

ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO MULTIFRACTAL PARA SERIES DE PRECIPITACIÓN HORARIA EN LOS ANDES TROPICALES DE COLOMBIA

Por

Jesús D. Gómez¹ & Germán Poveda²

Resumen

Gómez, J. D. & G. Poveda: Estimación del espectro multifractal para series de precipitación horaria en los Andes Tropicales de Colombia. *Rev.Acad.Colomb.Cienc.* **32(125):** 483-502, 2008. ISSN 0370-3908.

El espectro multifractal, $f(\alpha)$, fue estimado para registros de precipitación horaria en 47 estaciones ubicadas en los Andes tropicales de Colombia mediante cinco metodologías distintas. Cada una de las metodologías fue aplicada a series provenientes de medidas binomiales, de las cuales se conoce su espectro multifractal teórico. Los resultados permiten concluir que: (i) todas las metodologías presentan resultados satisfactorios en la estimación de $f(\alpha)$ para las medidas binomiales sintéticas (ii) las cinco metodologías presentan estimaciones muy diferentes del espectro para las series temporales de lluvia a escala horaria (iii) se encuentran valores muy variables de la fuerza multifractal, $\Delta\alpha$, variando desde 0.66 a 7.4 (iv) el exponente de Renyi, $\tau(q)$, puede ser representado por un modelo simple, basado en la generalización de un modelo de cascadas multiplicativas (v) No se encontró una relación clara entre los parámetros encontrados en este trabajo y la elevación. Finalmente se presenta una discusión en torno a las características de los modelos y los problemas de estimación en series de lluvia a resolución horaria.

Palabras clave: Multifractales, Modelación, Precipitación, Andes tropicales, Colombia.

1 Escuela de Geociencias y Medio Ambiente, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. New Mexico Institute of Mining and Technology, Socorro, NM 87801, U. S. Correo electrónico: jdgomez@nmt.edu

2 Escuela de Geociencias y Medio Ambiente, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. Correo electrónico: gpoveda@unal.edu.co

Abstract

The multifractal spectrum, $f(\alpha)$, was estimated for hourly rainfall records of 47 gauges located at the tropical Andes of Colombia using five different methodologies. All of these methodologies were applied to binomial measures, which have a well known theoretical multifractal spectrum. From the results, it is possible to conclude the following: (i) all methodologies have satisfactory results in the estimation of $f(\alpha)$ for the synthetic binomial measures; (ii) the five methodologies showed different estimations for the rainfall time series spectrum; (iii) the multifractal strength, $\Delta\alpha$, showed a wide range of values, varying from 0.66 to 7.4; (iv) the Renyi exponent, $\tau(q)$, could be represented by a simple two-parameter model, which is based on a generalized version of the multiplicative cascade model; and (v) no clear relationship between the parameters used in this research and elevation was found. Finally, a discussion about the characteristics of the models and problems in the spectrum estimation for hourly time series is presented.

Key words: Multifractals, Modelling, Precipitation, Tropical Andes, Colombia.

1. Introducción

En el presente trabajo se pretende aplicar metodologías orientadas al estudio de las propiedades de escalamiento para series de tiempo de precipitación en los Andes tropicales de Colombia. En trabajos anteriores se han realizado estudios similares para otras regiones (Olsson, 1995; Harris et al., 1996; Svensson et al., 1996; de Lima & Grasman, 1999; Sivakumar, 2001; Kantelhardt et al., 2003), sin embargo este tipo de estudios no son fácilmente generalizados y cambian notablemente con las características de la región analizada, y, en particular, presentan una relación directa con el origen de la lluvia, ya sea convectivo o advectivo, siendo común la presencia de multiescalamiento en campos con génesis convectiva. En el caso de los Andes tropicales de Colombia se cuenta con un precedente de investigación orientada al entendimiento de la lluvia a partir de las series de precipitación horaria utilizadas en este trabajo, en el cual se realizó un diagnóstico del ciclo diurno promedio a largo plazo, así como durante los diversos meses del año, y la influencia que en éste se presenta a partir de la variabilidad altitudinal y ubicación entre los valles interandinos de los ríos Cauca y Magdalena. Además, se evaluó su comportamiento durante la ocurrencia de fenómenos macroclimáticos y astronómicos como el ENSO, la oscilación de Madden-Julian, las ondas tropicales del este (4-8 días), las fases de la luna y los huracanes en los océanos Atlántico y Pacífico, y se aplicaron teorías de escalamiento y colas pesadas, análisis de intermitencia, intensidades máximas y valores extremos (Agudelo et al., 2001; Álvarez & Toro, 2001; Vieira & Moreno, 2001; Poveda et al., 2005).

En las últimas cuatro décadas, la comunidad científica ha tratado de entender el comportamiento de la

atmósfera, y en particular de campos de precipitación a nivel espacial y temporal, con especial énfasis en el primero, por medio de modelos de cascada, que admiten una fuerte anisotropía e intermitencia de las escalas en dichos campos y por ende la presencia de campos multifractales altamente variables (Schertzer & Lovejoy, 1996; Tessier, 1993). El problema, es básicamente entender cómo y en qué escalas se presenta el proceso de cascada de los campos de precipitación.

La base teórica de la modelación de campos atmosféricos como medidas multifractales está fundada en que los flujos de agua y energía en la atmósfera son representados por procesos de cascadas multiplicativas (Peitgen et al., 1992), los cuales transfieren dichas cantidades de escalas mayores a menores (Gupta & Waymire, 1993; Olsson, 1995; Schertzer & Lovejoy, 1996; Schertzer et al., 1997). Esta hipótesis se fundamenta en teorías y experimentos. Teóricamente, el fenómeno de la cascada puede ser deducido a partir de las ecuaciones de la turbulencia hidrodinámica, las cuales se asumen aproximadamente válidas para la atmósfera, y empíricamente, las observaciones muestran una estructura jerárquica en los campos de lluvia (Olsson, 1995). El proceso de cascada es definido como remolinos que se parten en sub-remolinos, de los cuales cada uno recibe una parte de la masa (energía) del remolino padre. De esta forma, la parte principal del flujo es concentrado en porciones cada vez más pequeñas del dominio, dando como resultado un campo con extrema variabilidad e intermitencia.

La invarianza de las propiedades de escala y la multifractalidad en los procesos de la lluvia sobre una gran cantidad de escalas, permite el entendimiento de sus fluctuaciones fuertes e irregulares, lo cual no puede ser totalmente captado a partir de otras descripciones de la

dinámica compleja de la lluvia tropical. El principal objetivo de la teoría multifractal y sus modelos en el caso de la lluvia, es darle uso como una herramienta para la predicción en cuencas no instrumentadas (**Predictions in Ungaged Basins, PUB**) (**Schertzer et al.**, 2003) y la producción sintética de series de precipitación de alta resolución, las cuales puedan ser utilizadas en aplicaciones hidrológicas como la de los modelos lluvia-escorrentía, la generación de curvas de intensidad-frecuencia-duración (**IDF**), y el diseño hidrológico (**Flores, 2004; Douglas & Barros, 2003**).

La organización de este artículo es la siguiente: en la sección 2 se presenta una descripción de algunas herramientas para el estudio de las propiedades de escalamiento en series de tiempo y las metodologías para la estimación del espectro multifractal. En la sección 3 se describe la base de datos utilizada. Finalmente, en las secciones 4 y 5 se presentan el análisis de los resultados obtenidos y las conclusiones del estudio, respectivamente.

2. Análisis multifractal

En las últimas dos décadas se han desarrollado una gran variedad de metodologías orientadas a identificar comportamientos fractales, multifractales y caóticos en series de tiempo. Parte de dicho comportamiento en series de tiempo puede ser captado por medio de una descripción estadística estándar, como el espectro de potencias. Además, la función distribución de probabilidad empírica provee información importante acerca del comportamiento fractal y su tipo, monofractal o multifractal (**Sivakumar, 2001**).

2.1. Función de distribución de la densidad de probabilidad empírica. Si para umbrales de intensidad altos, x , la cola de la función de distribución de probabilidad de la intensidad de la lluvia, X , sigue una ley potencial de la forma

$$P(X > x) \propto x^{-q_{cr}}, \quad (1)$$

se dice que la serie se caracteriza por intermitencia hiperbólica, lo cual se da generalmente, pero no necesariamente, en un proceso multifractal (**Harris et al.**, 1996). Estas distribuciones se derivan cuando se simula la intermitencia y el proceso de cascada de un fenómeno, conservando la masa en el promedio (“cascadas canónicas”), las cuales no necesariamente implican la divergencia de los momentos (e.g., las distribuciones lognormales poseen colas hiperbólicas para

tamaños de muestra finitos, pero poseen momentos convergentes), pero pueden ser vistas como un soporte complementario en el uso de la caracterización multifractal y modelamiento de la lluvia a partir de “cascadas canónicas” (**Harris et al.**, 1996).

En este caso q_{cr} es el exponente de probabilidad crítico, el cual refleja los estadísticos de valores extremos e indica la escala crítica a partir de la cual los momentos son divergentes. Además, en la literatura se sugiere que valores de $q_{cr} < 2$ indican que modelos monofractales son suficientes para caracterizar el comportamiento de la serie de tiempo, mientras que modelos multifractales son adecuados si $q_{cr} > 2$ (**Olsson, 1995; de Lima & Grasman, 1999; Sivakumar, 2001**).

2.2. Espectro de potencias. El espectro de potencias describe la variación de la potencia de una señal (energía por unidad de tiempo) respecto a la frecuencia. Dicho espectro es una herramienta estándar para la investigación del comportamiento fractal de series geofísicas (**Olsson, 1995**). Si el espectro de potencias obedece a una ley de la forma

$$E(f) \propto f^{-\beta}, \quad (2)$$

donde f es la frecuencia y β es el exponente espectral, dicho exponente puede ser un indicativo de la ausencia de una escala de tiempo característica en el rango de la ley de potencias, y, por tanto se puede asumir la presencia de un comportamiento (multi-)fractal. Además, el espectro de potencias es particularmente usado para el estudio de oscilaciones de un proceso (**Sivakumar, 2001**). En general, para un proceso aleatorio, el espectro de potencias oscila aleatoriamente alrededor de un valor constante, indicando que una frecuencia no explica más de la varianza de la secuencia que otra. Para secuencias periódicas o casi-periódicas, sólo existen picos a ciertas frecuencias, el ruido medido le agrega un piso continuo al espectro. De esta manera, en el espectro, la señal y el ruido son fácilmente diferenciados. Señales caóticas pueden tener líneas espectrales muy notorias, pero siempre en la ausencia de ruido ellas serán una parte continua del espectro (**Sivakumar, 2001**).

El exponente β puede ser entendido como un indicador de suavidad de la serie de tiempo, la cual es directamente proporcional a él. La lluvia producida directamente por un proceso de cascadas multiplicativas, en general, es poco suave y debería poseer exponente $\beta < 1$ (cascadas ilimitadas), por lo tanto desde el punto de vista del análisis multifractal estos campos son mas convenientes, pues su descripción es completamente especificada por la función de momentos y q_{cr} (**Harris et**

al., 1996). Los campos con $\beta > 1$ (cascadas limitadas), generalmente, no muestran escalamiento de momentos y su análisis puede ser a partir de fluctuaciones (Tessier, 1993).

2.3. Definición del espectro multifractal y metodologías para su estimación. Considere la proporción de cajas no vacías en una δ -partición de Ω que tienen masa en el rango de R^D ($\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha$). Esta proporción está dada por:

$$\frac{\text{Número de cajas con masa en } (\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha)}{\text{Número de cajas no vacías}} \quad (3)$$

donde el denominador es $\sim \delta^D$ y D es la dimensión del conjunto donde la masa se encuentra distribuida (Peitgen et al., 1992). Definiremos una medida multifractal como aquella para la cual el numerador obedece: número de cajas con masa en $(\delta^{\alpha+d\alpha}, \delta^\alpha) \sim \delta^{-f(\alpha)}$. El exponente varía con α y se conoce como el *espectro multifractal*, o *espectro de singularidades*, o sólo como *la curva* $f(\alpha)$. Las medidas multifractales se caracterizan por su curva $f(\alpha)$.

