

# EFECTO DE LA CURVATURA ESPACIAL DEL UNIVERSO EN EL ESPECTRO ANGULAR DE LAS ANISOTROPÍAS EN LA TEMPERATURA DE LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO

Por

Gabriel A. Mariño<sup>1</sup> & Yeinzon Rodríguez<sup>2,3</sup>

## Resumen

**Mariño, G.A. & Y. Rodríguez:** Efecto de la Curvatura Espacial del Universo en el Espectro Angular de las Anisotropías en la Temperatura de la Radiación Cósmica de Fondo. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **32**(124): 373-379, 2008. ISSN 0370-3908.

El paradigma inflacionario resuelve los tres problemas clásicos de la cosmología estándar: el problema de planitud, el problema de horizonte y el problema de las reliquias no deseadas. En particular el problema de planitud se resuelve al explicar cómo la contribución relativa de la curvatura espacial del Universo  $\frac{K}{a^2 H^2}$  a la densidad total de energía decrece exponencialmente durante inflación. Además, el escenario inflacionario nos ofrece un mecanismo eficiente para generar pequeñas perturbaciones en la curvatura espacial que explicarían las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF) observadas hoy en día. Los tradicionales modelos inflacionarios que desprecian la contribución relativa  $\frac{K}{a^2 H^2}$  reproducen las recientes observaciones del satélite WMAP sobre el espectro angular  $C_l$  de las anisotropías en la temperatura de la RCF, excepto para los multipolos más pequeños, y especialmente para el cuadrupolo ( $l = 2$ ) en el cual el valor observado presenta una inesperada caída. Este extraño comportamiento nos conduce a analizar el espectro angular  $C_l$  a grandes escalas (pequeños multipolos) teniendo en cuenta la contribución relativa  $\frac{K}{a^2 H^2}$ . De esta manera determinamos el tipo de curvatura característica del Universo observado más favorecida por los datos observacionales concernientes al cuadrupolo.

**Palabras clave:** Curvatura espacial del Universo, anomalías en la radiación cósmica de fondo.

1 Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Colombia, Correo electrónico: gabriel\_marino@hotmail.com

2 Centro de Investigaciones, Universidad Antonio Nariño, Cra. 3 Este No. 47A-15, Bogotá, D.C., Colombia, Correo electrónico: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co

3 Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Colombia, Correo electrónico: yrodrig@uis.edu.co

## Abstract

The inflationary paradigm solves the three classical problems in standard cosmology: the flatness

problem, the horizon problem, and the unwanted relics problem. In particular the flatness problem is solved by explaining how the relative contribution of the spatial curvature of the Universe  $\frac{K}{a^2 H^2}$  to the total energy density decreases exponentially during inflation. In addition, the inflationary scenario offers us an efficient mechanism to generate small perturbations in the spatial curvature that would explain the observed temperature anisotropies in the cosmic microwave background radiation (CMB). The traditional inflationary models that neglect the relative contribution  $\frac{K}{a^2 H^2}$  reproduce the recent observations from the WMAP satellite on the angular spectrum  $C_l$  of the temperature anisotropies in the CMB, except for the lower multipoles, and specially for the quadrupole ( $l = 2$ ) for which the observed value presents an unexpected fall. Such a strange behaviour leads us to analyze the angular spectrum  $C_l$  on large scales (low multipoles) taking into account the relative contribution  $\frac{K}{a^2 H^2}$ . We determine in this way the type of characteristic curvature of the observed Universe most favoured by the observational data regarding the quadrupole.

**Key words:** Spatial curvature of the Universe, anomalies in the cosmic microwave background radiation.

## 1. Introducción

El modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) adoptado como modelo estándar en cosmología, describe muy bien las propiedades de nuestro Universo observable tales como la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, la expansión de Hubble, y la abundancia de elementos ligeros (Dodelson, 2003; Kolb & Turner, 1990; Liddle & Lyth, 2000; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). El elemento de línea asociado en coordenadas esféricas comóviles se puede expresar como:

$$\begin{aligned} ds^2 &\equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

en donde  $a(t)$  es el factor de expansión y  $K$  es el parámetro de curvatura espacial que describe un universo espacialmente cerrado si  $K > 0$ , un universo espacialmente abierto si  $K < 0$ , o un universo espacialmente plano o euclideo si  $K = 0$ . Mediante la siguiente transformación en la coordenada radial  $r$ ,

