2003. "Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices", *Phys. Rev. Lett.* **91** 210405-1.
- Salasnich L.**, 2000. "Resonances and Chaos in the Collective Oscillations of a Trapped Bose-Einstein condensates", *Phys. Lett. A* **266** 187.
- van Noort M., Porter M.A., Yi Y., and Chow S.N.**, 2007. "Quasi-periodic Dynamics in Bose-Einstein Condensates in Periodic Lattices", *Phys. Rev. Lett.* **98** 254101-1.

ces and Superlattices”, *Journal of Nonlinear Science* **17** 59.

Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L., and Stringari S., 1999. “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463.

Ott E., 1993. *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press.

Campos, D. & Isaza, J. F., 2002. *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*, Universidad Nacional de Colombia, El Malpensante, Bogotá.

Recibido el 25 de junio de 2007.

Aceptado para su publicación el 12 de julio de 2007.