Aunque todavía no existe una definición estándar de lo que es un multifractal, podría decirse que una medida multifractal es aquella que tiene una curva $f(\alpha)$ bien definida. La curva $f(\alpha)$ puede entenderse en términos de la noción familiar de una densidad, aunque las medidas multifractales en sí mismas son demasiado singulares para tener densidades. Un rasgo básico de esta curva, es que permite identificar comportamientos de leyes potenciales del tipo δ^α con respecto a cambios en el tamaño del pixel, δ , mientras otros tipos de dependencia para δ (por ejemplo $e^{-\delta}$) son ignorados. Aquí la curva $f(\alpha)$ es una lente de leyes potenciales para observar medidas singulares.

A continuación se presentan algunos de los métodos para la estimación del espectro $f(\alpha)$ de una medida multifractal, acompañados de sus pasos de implementación. En este trabajo se implementó cada uno de estos métodos para series de series de lluvia, partiendo de un proceso de verificación de los algoritmos planteados, el cual se llevó a cabo a partir de una expresión teórica del espectro de la medida binomial.

Sea μ una medida binomial generada a partir de relaciones de partición $p : (1-p)$, con $p < 1$, para cada orden q ($-\infty < q < \infty$), se tiene (véase la referencia Peitgen et al. (1992)):

$$\alpha(q) = - \left[\frac{p^q}{p^q + (1-p)^q} \log_2(p) + \frac{(1-p)^q}{p^q + (1-p)^q} \log_2(1-p) \right] \quad (4a)$$

$$f(\alpha(q)) = - \left[\frac{p^q}{p^q + (1-p)^q} \log_2 \left(\frac{p^q}{p^q + (1-p)^q} \right) + \frac{(1-p)^q}{p^q + (1-p)^q} \log_2 \left(\frac{(1-p)^q}{p^q + (1-p)^q} \right) \right] \quad (4b)$$

Dadas las ecuaciones (4a) y (4b), es posible estimar el error cometido en la estimación del espectro. Vale la pena tener presente que en todos los casos es posible estimar el error cometido al estimar α y $f(\alpha)$ en función de q .

2.3.1. Método de los momentos. Este método está basado en el formalismo multifractal, y tiene como una de sus hipótesis fundamentales la presencia de "cascadeo" multiplicativo. En series temporales de variables geofísicas, sólo se tiene la medida en una iteración k , si hacemos la analogía con una medida binomial. El proceso consiste en la reconstrucción de cualquier iteración anterior, $h < k$, a partir de agregaciones en intervalos de tamaño 2^{-h} .

El método de los momentos se basa en una cantidad llamada *función de partición*, debido a su analogía con la función de partición en la teoría del equilibrio termodinámico (Peitgen et al., 1992). Esta función se define como

$$\chi_q(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu_i^q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

donde $N(\epsilon)$ es el número de cajas de tamaño ϵ necesarias para cubrir la medida.

En el caso general, se puede reescribir la medida μ_i en términos de las cajas de tamaño ϵ como $\mu_i = \epsilon_i^\alpha$, luego $\chi_q(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} (\epsilon_i^\alpha)^q$. Motivados por los resultados del análisis de la medida binomial, se denota por $N_\epsilon(\alpha) d\alpha$ al número de cajas, entre las $N(\epsilon)$ cajas totales, con un exponente de Hölder que satisface $\alpha < \alpha_i < \alpha + d\alpha$, además, se asume que existen constantes α_{min} y α_{max} tales que $0 < \alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max} < \infty$, y que $N_\epsilon(\alpha)$ es continuo. Luego, la contribución del subconjunto de cajas con α_i entre α y $\alpha + d\alpha$ a $\chi_q(\epsilon)$, es $N_\epsilon(\alpha) (\epsilon_i^\alpha)^q d\alpha$.

En lugar de hacer la contribución por cada caja i separadamente, se realiza una integración sobre $d\alpha$ adicionando la contribución cuyo exponente de Hölder se encuentre entre α y $\alpha + d\alpha$

$$\chi_q(\epsilon) = \int N_\epsilon(\alpha) (\epsilon_i^\alpha)^q d\alpha \quad (6)$$

Si $N_\epsilon(\alpha) \sim \epsilon^{-f(\alpha)}$, se tiene

$$\chi_q(\epsilon) = \int \epsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (7)$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la contribución dominante en la integral viene de los valores de α cercanos al valor que minimiza el exponente $q\alpha - f(\alpha)$. Si $f(\alpha)$ es diferenciable, la condición necesaria para la existencia de un extremo es

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} q\alpha - f(\alpha) = 0. \quad (8)$$

Para un valor dado de q , el extremo ocurre para el valor $\alpha = \alpha(q)$ que satisface

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha(q)} = q \quad (9)$$

y este extremo es un mínimo sólo si

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha(q)} > 0. \quad (10)$$

Teniendo en cuenta sólo la contribución dominante en la ecuación (7) e introduciendo la transformada de Legendre (**Courant & Hilbert, 1953**)—

$$\alpha(q) = \frac{\partial \tau(q)}{\partial q} \quad (11a)$$

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) \quad (11b)$$

se encuentra

$$\chi_q(\epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)}. \quad (12)$$

Finalmente, es fácil estimar $f(\alpha)$ a partir de las ecuaciones (11a) y (11b).

Algoritmo de cálculo del método de los momentos. A continuación se presenta el algoritmo para el cálculo del espectro multifractal de series de tiempo a partir del método de los momentos, el cual está basado en la teoría descrita anteriormente.

1. Se cubre la medida con $N(\epsilon)$ cajas de tamaño ϵ ($[B_i(\epsilon)]_{i=1}^{N(\epsilon)}$), determinando la medida correspondiente a cada caja, $\mu_i = \mu(B_i(\epsilon))$.
2. Se estima la función de partición a partir de la ecuación (5) para varios valores de ϵ .
3. Se verifica que los gráficos $\log_{10}(\chi_q(\epsilon))$ vs. $\log_{10}(\epsilon)$ sean líneas rectas. Solo si esto se cumple, la ecuación (12) es válida.
4. Se encuentra $f(\alpha)$ con la transformada de Legendre (véanse las ecuaciones (11a) y (11b))

2.3.2. Método de Chhabra y Jensen. A finales de los 80's, Ashvin Chhabra y Roderick Jensen propusieron una metodología para la determinación directa de $f(\alpha)$ en medidas multifractales basados en un método canónico para el cálculo de promedios termodinámicos (**Chhabra & Jensen, 1989; Chhabra et al., 1989**). La característica fundamental del método, aplicado a datos experimentales, es que no necesita el cálculo de

las dimensiones generalizadas, D_q , ni el uso de la transformada de Legendre, mencionadas anteriormente.

El formalismo multifractal, a través de la relación existente entre las dimensiones generalizadas, D_q , y el espectro de singularidades, $f(\alpha)$, provee una adecuada descripción de las propiedades de escalamiento de una medida multifractal. Sin embargo, esta relación es válida desde el punto de vista teórico, pero no necesariamente en la práctica, debido básicamente a dos razones:

- Los gráficos log-log involucrados en la estimación de los D_q , en vez de mostrar un comportamiento perfectamente lineal, tienden a ser modulados por oscilaciones y mostrar dispersión (usualmente por el número de datos).
- Se pueden presentar discontinuidades en la curva D_q , lo cual deja sin base teórica el formalismo multifractal, el cual se basa en curvas suaves. Estas discontinuidades, corresponden a transiciones de fase en el equilibrio de la mecánica estadística. Además, es bien conocido que estas transiciones ocurren frecuentemente en sistemas no-hiperbólicos y en sistemas hiperbólicos de altas dimensiones (e.g. el mapa logístico) (**Chhabra & Jensen, 1989; Chhabra et al., 1989; Ott et al., 1984; Grassberger et al., 1988**).

Si se busca describir una medida singular $P(x)$, una cantidad de interés es la dimensión de Hausdorff del soporte teórico de la medida, $P(x)$. Este es simplemente la ínfima dimensión de los conjuntos en los cuales toda la medida vive (los complementos de esos conjuntos tienen medida cero). Para clases especiales de medidas que surgen de procesos multiplicativos (descritos por probabilidades P_i), se tienen varios teoremas que dan información de como calcular la dimensión del soporte teórico de la medida. En particular, se conoce que la entropía, S , de cada uno de los procesos está dada por

$$S = - \sum_i P_i \log P_i, \quad (13)$$

y que la dimensión de Hausdorff (**Barnsley, 1993**; de \mathcal{M} , que es el soporte teórico de la medida asociada con cada uno de los procesos, puede ser relacionada con la entropía por medio del teorema de Billingsley como (**Billingsley, 1965**))

$$d_h(\mathcal{M}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N P_i \log P_i. \quad (14)$$

Si se divide la medida experimental considerada, de forma tal que $P_i(l)$ corresponda a la probabilidad de un proceso multiplicativo con $N \sim l^{-1}$, la ecuación (14) provee una fórmula para el cálculo de la dimensión de Hausdorff del conjunto, el cual es el soporte teórico de la medida $P(x)$.

Es posible utilizar los resultados anteriores para evaluar $f(\alpha)$ en una medida multifractal, $P(x)$. Esto se logra, inicialmente, por la construcción de una familia, de un solo parámetro, de medidas normalizadas, $\mu(q)$, donde las probabilidades en las cajas de tamaño l son

$$\mu(q, l) = \frac{[P_i(l)]^q}{\sum_j [P_j(l)]^q} \quad (15)$$

El parámetro q en la ecuación (15) es análogo a un microscopio que permite explorar diferentes regiones de la medida P . Para $q > 1$, $\mu(q)$ amplifica las regiones más intermitentes de P , para $q < 1$ se acentúan las regiones menos intermitentes y para $q = 1$ se replica la medida original. La dimensión de Hausdorff del soporte teórico de la medida de $\mu(q)$ puede ser obtenida mediante la ecuación (14), de manera que

$$\begin{aligned} f(q) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \log[\mu_i(q, l)] \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, l) \log[\mu_i(q, l)]}{\log l} \end{aligned} \quad (16)$$

Además, es posible hallar el valor promedio del exponente de Hölder o fuerza de singularidad, $\alpha_i = \frac{\log(P_i)}{\log(l)}$, con respecto a $\mu(q)$, al evaluar

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{i=1}^N \mu_i(q, l) \log[P_i(l)] \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, l) \log[P_i(l)]}{\log l} \end{aligned} \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17) proveen una definición alterna para la estimación del espectro de singularidades, de forma directa, a partir de datos y sin usar la transformada de Legendre, evitando los problemas mencionados anteriormente.

Algoritmo de cálculo. A continuación se describe el algoritmo utilizado para la estimación del espectro multifractal a partir de la metodología propuesta por Chhabra y Jensen, y la cual se utiliza en la referencia (Chhabra et al., 1989).

1. Se cubre la medida experimental con cajas de tamaño l y se calcula la probabilidad (integración de la medida) en cada una de ellas, $P_i(l)$.

2. Se construye la familia de medidas normalizadas, $\mu(q, l)$, donde las probabilidades en las cajas de tamaño l están dadas por la ecuación (15).
3. Para cada valor de q , se grafica $\sum_i \mu_i(q, l) \log_{10}[\mu_i(q, l)]$ vs. $\log_{10}(l)$, cuya pendiente corresponde a $f(q)$ (véase la ecuación (16)).
4. Para cada valor de q , se grafica $\sum_i \mu_i(q, l) \log_{10}[P_i(l)]$ vs. $\log_{10}(l)$, donde la pendiente de la recta corresponde a $\alpha(q)$ (véase la ecuación (17)).
5. Finalmente se tiene para cada q un valor de f y su correspondiente α ($f(\alpha(q))$).