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}K\bar{r}^2}, \quad (2)$$

la parte espacial de la métrica de FRW luce ahora conforme a la parte espacial de la métrica de Minkowski (Mukhanov, 2005):

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + \frac{K\bar{r}^2}{4}} \left[ d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 \right], \quad (3)$$

en donde las variables  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , y  $\bar{z}$  están definidas como

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv \bar{r} \sin \theta \cos \phi, \\ \bar{y} &\equiv \bar{r} \sin \theta \sin \phi, \\ \bar{z} &\equiv \bar{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando el contenido material del Universo como un fluido perfecto con densidad de energía  $\rho$  y presión  $P$  homogéneas e isotrópicas, la componente temporal de las ecuaciones de campo de Einstein conduce a la ecuación de Friedman (Dodelson, 2003; Kolb & Turner, 1990; Liddle & Lyth, 2000; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008), la cual relaciona el parámetro de curvatura  $K$  de la métrica FRW con el parámetro de densidad de energía del Universo  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{critico}}}$ :

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (5)$$

siendo  $H = \dot{a}/a$  el parámetro de Hubble, y  $\rho_{\text{critico}} \equiv 3m_p^2 H^2$  en donde  $m_p$  es la masa reducida de Planck. Esta ecuación nos dice que si la densidad de energía es igual a la densidad crítica  $\rho = \rho_{\text{critico}}$  el Universo es plano, i.e.  $K = 0$ , manteniéndose la relación  $\rho = \rho_{\text{critico}}$  para cualquier tiempo cósmico  $t$ . Si por el contrario,  $\rho > \rho_{\text{critico}}$  ( $\rho < \rho_{\text{critico}}$ ), el Universo será cerrado (abierto), i.e.  $K > 0$  ( $K < 0$ ). Siendo este el caso,  $K \neq 0$ , el parámetro de densidad de energía de nuestro Universo evolucionará con el tiempo al igual que la contribución relativa de la curvatura  $\frac{K}{a^2 H^2}$ . En general el valor de esta contribución está dado por el horizonte de partículas comóvil, el cual define el campo visual para las observaciones a gran escala del Universo y depende de la

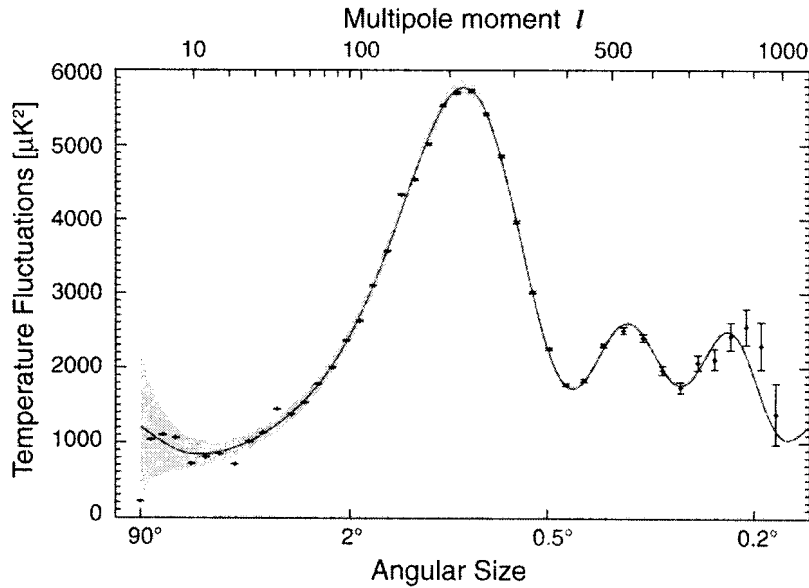


Figura 1: Espectro angular de las anisotropías de la RCF (cortesía del equipo WMAP de la NASA ([NASA's WMAP homepage: http://wmap.gsfc.nasa.gov/](http://wmap.gsfc.nasa.gov/))). Mayores valores del momento multipolar  $l$  están asociados a escalas más pequeñas del Universo. La línea continua corresponde al mejor ajuste teórico asumiendo  $K = 0$ . La zona gris representa la incertidumbre asociada a la varianza cósmica. El primer dato observacional a la izquierda corresponde al cuadrupolo ( $l = 2$ ).

expansión del mismo.