2.3.3. Método del análisis multifractal de fluctuaciones. La descripción de las metodologías que se mencionarán a continuación está basada en el trabajo realizado por Kantelhart y otros, en torno a las propiedades de escalamiento de registros históricos de series de caudal (Kantelhardt et al., 2003; Koscielny-Bunde et al., 2006). El objetivo fundamental de estas metodologías es la detección de correlaciones temporales de largo plazo y comportamiento multifractal en presencia de tendencias para series temporales de variables geofísicas.

En registros temporales de variables geofísicas con limitada extensión, es complicado distinguir entre memoria de largo plazo y jerarquías de memoria de corto plazo y/o tendencias. Lo anterior, debido a que las series de tiempo estacionarias y con correlaciones de largo plazo exhiben un comportamiento persistente y tendencia a permanecer en un valor momentáneamente. Esto causa desviaciones positivas o negativas respecto al valor medio en largos periodos de tiempo que pueden lucir como tendencias (Koscielny-Bunde et al., 2006).

En los últimos años se han desarrollado métodos como el análisis de fluctuaciones sin tendencias, para detectar correlaciones de largo plazo en presencia de tendencias. Sin embargo, para poder caracterizar la compleja dinámica involucrada en los procesos geofísicos, se hace necesario el análisis de todos los momentos estadísticos y así captar completamente la distribución de las fluctuaciones (análisis multifractal).

En el caso de las variables geofísicas, se trabajará con series a las cuales se les han removido las tendencias estacionarias periódicas (por ejemplo el ciclo anual o el diario). En el caso de series de tiempo con resolución

horaria, se removerá el ciclo en cada hora de los 365 días del año (por ejemplo *hora 1 de abril 1*).

Sea W_i el registro correspondiente a la hora i , $i = 1, 2, \dots, N$. La nueva serie, sin tendencias estacionales se genera como

$$\phi_i = W_i - \overline{W}_i \quad (18)$$

donde \overline{W}_i corresponde a la media sobre todos los días i (por ejemplo sobre todos los registros *hora 1 de abril 1* en los años de registro).

En el análisis de fluctuaciones, se considera el “perfil”

$$z_n = \sum_{i=1}^n \phi_i, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

y se estudian las fluctuaciones del perfil, en una ventana de tiempo de tamaño s . El perfil z_n se puede considerar como la posición de una caminata aleatoria de n pasos (Koscielny-Bunde et al., 2006).

Análisis multifractal de fluctuaciones (MF-FA). En el caso análisis multifractal de fluctuaciones se obtienen funciones de fluctuación a partir de los valores del perfil en los extremos de cada segmento ν (Kantelhardt et al., 2003; Koscielny-Bunde et al., 2006)

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} |z_{\nu s} - z_{(\nu-1)s}|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (20)$$

en este caso q puede tomar cualquier valor real excepto cero. La diferencia de este análisis de fluctuaciones, respecto al análisis estándar radica en la variación de la función de fluctuaciones con q , lo cual es un reflejo del comportamiento multifractal en los registros.

En general, la aproximación multifractal se introduce en la función de partición

$$Z_q(s) = \sum_{\nu=1}^{N_s} |z_{\nu s} - z_{(\nu-1)s}|^q \sim s^{\tau(q)}, \quad (21)$$

donde $\tau(q)$ es el exponente de escalamiento de Renyi ($\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). La ecuación (21) implica

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (22)$$

donde

$$h(q) = \frac{[\tau(q) + 1]}{q}. \quad (23)$$

El exponente $h(q)$ definido en la ecuación (22), está directamente relacionado con el exponente multifractal de escalamiento clásico, $\tau(q)$. Este exponente es denominado de “Hurst generalizado”, que en el caso de $h(1)$ es idéntico al conocido exponente de Hurst (Mesa & Poveda, 1993).

Finalmente, es posible obtener el espectro de singularidades o multifractal a partir de $\tau(q)$ vía la transformada de Legendre (Mandelbrot, 1989).

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq} = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq} \quad (24a)$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = q[\alpha - h(q)] + 1. \quad (24b)$$

El MF-FA descrito tiene los siguientes problemas:

- Tendencias monótonas en los registros pueden generar resultados espurios para el exponente de fluctuación $h(q)$, el cual a su vez, genera valores espurios para la estimación en el exponente de Renyi, $\tau(q)$.
- El comportamiento no estacionario, caracterizado por los exponentes $h(q) \geq 1$ no puede ser detectado por el método y siempre aproxima a $F_q(s) \sim s$.

Algoritmo de cálculo MF-FA. A continuación se presenta el algoritmo para el cálculo del espectro multifractal de series de tiempo a partir de MF-FA, el cual está basado en la teoría descrita anteriormente.

1. Se remueven las tendencias estacionarias de la serie de tiempo. Este procedimiento conduce a la generación de una nueva serie denominada ϕ_i (véase la ecuación (18)).
2. Se genera el perfil de la serie de tiempo a partir de la ecuación (19).
3. Con el perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones, definiendo un q constante y evaluando la función de fluctuaciones $F_q(s)$ para varias resoluciones s (véase la ecuación (20)).
4. Con los valores encontrados de $F_q(s)$ y s se realiza un ajuste lineal entre $\log_{10}(F_q(s))$ vs. $\log_{10}(s)$, donde la pendiente de dicho ajuste corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$ (véase la ecuación (22)).
5. Se repiten los pasos 3 y 4 para varios valores de q , obteniendo la curva $h(q)$.
6. Posterior al cálculo de la curva del exponente de Hurst generalizado, $h(q)$, se procede a utilizar la transformada de Legendre (ecuaciones (24a) y (24b)) para la estimación del espectro multifractal $f(\alpha)$.

Análisis multifractal de fluctuaciones sin tendencias (MF-DFA). Es posible identificar diferentes ordenes de MF-DFA, los cuales se caracterizan por la forma en la cual se remueven las tendencias de los datos. En el orden más bajo (MF-DFA1) se determina, para cada segmento ν , el mejor ajuste *lineal* del perfil, y se identifican las fluctuaciones por medio de la varianza $F^2(\nu, s)$ del perfil respecto a la línea recta. De esta forma, se elimina la posible influencia de tendencias lineales a escalas mayores a la del segmento. Es importante notar que al eliminar las tendencias en el perfil, se están eliminando en los datos.

En general, en el MF-DFA de orden n , se calculan las varianzas del perfil, respecto al mejor ajuste polinomial de orden n , lo cual elimina la influencia de posibles tendencias de orden n a escalas mayores que el tamaño del segmento.

Explícitamente, se ajusta el mejor polinomio $y_\nu(i)$ al perfil en cada uno de los N_s segmentos ν y se determina la varianza

$$F^2(\nu, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [z_{(\nu-1)s+i} - y_\nu(i)]^2 \quad (25)$$

Finalmente, para estimar la fluctuación media se utiliza

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} [F^2(\nu, s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (26)$$

A partir de este punto el procedimiento es similar al utilizado en el MF-FA, donde se estima el exponente de Hurst generalizado a partir de la relación mostrada en la ecuación (22) y, con este y la transformada de Legendre (ecuaciones (24a) y (24b)), se hace posible el cálculo del espectro multifractal.

Algoritmo de cálculo MF-DFA. A continuación se presenta el algoritmo para el cálculo del espectro multifractal de series de tiempo a partir de MF-DFA, el cual está basado en la teoría descrita anteriormente.

1. Se remueven las tendencias estacionarias de la serie de tiempo. Este procedimiento conduce a la generación de la serie ϕ_i (véase la ecuación (18)).
2. Se genera el perfil de la serie de tiempo a partir de la ecuación (19).
3. Con el perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones, definiendo un q constante y analizando varios intervalos en el siguiente orden:

- a) En cada intervalo ν , se ajusta un polinomio y_ν de orden n , para el caso de MF-DFA.
 - b) Se calculan las varianzas del perfil respecto al ajuste (véase la ecuación (25)).
 - c) Con las varianzas de cada segmento se estima la función de fluctuaciones para el valor dado de s y q (véase la ecuación (26)).
4. Con los valores encontrados de $F_q(s)$ y s , se realiza un ajuste lineal entre $\log_{10}(F_q(s))$ vs. $\log_{10}(s)$, donde la pendiente de dicho ajuste corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$ (véase la ecuación (22)).
 5. Se repiten los pasos 3 y 4 para varios valores de q , obteniendo la curva $h(q)$.
 6. Posterior al cálculo de la curva del exponente de Hurst generalizado, $h(q)$, se procede a utilizar la transformada de Legendre (ecuaciones (24a) y (24b)) para estimación del espectro multifractal $f(\alpha)$.

3. Descripción de los datos

Para este trabajo se contó con registros horarios de precipitación correspondientes a 47 estaciones pluviográficas ubicadas en las regiones cafeteras de Colombia (véase la figura 1 y Tabla 1). Dichos registros fueron suministrados por el Centro Nacional de Investigaciones del Café (CENICAFE) y por Empresas Públicas de Medellín (EPM).

Las estaciones poseen periodos de registro entre los 22 y 28 años, el porcentaje de datos faltantes es generalmente inferior al 5% y se encuentran entre $1^{\circ}15'N - 10^{\circ}20'N$ y $77^{\circ}29'W - 72^{\circ}40'W$.

Los Andes Colombianos se encuentran divididos en tres ramales principales, llamados Cordillera Occidental, Cordillera Central y Cordillera Oriental, los cuales se encuentran separados por los valles interandinos de los ríos Cauca y Magdalena. Las estaciones en la Tabla 1 son numeradas y agrupadas de acuerdo a su localización a lo largo de las pendientes andinas (Poveda et al., 2005):

Grupo A: Vertiente occidental de la Cordillera Occidental (1-2).

Grupo B: Sur del "Macizo Colombiano" (3-5).

Grupo C: Vertiente oriental de la Cordillera Occidental perteneciente al valle del río Cauca (6-11).

Grupo D: Vertiente occidental de la Cordillera Central (12-30).

Grupo E: Vertiente oriental de la Cordillera Central perteneciente al valle del río Magdalena (31-37).

Grupo F: Flanco occidental de la Cordillera Oriental (38-44).

Grupo G: Flanco oriental de la Cordillera Oriental (45-46).

Grupo H: Estación en la Sierra Nevada de Santa Marta (47).

Las estaciones utilizadas reflejan un comportamiento unimodal, bimodal y multimodal en su ciclo diario y se hace confusa la definición de una hora común de máxima lluvia en todas las estaciones, en la cual se presenta la máxima precipitación durante el día.

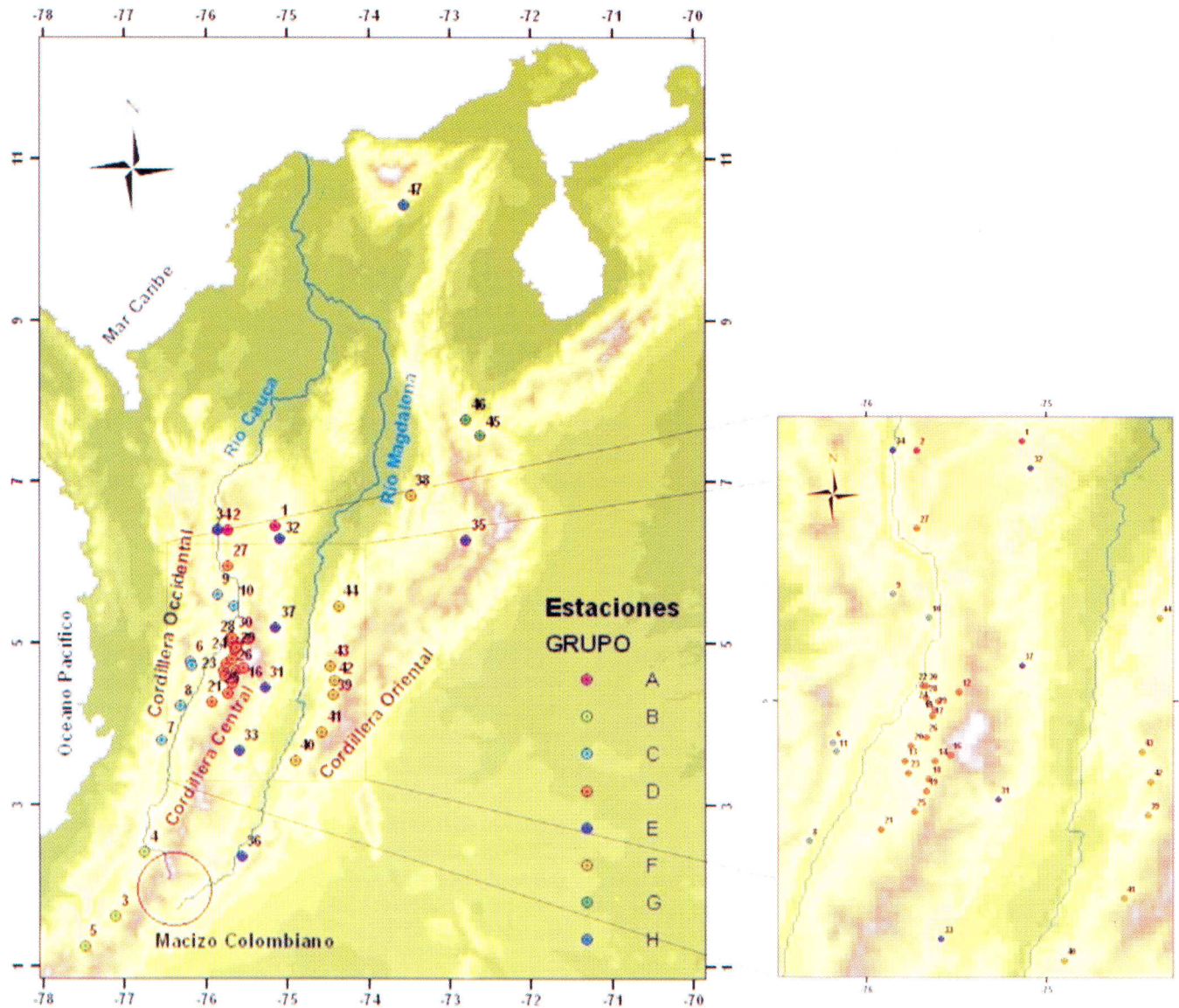


FIGURA 1. Ubicación geográfica de las 47 estaciones de precipitación. La escala de colores en las estaciones corresponde a su localización a lo largo de las pendientes andinas.

CUADRO 1. Localización y detalles de las 47 estaciones de precipitación.

ID	Estación	Lat (N) grados	Lon (W) grados	Elev (m)	Periodo Registro	Datos (%) Faltantes	Elevación desde el piso del valle (m)	Grupo
1	Mande	6.45	75.13	495	MAY78-ABR99	0	x	A
2	Santa Bárbara	6.4	75.72	2595	MAR78-DIC99	0	x	A
3	El Sauce	1.62	77.1	1610	ENE71-DIC93	12.4	x	B
4	Manuel Mejía	2.42	76.75	1700	ENE72-NOV93	2.1	x	B
5	Ospina Pérez	1.25	77.48	1700	ENE72-DIC93	0.7	x	B
6	Albán	4.77	76.18	1500	JUN73-DIC93	1.7	780	C
7	Julio Fernandez	3.8	76.53	1360	ENE72-DIC93	1	480	C
8	Manuel María Mallarino	4.22	76.32	1380	ENE73-DIC93	2.5	570	C
9	Miguel Valencia	5.6	75.85	1570	ENE71 - DIC93	1.9	x	C
10	Rafael Escobar	5.47	75.65	1320	ENE71 - DIC93	0.1	x	C
11	Santiago Gutiérrez	4.72	76.17	1550	ENE71-DIC93	5.7	820	C
12	Agronomía	5.05	75.48	2150	ENE72-DIC99	1.1	1480	D
13	Arturo Gómez	4.67	75.78	1320	ENE72-DIC93	1.5	590	D
14	Bremen	4.67	75.62	2040	MAR72-DIC93	1.7	1300	D
15	Cenicafe	5	75.6	1310	ENE72-DIC93	0.4	630	D
16	El Cedral	4.7	75.53	2120	ENE73-DIC93	5.8	1420	D
17	El Jazmín	4.92	75.63	1600	ENE72-DIC93	2.1	910	D
18	El Sena	4.57	75.65	1550	DIC71-DIC93	8.8	800	D
19	La Bella	4.5	75.67	1450	ENE72-DIC93	0.4	690	D
20	La Catalina	4.75	75.75	1350	NOV76-DIC93	1	630	D
21	La Sirena	4.28	75.92	1500	ENE71-DIC93	1	700	D
22	Luker	5.08	75.68	1020	MAR70-DIC99	2.7	360	D
23	Maracay	4.6	75.77	1450	ENE82-DIC93	0.6	710	D
24	Naranjal	4.98	75.65	1400	ENE71-DIC93	0.6	720	D
25	Paraguaicito	4.38	75.73	1250	ENE72 - DIC93	0.5	470	D
26	Planta de Tratamiento	4.8	75.67	1450	ENE69-DIC89	4	740	D
27	Rosario	5.97	75.72	1600	ENE71 - DIC93	0.9	1086	D
28	Santa Ana	5.02	75.67	1250	ENE72-DIC93	2.2	580	D
29	Santa Helena	4.95	75.62	1525	ENE80-DIC93	2.1	840	D
30	Santagueda	5.08	75.67	1010	ABR72-DIC99	1.2	350	D
31	Chapetón	4.45	75.27	1300	ENE71-DIC88	2.2	1010	E
32	El Bizcocho	6.3	75.08	1070	ABR71-DIC99	0	1120	E
33	El Limón	3.67	75.58	990	ENE71-DIC93	7.2	610	E
34	El Peñol	6.4	75.85	1880	ABR60-FEB99	0	1750	E
35	Inmarco	6.28	72.8	260	AGO68-AGO92	0	140	E
36	Jorge Villamil	2.37	75.55	1500	ENE72 - DIC93	1.1	x	E
37	LLanadas	5.2	75.13	1420	ENE72-DIC99	10	1220	E
38	Aguas Blancas	6.83	73.48	920	ENE72-DIC99	8.4	x	F
39	Granja Tibacuy	4.37	74.43	1550	ENE72-DIC93	1.4	1250	F
40	La Montaña	3.55	74.9	1260	ENE73 - DIC93	15.9	x	F
41	Luis Bustamante	3.9	74.57	1643	ENE72-DIC89	18.9	x	F
42	Misiones	4.55	74.42	1540	ENE77-DIC93	3	1263	F
43	Santa Inés	4.72	74.47	1250	ENE72-DIC93	1.9	990	F
44	Yacopí	5.47	74.37	1340	ENE72-DIC99	1.5	x	F
45	Blonay	7.57	72.62	1235	ENE72-DIC99	0.7	x	G
46	Francisco Romero	7.77	72.80	1000	ENE72 - DIC99	1.1	x	G
46	Pueblo Bello	10.42	73.57	1000	ENE72 - DIC99	3.4	x	G
47	Yacopí	5.46	74.36	1340	ENE72 - DIC99	1.5	x	H

4. Resultados

4.1. Función densidad de probabilidad empírica. Se calculó la probabilidad de excedencia de un evento x , $P(X > x)$, para cada serie de precipitación, encontrando una tendencia a dos zonas diferentes de comportamiento potencial en las distribuciones (véase la ecuación 1).

Para caracterizar el comportamiento potencial se trabajó en el espacio logarítmico, $(\log(P(X > x)))$ vs. $\log(x)$, donde se ajustan rectas a las dos sub-regiones, dando como resultado pendientes q_{cr1} y q_{cr2} , que corresponden al negativo de la potencia a la cual

escala la distribución de probabilidades (véanse la figura 2 y la tabla 2). El criterio utilizado para encontrar el punto de quiebre es el siguiente:

1. En el paso i , se divide la muestra en dos sub-muestras con tamaño mínimo de 20 datos.
2. A cada sub-muestra se le ajusta una recta y se obtienen los coeficientes de determinación R_{i1}^2 y R_{i2}^2 .
3. Se define la cantidad $\Delta_i = R_{i1}^2 + R_{i2}^2$.
4. Se repite el proceso iterativamente para todos los i posibles.
5. El punto de quiebre se define como aquel que presente el Δ_{max} .

Con el propósito de decidir si el comportamiento es diferente en las sub-muestras seleccionadas, se realiza una prueba de hipótesis que verifique si las pendientes son estadísticamente diferentes, a partir de los intervalos de confianza para la pendiente obtenida en una regresión lineal, el cual a su vez refleja la calidad total de la recta de regresión.

Bajo la hipótesis de que las observaciones están distribuidas de manera normal e independiente, el intervalo de confianza para la pendiente D del $100(1-\alpha)$ por ciento en una regresión lineal simple es (Montgomery &

Runger, 1996):

$$\hat{D} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \leq D \leq \hat{D} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}, \quad (27)$$

donde σ^2 es la varianza del término de error ϵ en el modelo de regresión, el cual refleja la variación aleatoria alrededor de la recta de regresión. Además, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Teniendo el intervalo de confianza para q_{cr1} , se acepta la hipótesis de igualdad en las pendientes, si dicho intervalo contiene a q_{cr2} , caso en el cual se acepta que el comportamiento potencial es el mismo en todo el dominio.

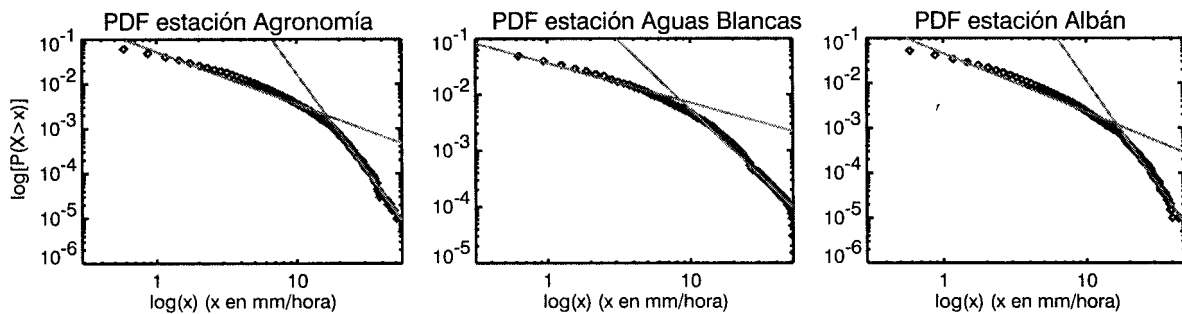


FIGURA 2. Distribución de probabilidad empírica para las estaciones Agronomía, Aguas Blancas y Albán. La línea roja refleja la recta ajustada.

Como se mencionó anteriormente, la distribución de probabilidad empírica describe la fractalidad de umbrales de intensidad para las fluctuaciones en la serie a determinadas escalas. La principal justificación para el uso de un modelo de colas pesadas, se describe en el estudio del ciclo diurno (véanse las referencias (Agudelo et al., 2001; Álvarez & Toro, 2001; Vieira & Moreno, 2001)), donde se encontró que las series de precipitación horarias utilizadas son altamente intermitentes, con predominancia de ceros (no lluvia) en los registros (en general, al menos el 85% de los datos). Basados en esto, se hace necesario el análisis de la función de distribución de probabilidades y en particular de los cuantiles superiores.

El ajuste potencial en la cola de la distribución muestra valores de q_{cr2} entre 2,4 y 5,8, los cuales son suficientes para justificar el uso de una aproximación multifractal en el estudio del comportamiento de estas series de lluvia (Olsson, 1995; Sivakumar, 2001). Por el contrario, a la izquierda del quiebre se encuentra que $q_{cr1} < 2$ en todas las estaciones, lo cual sugiere un comportamiento monofractal para intensidades inferiores a

la del quiebre, cuyos valores presentan intensidades entre 14-18 $\frac{mm}{hora}$ en la mayoría de los casos, tomando los valores más bajos en 5.2 $\frac{mm}{hora}$ y máximos en 30.4 $\frac{mm}{hora}$.