Un reciente reporte de datos proveniente del satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), en combinación con las medidas de distancias de SN (Type Ia supernovae) y BAO (Baryon Acoustic Oscillations) en la distribución de galaxias, ha determinado el rango de valores permitidos a  $2\sigma$  para el parámetro de densidad de energía del Universo actual como  $-0,0175 < (\Omega - 1) < 0,0085$  (Komatsu et al., 2008). Lo anterior significa que la contribución relativa de la curvatura espacial puede ser tan grande como  $\frac{|K|}{(a_0 H_0)^2} = 0,0175$ , en donde el subíndice 0 significa que la cantidad es calculada hoy en día. Una posible explicación para esta contribución tan pequeña es que el parámetro de curvatura espacial  $K$  es igualmente pequeño ( $K/a_0^2 \approx 0$ ), incluso nulo, lo cual corresponde físicamente a un Universo muy plano, según la ecuación (5). Debido a que esta suposición requiere un ajuste muy fino en las condiciones iniciales del Universo, generalmente se asume de manera más natural un Universo con curvatura  $K$  arbitraria positiva o negativa y se recurre al paradigma inflacionario para resolver el problema de la contribución despreciable de la curvatura.

En el escenario inflacionario el Universo temprano experimenta una expansión acelerada,  $\ddot{a} > 0$ , la cual provoca que el factor de expansión  $a$  crezca exponencialmente mientras

$H$  permanece casi constante (Dodelson, 2003; Kolb & Turner, 1990; Liddle & Lyth, 2000; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Esto permite explicar, en vista de la ecuación (5), los valores tan pequeños para la presente contribución relativa de la curvatura espacial  $\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$ , sin importar qué tan grande sea el parámetro  $K$ . Físicamente esto se debe al reducido horizonte de partículas comóvil  $d_c$  heredado de inflación el cual se puede considerar como  $d_c \approx \frac{H^{-1}}{a}$ , y dificulta la apreciación de la curvatura espacial dado que limita la región observable de nuestro Universo hoy en día.

Tradicionalmente los modelos inflacionarios y de universo temprano se han estudiado en el marco de curvatura espacial plana,  $K = 0$ . Esto debido al extremadamente pequeño valor alcanzado por  $\frac{K}{a^2 H^2}$  durante inflación. Dado que las predicciones teóricas son altamente consistentes con las observaciones, se avala de esta manera la escogencia de un universo plano. Sin embargo, como se pretende señalar en este artículo, las observaciones de las anisotropías en la temperatura de la RCF a grandes escalas (pequeños multipolos) son las que presentan una mayor desviación del comportamiento predicho por el modelo de universo plano, en particular la supresión en el espectro angular  $C_l$  asociada con el cuadrupolo ( $l = 2$ ) (Nolta et al., 2008) (véase la figura (1)). Dado que el valor observado para  $C_{l=2}$  se encuentra aún por fuera de la incertidumbre asociada a la varianza cósmica (zona

gris en la figura (1)), la comparación entre el modelo de FRW con curvatura  $K$  y el valor observado para  $C_{l=2}$  permiten determinar el tipo de curvatura más favorecida por este último dato observacional (Efstathiou, 2003; Massó et. al., 2006).

## 2. Efecto de la curvatura espacial en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la RCF

Un modelo más realista del Universo incluye adicionalmente las perturbaciones en la métrica. Éstas pueden ser categorizadas en tres distintos tipos: escalares, vectoriales y tensoriales (Mukhanov, Feldman, & Brandenberger, 1992). Sólo se considerarán en este artículo las perturbaciones escalares pues son éstas, las que a primer orden, generan las inhomogeneidades en la densidad de energía del Universo, esenciales para la formación de estructuras. Dichas inhomogeneidades son finalmente responsables de las anisotropías en la temperatura de la RCF,  $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$  (Hinshaw et. al., 2008).