4.2. Espectro de potencias. Como se ha dicho anteriormente, el espectro de potencias es una herramienta estándar para el estudio del comportamiento fractal en series geofísicas. Dado lo anterior, se estimó dicho espectro para cada una de las 47 estaciones de precipitación horaria y se estimaron los parámetros del ajuste $E(f) = Cf^{-\beta}$, detectando tendencias y quiebres como se explicó anteriormente. Además, se realizaron pruebas de hipótesis orientadas a verificar la diferencia estadística entre dichas pendientes (véanse la figura 3 y la tabla 3).

En la Tabla 3 se presentan los resultados obtenidos en la estimación de la pendiente, puntos de quiebre y pruebas de hipótesis de las 47 estaciones. En particular, se puede distinguir seis grupos de quiebres importantes:

- Entre las 2 – 4 horas: Bremen, El Bizcocho, El Peñol, La Montaña, Planta de tratamiento,

CUADRO 2. Resultados de los ajustes de la forma $P(X > x) \propto x^{-q_{er}}$, realizados a las funciones densidad de probabilidad empírica. En todos los casos se encontraron dos regiones (1 - izquierda y 2 - derecha).

Estación	C_1	q_{er1}	R_1^2	C_2	q_{er2}	R_2^2	x (mm/hora)	P(x)
Agronomía	0,052 ± 0,0020	-1,18 ± 0,020	0.94	404,1 ± 43,1	-4,4 ± 0,03	0.99	16.2	0.002
Aguas Blancas	0,036 ± 0,0005	-0,71 ± 0,015	0.97	1,5 ± 0,1	-2,4 ± 0,03	0.96	8.5	0.008
Albán	0,046 ± 0,0019	-1,31 ± 0,021	0.95	460,1 ± 71,3	-4,6 ± 0,04	0.98	16.3	0.001
Arturo Gómez	0,046 ± 0,0014	-1,01 ± 0,017	0.95	167,0 ± 18,1	-4,0 ± 0,03	0.98	16.2	0.003
Blonay	0,036 ± 0,0011	-1,08 ± 0,018	0.96	10,0 ± 0,9	-3,2 ± 0,03	0.98	14.4	0.002
Bremen	0,055 ± 0,0011	-0,76 ± 0,015	0.96	47,2 ± 6,3	-3,4 ± 0,04	0.94	12.4	0.008
Cenicafé	0,055 ± 0,0016	-0,91 ± 0,017	0.95	330,6 ± 42,9	-4,0 ± 0,04	0.97	16.8	0.004
Chapetón	0,040 ± 0,0008	-0,74 ± 0,018	0.96	7,5 ± 1,1	-3,0 ± 0,04	0.93	10.0	0.007
El Bizcocho	0,092 ± 0,0027	-0,86 ± 0,016	0.95	2,756,4 ± 476,8	-4,3 ± 0,04	0.95	19.3	0.007
El Cedral	0,082 ± 0,0038	-1,25 ± 0,021	0.93	2,138,7 ± 264,6	-4,6 ± 0,03	0.99	21.3	0.002
El Jazmín	0,057 ± 0,0015	-0,92 ± 0,014	0.96	137,7 ± 17,0	-3,7 ± 0,03	0.97	16.1	0.004
El Limón	0,067 ± 0,0022	-0,96 ± 0,017	0.96	213,1 ± 39,9	-3,7 ± 0,05	0.94	19.9	0.004
El Peñol	0,061 ± 0,0018	-0,90 ± 0,029	0.93	13,6 ± 1,6	-3,5 ± 0,04	0.96	7.9	0.010
El Sauce	0,048 ± 0,0019	-1,13 ± 0,021	0.94	155,9 ± 22,6	-4,0 ± 0,04	0.98	16.2	0.002
El Sena	0,051 ± 0,0009	-0,76 ± 0,013	0.96	13,4 ± 1,6	-3,0 ± 0,03	0.95	12.4	0.007
Francisco Romer	0,050 ± 0,0014	-0,82 ± 0,015	0.96	177,8 ± 30,0	-3,6 ± 0,04	0.94	19.3	0.004
Granja Tibacuy	0,023 ± 0,0003	-0,79 ± 0,015	0.97	1,7 ± 0,2	-2,8 ± 0,03	0.93	8.1	0.004
Inmarco	0,047 ± 0,0013	-0,93 ± 0,013	0.96	2,113,8 ± 461,9	-4,4 ± 0,05	0.94	22.7	0.003
Jorge Villamil	0,032 ± 0,0009	-1,08 ± 0,021	0.96	5,1 ± 0,4	-3,3 ± 0,03	0.98	10.2	0.003
Julio Fernandez	0,026 ± 0,0003	-0,71 ± 0,017	0.96	0,9 ± 0,1	-2,6 ± 0,03	0.95	6.5	0.007
La Bella	0,061 ± 0,0025	-1,11 ± 0,019	0.94	16,893,7 ± 3,908,1	-5,0 ± 0,06	0.96	24.4	0.002
La Catalina	0,048 ± 0,0014	-1,00 ± 0,016	0.94	688,0 ± 124,5	-4,3 ± 0,05	0.96	17.6	0.003
La Montaña	0,066 ± 0,0031	-1,23 ± 0,019	0.93	458,636,0 ± 151,512,2	-5,8 ± 0,08	0.97	30.4	0.001
La Sirena	0,044 ± 0,0012	-0,89 ± 0,015	0.95	186,9 ± 26,5	-3,9 ± 0,04	0.96	16.7	0.004
Llanadas	0,064 ± 0,0017	-0,92 ± 0,015	0.95	406,7 ± 67,9	-4,1 ± 0,05	0.95	15.5	0.005
Luis Bustamante	0,046 ± 0,0010	-0,94 ± 0,014	0.97	19,4 ± 2,0	-3,3 ± 0,03	0.97	12.9	0.004
Luker	0,053 ± 0,0015	-1,00 ± 0,016	0.96	244,0 ± 45,2	-4,1 ± 0,05	0.94	15.7	0.003
Mande	0,076 ± 0,0020	-0,91 ± 0,015	0.97	443,2 ± 84,3	-3,9 ± 0,05	0.95	17.3	0.006
Manuel María Ma	0,041 ± 0,0012	-1,02 ± 0,016	0.95	396,5 ± 60,4	-4,2 ± 0,04	0.97	17.9	0.002
Manuel Mejía	0,073 ± 0,0037	-1,33 ± 0,021	0.94	16,290,9 ± 3,579,6	-5,2 ± 0,06	0.98	24.8	0.001
Maracay	0,052 ± 0,0016	-0,90 ± 0,016	0.95	126,0 ± 13,3	-3,7 ± 0,03	0.98	16.8	0.004
Miguel Valencia	0,050 ± 0,0003	-0,67 ± 0,017	0.96	2,5 ± 0,3	-3,1 ± 0,04	0.93	5.2	0.017
Misiones	0,031 ± 0,0005	-0,94 ± 0,012	0.98	8,5 ± 1,4	-3,1 ± 0,05	0.92	13.0	0.003
Naranjal	0,064 ± 0,0022	-0,97 ± 0,018	0.95	1,444,6 ± 284,9	-4,4 ± 0,05	0.95	18.9	0.004
Ospina Pérez	0,040 ± 0,0014	-1,23 ± 0,021	0.94	45,1 ± 4,8	-3,9 ± 0,03	0.98	13.3	0.002
Paraguaicito	0,040 ± 0,0006	-0,73 ± 0,012	0.97	14,3 ± 2,0	-3,1 ± 0,04	0.92	11.8	0.007
Planta de Trata	0,049 ± 0,0007	-0,69 ± 0,012	0.97	8,4 ± 0,8	-2,9 ± 0,03	0.95	10.3	0.010
Pueblo Bello	0,030 ± 0,0006	-0,72 ± 0,011	0.97	28,3 ± 4,6	-3,2 ± 0,04	0.94	16.7	0.004
Rafael Escobar	0,061 ± 0,0027	-1,23 ± 0,020	0.93	22,873,6 ± 4,213,2	-5,3 ± 0,05	0.98	23.1	0.001
Rosario	0,062 ± 0,0021	-1,04 ± 0,018	0.96	142,9 ± 15,2	-3,7 ± 0,03	0.98	17.9	0.003
Santa Ana	0,077 ± 0,0035	-1,20 ± 0,020	0.94	33,142,9 ± 9,060,8	-5,2 ± 0,07	0.96	24.9	0.002
Santa Bárbara	0,048 ± 0,0003	-0,72 ± 0,015	0.97	2,2 ± 0,2	-3,0 ± 0,03	0.94	5.2	0.015
Santa Helena	0,079 ± 0,0027	-0,86 ± 0,018	0.96	245,9 ± 50,9	-3,5 ± 0,05	0.94	19.9	0.006
Santa Inés	0,034 ± 0,0009	-0,95 ± 0,014	0.96	74,9 ± 12,1	-3,6 ± 0,04	0.95	17.4	0.002
Santagueda	0,044 ± 0,0012	-0,88 ± 0,016	0.95	192,9 ± 36,0	-3,9 ± 0,05	0.94	15.5	0.004
Santiago Gutiérrez	0,056 ± 0,0028	-1,44 ± 0,022	0.92	57,740,1 ± 12,021,7	-5,8 ± 0,05	0.99	23.3	0.001
Yacopí	0,068 ± 0,0025	-1,04 ± 0,017	0.96	8,730,6 ± 1,754,1	-4,8 ± 0,05	0.97	22.7	0.003

Pueblo Bello, Santa Bárbara, Santa Inés y Santagueda.

- Entre las 4,5 – 7 horas: Aguas Blancas, Cenicafé, El limón, El Sauce, Granja Tibacuy, Llanadas, Luis Bustamante, Rafael Escobar, Santiago Gutiérrez y Yacopí.
- Entre las 7,5 – 11 horas: El Jazmín, El Sena, Inmarco, Julio Fernández, La Sirena, Mande, Naranjal, Paraguaicito y Santa Ana.
- Entre las 11,5 – 14,5 horas: Chapetón,, Jorge Villamil, Maracay y Luker.
- Entre las 15 – 18 horas: Rosario y Santa Elena.

- Entre las 23 – 24 horas: Luker, Miguel Valencia y Ospina Pérez.

Dichos grupos hacen referencia u oscilan alrededor de horas importantes del ciclo diurno como las 4, 6, 9, 12, 16 y 24 horas.

Para todos los casos en los cuales se presentaron quiebres en los espectros, la hipótesis de igualdad de pendientes se rechazó con un 95 % de significancia. El espectro de potencias de una serie de tiempo, a través de su exponente espectral, β , puede ser usado para obtener información importante acerca de la cascada que

resulta en un proceso, además, de la identificación de presencia o ausencia de escalas características de tiempo (naturaleza fractal). En este sentido, una condición necesaria, pero no suficiente, para que el proceso sea un resultado directo de una cascada sin límites es que $\beta < 1$ (Sivakumar, 2001). Sin embargo, cascadas sin límites pueden producir procesos con $\beta > 1$, pero ellas no son multifractales en todos los casos (Sivakumar, 2001). En nuestro caso se encontró que la lluvia en los Andes tropicales de Colombia se puede modelar directamente por un proceso de cascadas multiplicativas ($\beta < 1$), a excepción de tres estaciones, las cuales sin embargo están muy cercanas al umbral: El Peñol ($1,07 \pm 0,01$), Julio Fernández ($1,03 \pm 0,03$) y Mande ($1,20 \pm 0,02$).

La concepción clásica considera la turbulencia como un campo anidado de remolinos de tamaños decrecientes, donde la energía cinética turbulenta “cascadea”

con despreciable disipación de los remolinos de mayor energía a remolinos de menor y menor energía, hasta alcanzar la escala de Kolmogorov (i.e., escala viscosa), donde los efectos de la viscosidad no pueden ser despreciados y las fluctuaciones turbulentas comienzan a ser suavizadas.

Sin embargo, en algunos casos dicha homogeneidad es inadecuada, dada la intermitencia de del fenómeno modelado, por lo tanto la hipótesis de Kolmogorov es insostenible pues dichos campos turbulentos son no homogéneos y corresponden a procesos dependientes de la escala, en escalas cada vez más pequeñas (Chorin, 1994; Seuront et al., 1999).

Cuando el exponente β del espectro de potencias es igual a $5/3 \simeq 1,67$, se presenta la turbulencia homogénea de Kolmogorov. En todas las estaciones se presentan valores del exponente β menores a $5/3$.

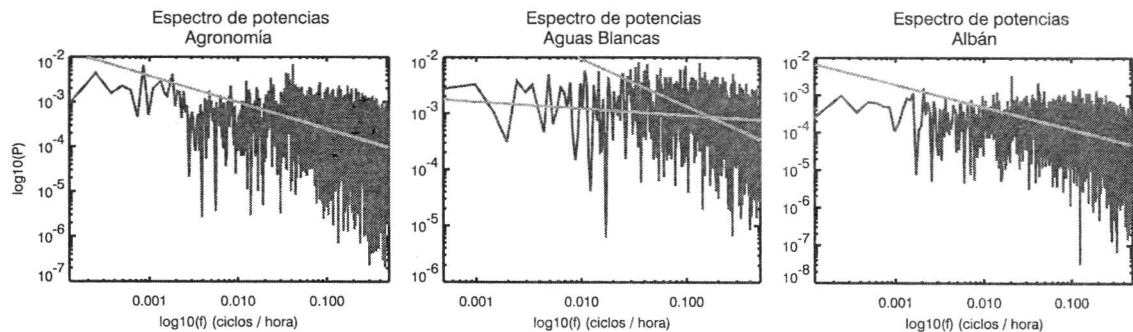


FIGURA 3. Espectro de potencias para las estaciones Agronomía, Aguas Blancas y Albán. La línea roja refleja la tendencia del espectro.

4.3. Espectros multifractales. En la figura 4 se presentan los espectros multifractales estimados por los cinco métodos, para tres de las estaciones analizadas. El método de los momentos presenta problemas para valores de q muy negativos, generando inestabilidad numérica y curvaturas irregulares en el espectro.

El método MF-FA, presenta inestabilidades muy fuertes en algunos casos, como se puede apreciar en la figura 4, sin embargo la remoción de tendencias (MF-DFA) supera estas inestabilidades y genera un espectro bien definido.

En general, para valores positivos de q , los métodos MF-FA, MF-DFA1 y MF-DFA4 estiman curvas similares, presentando divergencias muy fuertes a medida que q se hace negativo (i.e. valores grandes de α).

Es importante conocer el origen de la multifractalidad presente en las series de precipitación horaria. Al reordenar aleatoriamente los datos y estimar el espectro multifractal o verificar la existencia de multiescalamiento, es posible encontrar que los nuevos datos se comporten de forma monofractal, lo que indicaría que el comportamiento multifractal es debido a correlaciones de largo plazo en los registros, de lo contrario, si la multifractalidad persiste, se atribuirá la causa a singularidades en la distribución de los datos, es decir, a algún tipo de no linealidad estadística (Koscielny-Bunde et al., 2006). La figura 5, muestra los espectros estimados para la estación Agronomía con las cinco metodologías, tanto para la serie original, como para la serie reordenada aleatoriamente. En ambos casos se mantiene el comportamiento multifractal, lo cual atribuye el origen de

CUADRO 3. Resultados de los ajustes de la forma $E(f) \propto f^{-\beta}$, realizados a los espectros de potencia. En varios casos se encontraron dos regiones (1 - izquierda y 2 - derecha).

Estación	C_1	β_1	C_2	β_2	f^* (ciclos/hora)	P^*	t^* (horas)
Agronomía	-	-	0,00006 ± 0,000001	0,59 ± 0,01	-	-	-
Aguas Blancas	0,0007 ± 0,00009	0,12 ± 0,04	0,00019 ± 0,000011	0,84 ± 0,05	0,17	0,00087	6,0
Albán	-	-	0,00003 ± 0,000001	0,59 ± 0,01	-	-	-
Arturo Gómez	-	-	0,00004 ± 0,000001	0,53 ± 0,01	-	-	-
Blonay	-	-	0,00008 ± 0,000002	0,69 ± 0,01	-	-	-
Bremen	0,0002 ± 0,00004	0,28 ± 0,07	0,00010 ± 0,000003	0,62 ± 0,02	0,27	0,00023	3,7
Cenicafé	0,0004 ± 0,00009	0,15 ± 0,06	0,00021 ± 0,000007	0,52 ± 0,02	0,14	0,00056	6,9
Chapetón	0,0008 ± 0,00015	0,06 ± 0,05	0,00015 ± 0,000005	0,74 ± 0,02	0,09	0,00090	11,4
El Bizcocho	0,0002 ± 0,00005	0,33 ± 0,06	0,00014 ± 0,000003	0,72 ± 0,01	0,45	0,00025	2,2
El Cedral	-	-	0,00013 ± 0,000003	0,63 ± 0,01	-	-	-
El Jazmín	0,0004 ± 0,00009	0,25 ± 0,07	0,00021 ± 0,000006	0,49 ± 0,02	0,11	0,00062	9,3
El Limón	0,0010 ± 0,00024	0,17 ± 0,06	0,00046 ± 0,000015	0,58 ± 0,02	0,16	0,00131	6,1
El Peñol	0,0000 ± 0,00001	0,45 ± 0,08	0,00001 ± 0,000000	1,07 ± 0,01	0,29	0,00003	3,5
El Sauce	0,0003 ± 0,00004	0,27 ± 0,05	0,00021 ± 0,000013	0,41 ± 0,05	0,22	0,00039	4,5
El Sena	0,0013 ± 0,00034	0,24 ± 0,08	0,00056 ± 0,000029	0,63 ± 0,04	0,10	0,00235	10,0
Francisco Romer	-	-	0,00006 ± 0,000001	0,80 ± 0,01	-	-	-
Granja Tibacuy	0,0000 ± 0,00001	0,25 ± 0,06	0,00003 ± 0,000001	0,54 ± 0,01	0,19	0,00007	5,2
Inmarco	0,0002 ± 0,00003	0,14 ± 0,05	0,00004 ± 0,000001	0,74 ± 0,01	0,10	0,00023	10,0
Jorge Villamil	0,0001 ± 0,00003	0,11 ± 0,07	0,00002 ± 0,000001	0,69 ± 0,02	0,07	0,00015	14,3
Julio Fernandez	0,0011 ± 0,00017	0,06 ± 0,04	0,00011 ± 0,000004	1,03 ± 0,03	0,09	0,00129	11,1
La Bella	-	-	0,00007 ± 0,000001	0,53 ± 0,01	-	-	-
La Catalina	-	-	0,00013 ± 0,000003	0,46 ± 0,01	-	-	-
La Montaña	0,0001 ± 0,00001	0,13 ± 0,03	0,00010 ± 0,000005	0,28 ± 0,04	0,40	0,00012	2,5
La Sirena	0,0004 ± 0,00011	0,15 ± 0,07	0,00013 ± 0,000004	0,70 ± 0,02	0,12	0,00057	8,3
LLanadas	0,0006 ± 0,00012	0,19 ± 0,06	0,00044 ± 0,000022	0,32 ± 0,04	0,17	0,00079	6,0
Luis Bustamante	0,0006 ± 0,00009	0,24 ± 0,05	0,00038 ± 0,000022	0,47 ± 0,04	0,17	0,00088	5,8
Luker	0,0000 ± 0,00000	1,16 ± 0,02	0,00001 ± 0,000000	0,45 ± 0,05	0,15	0,00002	6,5
Mande	0,0003 ± 0,00008	0,34 ± 0,07	0,00005 ± 0,000002	1,20 ± 0,02	0,13	0,00059	7,5
Manuel María Ma	-	-	0,00006 ± 0,000001	0,69 ± 0,01	-	-	-
Manuel Mejía	-	-	0,00026 ± 0,000006	0,26 ± 0,01	-	-	-
Maracay	0,0011 ± 0,00026	0,02 ± 0,06	0,00028 ± 0,000008	0,57 ± 0,02	0,08	0,00118	13,0
Miguel Valencia	0,0013 ± 0,00035	-0,17 ± 0,07	0,00009 ± 0,000003	0,70 ± 0,02	0,04	0,00077	23,6
Misiones	-	-	0,00013 ± 0,000004	0,60 ± 0,02	-	-	-
Naranjal	0,0002 ± 0,00004	0,18 ± 0,04	0,00008 ± 0,000002	0,66 ± 0,02	0,10	0,00036	10,0
Ospina Pérez	0,0005 ± 0,00011	-0,17 ± 0,06	0,00003 ± 0,000001	0,71 ± 0,02	0,04	0,00029	23,5
Paraguaito	0,0002 ± 0,00007	0,19 ± 0,08	0,00007 ± 0,000002	0,77 ± 0,02	0,11	0,00037	9,2
Planta de Trata	0,0006 ± 0,00012	0,23 ± 0,07	0,00039 ± 0,000019	0,59 ± 0,04	0,35	0,00071	2,9
Pueblo Bello	0,0001 ± 0,00002	0,11 ± 0,06	0,00008 ± 0,000005	0,42 ± 0,04	0,35	0,00013	2,9
Rafael Escobar	0,0002 ± 0,00004	0,21 ± 0,06	0,00009 ± 0,000002	0,53 ± 0,01	0,15	0,00024	6,7
Rosario	0,0008 ± 0,00019	0,00 ± 0,06	0,00020 ± 0,000006	0,48 ± 0,02	0,06	0,00076	16,6
Santa Ana	0,0003 ± 0,00006	0,15 ± 0,06	0,00008 ± 0,000003	0,76 ± 0,02	0,13	0,00036	7,5
Santa Bárbara	0,0001 ± 0,00002	0,40 ± 0,07	0,00005 ± 0,000002	0,67 ± 0,02	0,30	0,00011	3,4
Santa Helena	0,0032 ± 0,00093	-0,02 ± 0,07	0,00033 ± 0,000010	0,78 ± 0,02	0,06	0,00307	17,1
Santa Inés	0,0000 ± 0,00000	0,37 ± 0,03	0,00003 ± 0,000001	0,68 ± 0,03	0,32	0,00006	3,1
Santagueda	0,0001 ± 0,00002	0,24 ± 0,06	0,00004 ± 0,000001	0,59 ± 0,01	0,28	0,00009	3,5
Santiago Gutiérrez	0,0001 ± 0,00003	0,11 ± 0,07	0,00004 ± 0,000001	0,61 ± 0,02	0,15	0,00013	6,8
Yacopí	0,0001 ± 0,00005	0,21 ± 0,07	0,00009 ± 0,000001	0,51 ± 0,01	0,19	0,00021	5,1

dicho comportamiento a una no linealidad estadística. En todas las estaciones se encontró un resultado similar.

Dada la discrepancia encontrada en los espectros estimados, se hace necesario el uso de una herramienta un poco más estándar como la fuerza multifractal, $\Delta\alpha$ (Koscielny-Bunde et al., 2006), la cual se define como la diferencia entre los valores máximos y mínimos de α :

$$\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}. \quad (28)$$

Esta fuerza multifractal es una medida de que tan fuerte es la multifractalidad presente en un proceso. En este trabajo se estimó $\Delta\alpha$ para cada estación y con las cinco metodologías para momentos de ordenes entre -4 y 4, tratando de evitar la divergencia de momentos en la mayoría de estaciones.

Los resultados muestran los valores más altos de $\Delta\alpha$ con MF-FA, del orden de 2 a 3 veces más de lo estimado con las otras metodologías.

En general, todas las estaciones presentan valores superiores a 0,66 y con valores promedio entre 1,0 y 1,8.