El método más simple para modelar las inhomogeneidades en la densidad de energía  $\rho$  (y la curvatura espacial) supone que éstas fueron impresas en el Universo temprano debido a las fluctuaciones cuánticas asociadas a algún campo escalar  $\psi$  que domina dicha densidad de energía durante el período inflacionario. El campo  $\psi$  es por lo tanto el responsable de generar inflación y por ende se le denomina "inflatón". Las fluctuaciones cuánticas en  $\psi$  adquieren un carácter clásico a la salida del horizonte (Lyth, 1985; Lyth & Seery, 2008), y contribuyen al tensor momentum-energía generando, a través de las ecuaciones de Einstein, perturbaciones en la métrica de FRW. El tensor métrico perturbado  $g_{\mu\nu}$  se define mediante la expresión (Mukhanov, 2005; Mukhanov, Feldman, & Brandenberger, 1992):

$$g_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 1 + 2A & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1+K\vec{r}^2/4} (1 - 2A)\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

en el llamado gauge longitudinal y en ausencia de presiones anisotrópicas, siendo  $A$  la denominada perturbación intrínseca en la curvatura.

La relación entre las perturbaciones métricas y el campo  $\psi$  está dada por las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}, \quad (7)$$

siendo  $G_{\mu\nu}$  el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  el tensor momentum-energía el cual es una función del campo escalar  $\psi$ . Separando el campo escalar como  $\psi(\vec{x}, t) = \psi_0(t) + \delta\psi(\vec{x}, t)$ ,

las perturbaciones en el campo escalar  $\delta\psi$  se pueden calcular a partir de la ecuación de Klein-Gordon generalizada (Mukhanov, 2005; Mukhanov, Feldman, & Brandenberger, 1992):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = -V'(\psi), \quad (8)$$

con  $V'(\psi)$  denotando la derivada del potencial escalar  $V$  con respecto a  $\psi$ .

Finalmente, la cantidad física a calcular es la perturbación primordial en la curvatura espacial comóvil invariante de gauge (Bardeen, 1980), definida como:

$$\zeta = -A - H \left( \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} \right), \quad (9)$$

la cual mide la curvatura espacial intrínseca sobre una hiper-superficie de densidad de energía uniforme.  $\zeta$  está relacionada, a grandes escalas, con las anisotropías en la temperatura de la RCF medidas por un observador en  $(\vec{x}_0, \eta_0)$  mediante la relación de Sachs-Wolfe (Sachs & Wolfe, 1967):

$$\left( \frac{\delta T(\hat{n}, \vec{x}_0, \eta_0)}{T} \right)_{\vec{k}} = \frac{1}{5} \zeta_{\vec{k}}(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD}), \quad (10)$$

en donde  $\hat{n}$  denota el vector unitario en la dirección en la que se observa la anisotropía, y  $\zeta_{\vec{k}}(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD})$  es calculada en la hiper-superficie de la última dispersión (la superficie espacial desde la cual recibimos la radiación cósmica de fondo generada en un tiempo conformal  $\eta_{UD}$ ). La relación en la ecuación (10) se puede entender físicamente teniendo en cuenta que  $\zeta$  representa, a través de las ecuaciones (6) y (9), el potencial gravitacional dependiente de la posición. Así, debido a las inhomogeneidades en la densidad de energía sobre la superficie de la última dispersión, cada fotón debe superar una barrera de potencial de mayor o menor altura dependiendo del sitio de emisión. De esta manera, la pérdida de energía de cada fotón, asociada a un corrimiento al rojo en su longitud de onda, corresponderá a una reducción en la temperatura asociada al fotón de acuerdo a la ley de desplazamiento de Wien (Weinberg, 2008).

Con la información presentada en la ecuación (10) se puede calcular el espectro angular  $C_l$  definido mediante el correlador de dos puntos entre dos temperaturas medidas en direcciones diferentes del espacio  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_2$  (Dodelson, 2003; Liddle & Lyth, 2000; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008):

$$\left\langle \frac{\delta T(\hat{n}_1)}{T} \frac{\delta T(\hat{n}_2)}{T} \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) C_l, \quad (11)$$

en donde  $P_l$  denota los polinomios de Legendre. El espectro angular  $C_l$  a grandes escalas (pequeños multipolos) dependerá, por supuesto, de la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  a través de las ecuaciones (10) y (11).

Un escenario sencillo en el cual se puede calcular el espectro angular dado por la relación (11) es el escenario del curvatón (Enqvist & Sloth, 2002; Lyth & Wands, 2002; Moroi & Takahashi, 2001) en el cual se desprecia la perturbación intrínseca en la curvatura durante inflación ( $A = 0$ ). En este modelo se asume que  $\zeta$  es generada por las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar ligero débilmente acoplado  $\sigma$ , con potencial  $V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2$ , que no domina la densidad de energía del Universo durante inflación, y que por lo tanto no genera el período inflacionario. Al campo escalar  $\sigma$  se le denomina “curvatón” porque, a diferencia del inflatón (el campo escalar encargado de generar inflación), éste sí genera en este modelo la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$ .