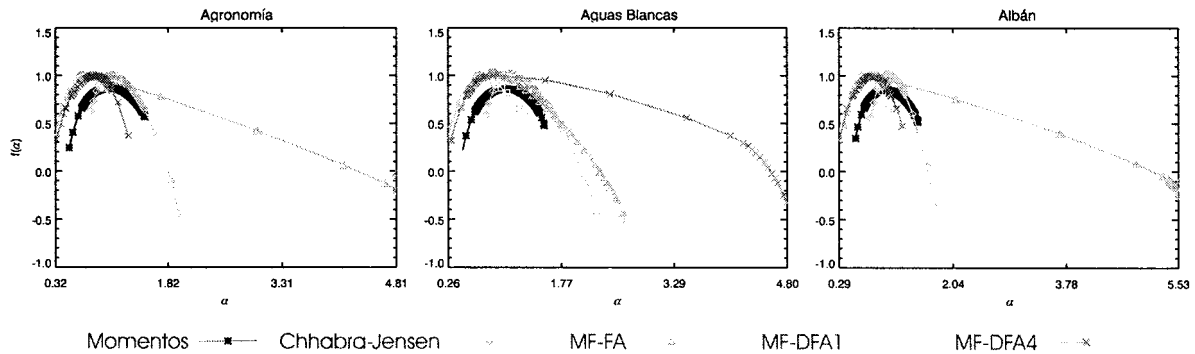


FIGURA 4. Espectros multifractales estimados para las estaciones Agronomía, Aguas Blancas y Albán, a partir de las cinco metodologías propuestas.

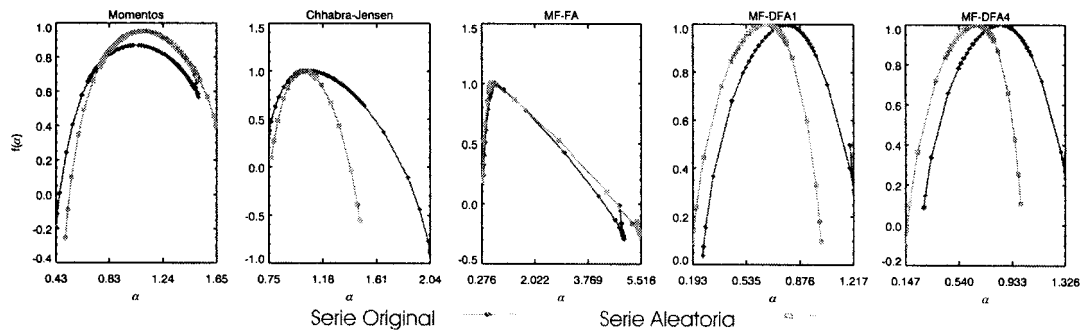


FIGURA 5. Espectros multifractales estimados para la estación Agronomía, a partir de las cinco metodologías propuestas. En azul se presenta el espectro de la serie original y en rojo la serie reordenada aleatoriamente.

Vale la pena tener presente la alta incertidumbre en $\Delta\alpha$, pues a medida que se aumenta el orden q , se incurre en estimaciones menos confiables debido a inestabilidad numérica, la aplicación de la transformada de Legendre y la posible presencia de transiciones de fase.

4.4. Modelo para el exponente de Renyi. En los trabajos de **Kantelhardt et al. (2003)** y **Koscielny-Bunde et al. (2006)** se presenta un modelo simple para representar el exponente de Renyi, $\tau(q)$, el cual se relaciona con el espectro multifractal, $f(\alpha(q))$, mediante la transformada de Legendre (véanse las ecuaciones 11a y 11b), aplicado a registros de caudal y lluvia. Este modelo permite caracterizar de forma “universal” el comportamiento multifractal de una medida mediante sólo dos parámetros independientes, a y b , los cuales podrían considerarse rasgos multifractales característicos del fenómeno estudiado, de tal forma que:

$$\tau(q) = -\ln(a^q + b^q)/\ln(2) \quad (29)$$

A partir del modelo de cascadas multiplicativas se deduce que $a + b = 1$; sin embargo, **Kantelhardt et al. (2003)** amplía la condición, considerado que $a + b \geq 1$ y $0 < a < b < 1$, con el objetivo de ajustarse más adecuadamente a los datos de caudal.

El espectro multifractal se puede estimar a partir de la transformada de Legendre como:

$$\alpha(q) = -\frac{1}{\ln(2)} \left[\frac{a^q \ln(a) + b^q \ln(b)}{a^q + b^q} \right] \quad (30a)$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \tau(q). \quad (30b)$$

Es importante entender el comportamiento de dichos modelos, pues sus parámetros serán rasgos característicos del fenómeno modelado. En particular, cuando $a = b$ se encuentra un comportamiento monofractal, caracterizado por tener un exponente de Renyi que varía de forma lineal ($\tau(q) = \eta q - 1$), con exponente Hölder (α) y espectro multifractal ($f(\alpha)$) iguales a la dimensión de embebimiento $D = 1$. La pendiente η es 1 si $a = b = 0,5$,

disminuye si los parámetros son mayores a 0,5 y aumenta en el caso contrario (véase la figura 6(a)).

A medida que $a \neq b$, el exponente $\tau(q)$ comienza a variar de forma no lineal, cruzando siempre por el punto $[q = -1, \tau = 0]$ y por lo tanto formando un espectro de singularidades bien definido, el cual es función de dichos parámetros, presentando una variación de la fuerza multifractal ($\Delta\alpha = \alpha(-\infty) - \alpha(\infty)$) de la forma:

$$\Delta\alpha = \frac{\ln(\frac{b}{a})}{\ln(2)}, \quad (31)$$

mostrando que a medida que “a” sea más parecido a “b”, la fuerza multifractal se acercará a cero (caso monofractal) y a medida que se alejen aumenta la multifractalidad. Similarmente, es posible deducir una expresión para la posición del centro del espectro multifractal ($\alpha(0)$):

$$\alpha(0) = \frac{\ln(b \cdot a)}{2 \ln(\frac{1}{2})}, \quad (32)$$

desplazando la curva $f(\alpha)$ de derecha a izquierda a medida que “b · a” aumenta (véase la figura 6 (a) y (b)).

En este trabajo se ajustó el modelo descrito anteriormente con todas las metodologías, a excepción del método de Chhabra y Jensen, utilizando un algoritmo genético (Adeli & Hung, 1995) para encontrar los parámetros que minimicen el error cuadrático medio (RMSE) al adaptar el modelo en los valores del exponente de Renyi estimados (véase la figura 7). Con el método de los momentos ($\mu_{a+b} = 1,05, \sigma_{a+b} = 0,05$), MF-DFA1 ($\mu_{a+b} = 1,24, \sigma_{a+b} = 0,09$) y MF-DFA4 ($\mu_{a+b} = 1,11, \sigma_{a+b} = 0,12$); se observa que para la mayoría de las estaciones se cumple $a + b \geq 1$, sin embargo con el MF-FA ($\mu_{a+b} = 1, \sigma_{a+b} = 0,18$) se encuentra $a + b < 1$ como el comportamiento general.

Cuando se analizaron los parámetros a y b , se encuentra que en general el parámetro característico es el primero, puesto que el segundo se mantiene aproximadamente constante en todas las metodologías y para todas las estaciones, presentando $\mu_b = 0,84$ y $\sigma_b = 0,02$ para MF-FA, MF-DFA1 y MF-DFA4; y $\mu_b = 0,72$ y $\sigma_b = 0,02$ el método de los momentos. En la siguiente sección se tratará de relacionar el parámetro a con la elevación desde el piso del valle en cada estación.

Finalmente, en todos los casos se tienen coeficientes de determinación mayores a 0.99, lo cual es un indicativo de un excelente ajuste de los datos al modelo, sin

embargo, desde el punto de vista del error cuadrático medio los peores ajustes del modelo se presentan con la metodología MF-FA ($\mu_{RMSE} = 32, \sigma_{RMSE} = 0,13$). Similarmente, es posible ajustar el modelo a los datos del exponente de Hölder, $\alpha(q)$ o al espectro de potencias, $f(\alpha(q))$, utilizando las expresiones (30a) y (30b), respectivamente. Sin embargo, el ajuste es menos acertado que en el caso del exponente de Renyi para el primer caso y prácticamente imposible en el segundo, lo cual, como se mencionó anteriormente, se le atribuye a inestabilidad numérica, la aplicación de la transformada de Legendre y la posible presencia de transiciones de fase.

4.5. Elevación sobre el piso del valle. En este caso no se encuentra una relación directa entre la elevación de las estaciones desde el piso del valle y los exponentes encontrados para la distribución de probabilidad empírica (exponente de probabilidad crítico), el espectro de potencias (exponente espectral) y el parámetro α cuando se analizan todas las estaciones en cada vertiente, a diferencia de lo encontrado en el trabajo de Harris et al., 1996. Además, se definieron tres transectos los cuales descienden sobre la ladera oriental de la cordillera central, sin encontrar una relación clara (véase la figura 8). Con los anteriores análisis se esperaba encontrar una relación entre las variables mencionadas y una de las características más importantes de la lluvia en los Andes tropicales de Colombia, conocida como el óptimo pluviométrico (Mesa et al., 1997).

5. Conclusiones

La conclusión principal de este trabajo es el hallazgo de comportamiento multifractal en las series horarias de precipitación en los Andes tropicales de Colombia, lo cual abre un inmenso abanico de posibilidades de investigación, orientadas a comprender a fondo la climatología Colombiana y a mejorar la forma en la cual se modela gran cantidad de procesos hidrológicos, pues mejores predicciones requieren la identificación de la estructura de dichos procesos y la utilización de métodos no lineales. En el caso de fenómenos caóticos y altamente no lineales como lo es la hidroclimatología Colombiana, el determinismo es un camino “casi imposible” para su comprensión, lo cual potencializa la utilidad de descripciones estocásticas como la multifractal.

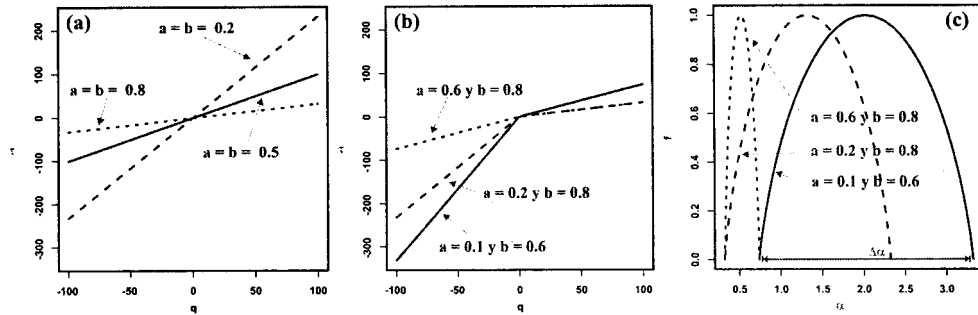


FIGURA 6. Modelo multifractal propuesto por Kantelhardt et al. (2003) y su variación en algunos casos particulares

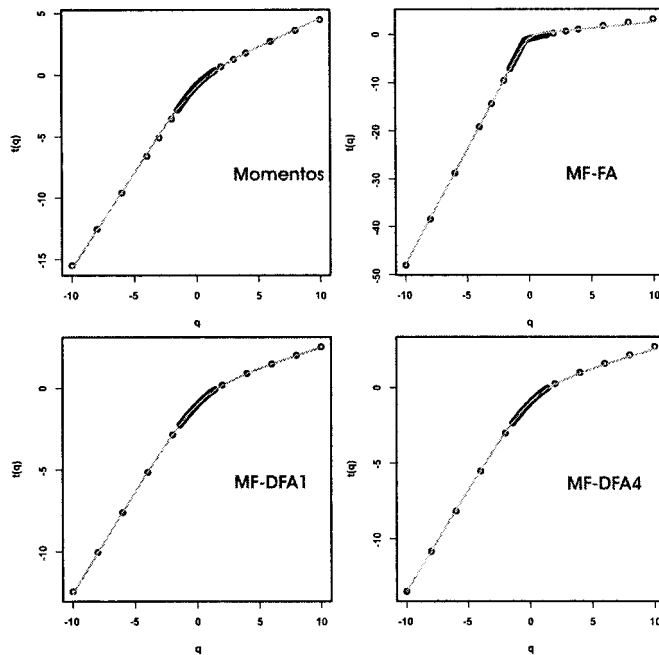


FIGURA 7. Modelos ajustados a los valores de $\tau(q)$ estimados por las cuatro metodologías. La curva corresponde al ajuste

Los periodos sin precipitación (ceros en la serie de tiempo) juegan un papel fundamental en la estimación de espectro multifractal de la lluvia. Estos son un valor característico, pero en el caso de las mediciones, su presencia puede ser sobreestimada debido al truncamiento de los instrumentos, lo cual genera valores nulos donde no existen, jugando un papel fundamental en la estadística del análisis.