Así,  $\zeta$  calculada para escalas de superhorizonte ( $k \ll aH$ ) será proporcional únicamente a la perturbación en el campo  $\sigma$ :

$$\zeta_{\vec{k}}(\vec{x}, \eta) \propto \left( \frac{\delta\sigma_{\vec{k}}}{\sigma_0} \right). \quad (12)$$

Las fluctuaciones del campo  $\sigma$  sobre la superficie de la última dispersión (SUD) se pueden calcular mediante la ecuación (8) en coordenadas esféricas para así obtener:

$$\zeta(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD}) \propto \sum_{l,m} \int \beta^2 d\beta \left[ \frac{\delta\sigma_\beta}{\sigma_0} \right]_{\eta=\eta_*} \Phi_\beta^l(x_{UD}) Y_{lm}(\hat{n}). \quad (13)$$

En la expresión previa se ha tenido en cuenta que, en el escenario del curvatón, la razón  $\frac{\delta\sigma_\beta}{\sigma_0}$  permanece constante después de la salida del horizonte durante inflación y hasta antes de que  $\sigma$  decaiga durante la etapa post-inflacionaria (Lyth, Ungarelli, & Wands, 2002). También se ha tenido en cuenta la contribución de todos los modos, siendo las funciones angulares  $Y_{lm}$  los armónicos esféricos, y las funciones radiales  $\Phi_\beta^l$  las funciones hipersféricas de Bessel (Abbott & Schaefer, 1986; Harrison, 1967) con  $l < \beta$ . Los números de onda canónicos se definen como  $\beta = \sqrt{k^2 + 1}$  para un universo cerrado, y  $\beta = \sqrt{k^2 - 1}$  para un universo abierto, y el tiempo conformal  $\eta_*$  denota el tiempo para el cual la escala cosmológica en consideración sale del horizonte. Para el caso de un universo plano las funciones propias  $\Phi_\beta^l(r)$  corresponden a las funciones esféricas de Bessel  $j_l(kr)$  (Abbott & Schaefer, 1986; Harrison, 1967).

Durante inflación, y antes de salir del horizonte, las fluctuaciones  $\delta\sigma$  pueden ser consideradas como operadores cuánticos. El operador de las fluctuaciones en el campo  $\delta\sigma$  durante inflación se puede expandir en armónicos esféricos

de la forma

$$\delta\sigma(\vec{x}, \eta) = \sum_{lm} \int \beta^2 d\beta \{ \hat{a}_{\beta lm} \Phi_\beta^l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \delta\sigma_\beta(\eta) + \hat{a}_{\beta lm}^\dagger \Phi_\beta^{*l}(r) Y_{lm}^*(\theta, \phi) \delta\sigma_\beta^*(\eta) \}, \quad (14)$$

usando como coeficientes los operadores creación y destrucción  $\hat{a}_{\beta lm}$  y  $\hat{a}_{\beta lm}^\dagger$  los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l' m'}^\dagger] &= \frac{1}{\beta^2} \delta(\beta - \beta') \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ [\hat{a}_{\beta lm}, \hat{a}_{\beta' l' m'}] &= 0, \\ [\hat{a}_{\beta lm}^\dagger, \hat{a}_{\beta' l' m'}^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

La escogencia más razonable para el estado cuántico del Universo durante inflación es el estado de vacío  $|0\rangle$ , ya que un número de ocupación promedio significativo generaría suficiente presión positiva para prevenir inflación (Liddle & Lyth, 2000).

Así, al calcular el promedio estadístico (11), se obtiene la siguiente expresión para el espectro angular  $C_l$ :

$$C_l = 4\pi^2 \int \frac{d\beta}{\beta} P_{\delta\sigma}(\beta) |\Phi_\beta^l(x_{UD})|^2, \quad (16)$$

para la cual se define el espectro escalar de potencias  $P_{\delta\sigma}$  mediante (Dodelson, 2003; Kolb & Turner, 1990; Liddle & Lyth, 2000; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008):

$$P_{\delta\sigma}(\beta) = \frac{\beta^2}{4\pi^2} |\delta\sigma_\beta(\eta)|_{\eta=\eta_*}^2. \quad (17)$$

Como se observa de la ecuación (5), las escalas cosmológicas relevantes presentarán una mayor desviación de la planitud<sup>4</sup>. Los modos asociados a las escalas cosmológicas relevantes vienen dados por  $\beta \lesssim a_0 H_0$ , los cuales son iguales a los modos  $\beta \lesssim a_* H_*$  cuando éstos salen del horizonte durante inflación. Así, y dado que  $l < \beta$ , cualquier indicio de curvatura espacial (si existiese) se observará analizando el espectro angular  $C_l$  para grandes escalas o momentos multipolares pequeños. Para este fin, se requiere el espectro escalar de potencias definido en la ecuación (17) (Mariño & Rodríguez, 2008):

$$P_{\delta\sigma}(\beta \lesssim a_0 H_0) \approx \left( \frac{H_\lambda}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{1 + \frac{K}{a_0^2 H_0^2}} \right); \quad K > 0, \quad (18)$$

<sup>4</sup>Obsérvese que  $[a(t)H(t)]^{-1}$  define la escala que cruza el horizonte en el tiempo cósmico  $t$ , i.e.  $\beta = aH$ . De esta manera, entre más grande sea la escala mayor será la contribución relativa  $\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$ .

$$P_{\delta\sigma}(\beta \lesssim a_0 H_0) \approx \left(\frac{H_\lambda}{2\pi}\right)^2; \quad K = 0, \quad (19)$$

$$P_{\delta\sigma}(\beta \lesssim a_0 H_0) \approx \left(\frac{H_\lambda}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{|K|}{a_0^2 H_0^2}}\right); \quad K < 0, \quad (20)$$

para universos cerrado, plano, y abierto respectivamente, en donde se ha definido  $H_\lambda \equiv \sqrt{\rho/3m_p^2}$  siendo  $\rho$  la densidad de energía del Universo durante inflación. Las expresiones (18) a (20) corrigen un error de cálculo en las expresiones análogas presentadas en la Ref. (Massó et. al., 2006).

Se observa a partir de las ecuaciones (18) y (19) que para el caso del universo cerrado,  $K > 0$ , el espectro de potencias se suprime ligeramente con respecto al espectro de potencias del universo plano,  $K = 0$ . Para el caso del universo abierto,  $K < 0$  (ecuación (20)), sucede lo contrario; el espectro de potencias se ve realzado ligeramente con respecto a aquél del universo plano. En el espectro angular  $C_l$  definido en la ecuación (16) el efecto de la supresión o realzamiento sólo es observable a grandes ángulos, correspondiente a multipolos bajos o  $l$  pequeño. Observacionalmente, como se deduce de la figura (1), se advierte una notable supresión para el cuadrupolo ( $l = 2$ ). Lo anterior sugiere, teniendo en cuenta que el valor medido para  $C_{l=2}$  está aún por fuera de la incertidumbre asociada a la varianza cósmica, que los tipos de curvatura característica de nuestro Universo más favorecidas por este último dato observacional son la plana ( $K = 0$ ) y especialmente la cerrada ( $K > 0$ ) (Efstathiou, 2003; Massó et. al., 2006).

### 3. Conclusiones

Aunque existen en la literatura numerosos modelos que permiten explicar las anomalías concernientes a los multipolos más bajos en el espectro angular  $C_l$  de las anisotropías en la temperatura de la RCF (véase por ejemplo Refs. (Abramo, Sodre Jr., & Wuensche, 2006; Jaffe et. al., 2005; Jaffe et. al., 2006; Kesden, Kamionkowski, & Cooray, 2003; Moroi & Takahashi, 2004; Piao, Tsujikawa, & Zhang, 2004; Yamazaki et. al., 2008)), la inclusión de la curvatura espacial del Universo para explicar la supresión de  $C_l$  en el cuadrupolo parece ser más natural, puesto que no es necesario incluir modificaciones a los modelos más simples de generación de estructuras. Además permite explicar por qué a grandes escalas existen mejores indicios de la curvatura, mientras que a escalas más pequeñas el Universo parece muy plano como lo sugieren las observaciones de  $C_l$ . Un análisis adicional que considera el efecto de la curvatura espacial sobre

la relación entre la dependencia del índice espectral en  $\zeta$  con respecto a la escala y el mismo índice espectral se encuentra en progreso (Mariño & Rodríguez, 2008). Los resultados preliminares de este análisis parecen de nuevo favorecer la suposición de un Universo cerrado o plano, descartando en gran medida al Universo abierto.