Se propuso un modelo potencial de colas pesadas para la distribución de probabilidad de la lluvia en cada estación ($P(X > x) = Cx^{q_{cr}}$). En ambos casos fue posible dividir el dominio en dos regiones, para las cuales

se encontró que los valores extremos (región derecha) se acoplan adecuadamente al modelo multifractal, es decir, $q_{cr} > 2$, mientras para la otra región el monofractal es suficiente.

Los espectros de potencia mostraron un comportamiento de la forma $E(f) \propto f^{-\beta}$, donde para la mayoría de los casos se encontró que las series poseen $\beta < 1$ y por tanto cumplen una de las condiciones para ser originadas a partir de una cascada multiplicativa (Sivakumar, 2001). En estos ajustes se encontraron dos regiones características para varias de las estaciones, en las cuales se tiene $\beta < 1$.

El proceso de calibración muestra que las metodologías presentaron buenos resultados en la estimación del espectro multifractal de las medidas binomiales generadas sintéticamente. En este proceso se resalta el método MF-FA como el más eficiente, debido a sus buenas estimaciones y simpleza algorítmica. Sin embargo, es de anotar que en el caso de series geofísicas la remoción de tendencias si juega un papel significativo.

El espectro multifractal de las series de precipitación horaria, encontrado con las cinco las metodologías difiere considerablemente en su estimación, lo cual deja

este tipo de descripción con un alto grado de incertidumbre, al menos desde el punto de vista cuantitativo, pues todas las metodologías convergen a evidenciar un escalamiento múltiple, pero con diferentes características.

En algunos casos se presentan valores de $f(\alpha)$ menores que cero, sin embargo no parecen ser producto de las características propias de la serie (Mandelbrot, 1990, 2003), sino de inestabilidades numéricas por divergencia de los momentos, dada la cercanía al cero y a que corresponden a valores de momento mayores a $|q_{cr}|$.

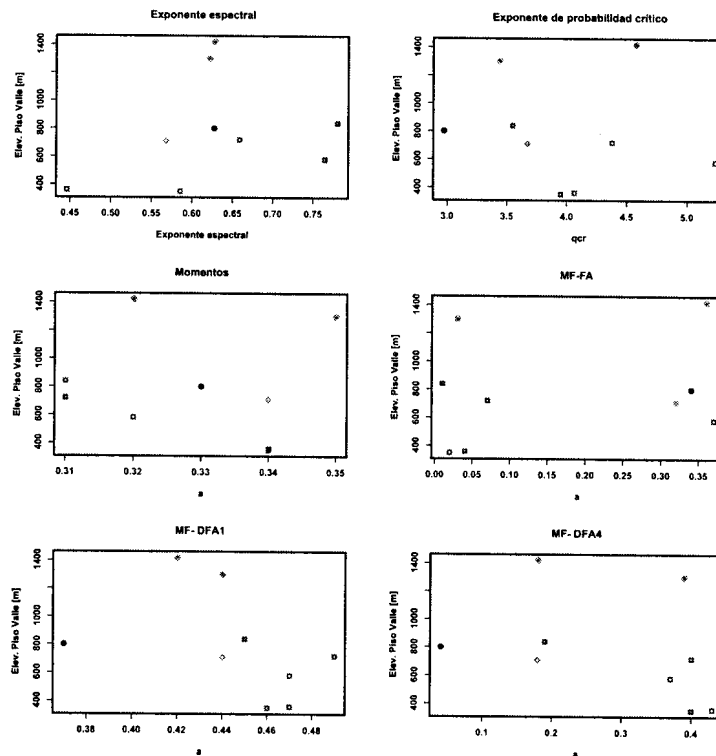


FIGURA 8. Análisis de la elevación sobre el piso del valle de las estaciones en los transectos: 1) El Cedral, Bremen y El Sena (círculos negros), 2) Santa Helena, Naranjal Santa, Ana, Santaguada y Luker (cuadros azules) y 3) El Cedral, Bremen y Maracay (diamantes rojos) y los parámetros β , q_{cr} y a .

Se encuentra que la multifractalidad presente en las series de precipitación horaria se puede atribuir a una no linealidad estadística (Olsson, 1995) y no a correlaciones de largo plazo en los registros.

Los exponentes encontrados para la distribución de probabilidad empírica (exponente de probabilidad crítico), el espectro de potencias (exponente espectral) y el parámetro a , estimados para cada estación y para

cada metodología, no presentan una relación clara con la ubicación espacial, ni con la elevación sobre el piso del valle.

Finalmente, las metodologías utilizadas en este trabajo para la estimación del espectro multifractal tienen falencias y problemas al trabajar con series geofísicas como la lluvia, por lo tanto se hace necesaria la investigación de otras metodologías que permitan hacer un

estudio cuantitativo más confiable y por ende la aplicación del multiescalamiento de la lluvia en problemas tan importantes como el de los modelos lluvia-escorrentía, la generación de curvas de intensidad frecuencia y duración (IDF), y el diseño hidrológico, entre otros. Ante este panorama, se potencializa el uso del modelo mencionado en la sección 4.4, dejando de lado la transformada de Legendre y sus restricciones ante posibles transiciones de fase, y utilizando las definiciones matemáticas para modelar espectro de singularidades del fenómeno.

Agradecimientos. El trabajo de **G. Poveda** hace parte del Programa de Investigación del Grupo GRECIA, financiado por COLCIENCIAS. Al Centro Nacional de Investigaciones del Café (CENICAFE) y a las Empresas Públicas de Medellín (EPM), por el suministro de la información.

Referencias

- Adeli, H. & S. L. Hung** (1995), *Machine learning. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems*, John Wiley and Sons, Canada.
- Agudelo P., P. Arias, & L. Salazar** (2001), *Caracterización del ciclo diario de precipitación en los Andes tropicales de Colombia. Región Centro*, Tesis Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.
- Álvarez, F. & V. Toro** (2001), *Caracterización del ciclo diario de precipitación en los Andes tropicales de Colombia. Región Sur*, Tesis Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.
- Barnsley, M. F.** (1993), *Fractals Everywhere*, 2nd ed., Academic Press, San Diego.
- Billingsley, P.** (1965), *In Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York.
- Braun, E.** (1996), *Caos, fractales y cosas raras*. Fondo de Cultura Económica, México.
- Chhabra, A. & R. Jensen** (1989), Direct determination of the f singularity spectrum, *Physical Review Letters*, 62(12), 1372–1330.
- Chhabra, A., C. Meneveau, R. Jensen, & K. R. Sreenivasan** (1989), Direct determination of the f singularity spectrum and its applications to fully developed turbulence, *Physical Review A*, 40(9), 5284–5294.
- Chorin, A.** (1994), *Vorticity and Turbulence*, Springer-Verlag, New York.
- Courant R. & D. Hilbert** (1953), *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience Publishers, New York.
- de Lima M. I. P & J. Grasman** (1999), Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology*, 220, 1–11.
- Douglas, E. M. & A. P. Barros** (2003), Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States, *Journal of Hydrometeorology*, 1012–1024.
- Flores, C.** (2004), Multiplicative cascade models for rain in hydro-meteorological disasters risk management, ASTIN-Kolloquium, Bergen, Norway.
- Grassberger, P., R. Badii, & A. Politi**, (1988), Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors, *Physics and Astronomy*, 51, 135–178.
- Gupta V. K. & E. Waymire** (1993), A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 251–267.
- Harris, D., M. Menabde, A. Seed & G. Austin** (1996), Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence, *Journal of Geophysical Research*, D21, 101, 405–26.
- Kantelhardt, J. W., D. Rybsky, S. Zschiegner, P. Braun, E. Koscielny-Bunde, V. Livina, S. Havlin, & A. Bunde** (2003), Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods, *Physica A*, 330, 240–245.
- Koscielny-Bunde, E., J. Kantelhardt, P. Braun, A. Bunde, & S. Havlin** (2006), Long-term persistence and multifractality of river runoff records: Detrended fluctuation studies, *Journal of Hydrology*, 322 (1–4), 120–137.
- Mandelbrot, B.** (1989), Multifractal measures especially for the geophysicist, *PAGEOPH*, 131(12), 38.
- Mandelbrot, B.** (1990), Negative fractal dimensions and multifractals, *Physica A*, 163, 10.
- Mandelbrot, B.** (2003), Multifractal power law distributions: Negative and critical dimensions and other anomalies, explained by a simple example, *Journal of Statistical Physics*, 110, 739–774.
- Mesa O. J. & Poveda G.** (1993), The Hurst effect: The scale of fluctuation approach, *Water Resources Research*, 29, 3995–4002.
- Mesa O., G. Poveda & L. Carvajal** (1997), *Introducción al Clima de Colombia*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.
- Montgomery, D. & G. Runger** (1996), *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*, McGraw-Hill, Mexico. p. 1000.
- Moreno, H. & G. Poveda** (2004), Colas pesadas en el análisis probabilístico de la lluvia y exponente de Hurst durante las fases del ENSO, *XVI Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología*.
- Olsson, J.** (1995), Limits and characteristics of the multifractal behavior of a high-resolution rainfall time series, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2, 23–29.
- Olsson, J. & J. Niemczynowicz** (1996), Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions, *J. Hydrol.* 187, 29–43.
- Ott, E., W. D. Withers, & J. A. Yorke**, (1984), Is the dimension of chaotic attractors invariant under coordinate

- changes?, *Journal of Statistical Physics*, 36, 687–697.
- Peitgen, H., H. Jürgens, & D. Saupe** (1992), *Chaos and Fractals New Frontiers of Science (Appendix B. Multifractal Measures)*, Hamilton Printing Co., New York.
- Poveda, G., O. Mesa, L. Salazar, P. Arias, H. Moreno, S. Viera, P. Agudelo, V. Toro, & J. Álvarez** (2005), The diurnal cycle of precipitation in the tropical Andes of Colombia, *Monthly Weather Review*, 133, 228–240.
- Schertzer, D. & S. Lovejoy** (1996), Notes and correspondence. universal multifractals do exist!: Comments on statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade, *Journal of Applied Meteorology* 136, 1296–1303.
- Schertzer, D., P. Hubert & S. Lovejoy** (2003), Scaling, Multifractals and Predictions in Ungaged Basins: Where We've Been, Where We're Going?, in *Prediction of Ungaged Basins*, An IAHS Initiative, Eds. P. Hubert et al., IAHS Press, Wallingford UK.
- Schertzer, D., S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Chigirinskaya, & D. Marsan** (1997), Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals*, 5, 427–471.
- Seuront, L., F. Schmitt, Y. Lagadeuc, D. Schertzer & S. Lovejoy** (1999), Universal Multifractal Analysis as a tool to characterize multiscale intermittent patterns: example of phytoplankton distribution in turbulent coastal waters, *Journal of Plankton Research*, 21, 877–922.
- Sivakumar, B.** (2001), Is a chaotic multi-fractal approach for rainfall possible?, *Hydrological Processes*, 15, 943–955.
- Svensson, C., J. Olsson & R. Berndtsson** (1996), Multifractal properties of daily rainfall in two different climates, *Water Resources Research*, 32, 2463–2472.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, & D. Schertzer** (1993), Universal multifractals: Theory and observations for rain and clouds, *Journal of Applied Meteorology*, 223–250.
- Vieira S. & H. Moreno** (2001), *Caracterización del ciclo diurno de precipitación en los Andes tropicales de Colombia. Región Sur*, Tesis Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.

Recibido: abril 19 de 2007

Aceptado para publicación: diciembre 3 de 2008