**Agradecimientos:** Este trabajo cuenta con el apoyo de COLCIENCIAS a través del proyecto de investigación No. 1102-333-18674 CT-174-2006, y de la DIF (UIS) a través del proyecto de investigación No. 5134. Y.R. agradece al programa de intercambio de investigadores ECOS-NORD, proyecto No. C06P02.

### Referencias

- Abbott L.F. & Schaefer R.K., 1986. A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave anisotropy, *Astrophys. J.* **308**, 546.
- Abramo L.R., Sodre Jr. L., & Wuensche C.A., 2006. Anomalies in the low CMB multipoles and extended foregrounds. *Phys. Rev. D* **74**, 083515.
- Bardeen J.M., 1980. Gauge invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D* **22**, 1882.
- Dodelson S., 2003. *Modern cosmology*. Academic Press, San Diego USA.
- Efstathiou G., 2003. Is the low CMB quadrupole a signature of spatial curvature?. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **343**, L95.
- Enqvist K. & Sloth M.S., 2002. Adiabatic CMB perturbations in pre big-bang string cosmology. *Nucl. Phys. B* **626**, 395.
- Harrison E. R., 1967. Normal modes of vibrations of the Universe. *Rev. Mod. Phys.* **39**, 862.
- Hinshaw G. et. al., 2008. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: data processing, sky maps, & basic results, arXiv:0803.0732 [astro-ph].
- Jaffe T.R. et. al., 2005. Evidence of vorticity and shear at large angular scales in the WMAP data: a violation of cosmological isotropy?. *Astrophys. J.* **629**, L1.
- Jaffe T.R. et. al., 2006. On the viability of Bianchi type VIII models with dark energy. *Astrophys. J.* **644**, 701.
- Kesden M.H., Kamionkowski M., & Cooray A., 2003. Can cosmic shear shed light on low cosmic microwave background multipoles?. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 221302.
- Kolb E.W. & Turner M.S., 1990. *The early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City USA.
- Komatsu E. et. al., 2008. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation, arXiv:0803.0547 [astro-ph].
- Liddle A.R. & Lyth D.H., 2000. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press, Cambridge UK.
- Lyth D.H., 1985. Large-scale energy density perturbations and inflation. *Phys. Rev. D* **31**, 1792.
- Lyth D.H. & Seery D., 2008. Classicality of the primordial perturbations. *Phys. Lett. B* **662**, 309.

- Lyth, D.H., Ungarelli C., & Wands D.**, 2002. The primordial density perturbation in the curvaton scenario. *Phys. Rev. D* **67**, 023503.
- Lyth D.H. & Wands D.**, 2002. Generating the curvature perturbation without an inflaton. *Phys. Lett. B* **524**, 5.
- Mariño G.A. & Rodríguez Y.**, 2008. In preparation.
- Massó E. et. al.**, 2006. Imprint of spatial curvature on inflation power spectrum. [arXiv:astro-ph/0609349v4](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609349v4).
- Moroi T. & Takahashi T.**, 2001. Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background. *Phys. Lett. B* **522**, 215; Erratum *ibid* 2002. B **539**, 303.
- Moroi T. & Takahashi T.**, 2004. Correlated isocurvature fluctuation in quintessence and suppressed CMB anisotropies at low multipoles. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 091301.
- Mukhanov V.F.**, 2005. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge UK.
- Mukhanov V.F., Feldman H.A., & Brandenberger R.H.**, 1992. *Theory of cosmological perturbations*. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys. Rep.* **215**, 203.
- Nolta M.R. et. al.**, 2008. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: angular power spectra, [arXiv:0803.0593 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0803.0593).
- Piao Y.-S., Tsujikawa S., & Zhang X.-M.**, 2004. Inflation in string inspired cosmology and suppression of CMB low multipoles. *Class. Quantum Grav.* **21**, 4455.
- Sachs R.K. & Wolfe A.M.**, 1967. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys. J.* **147**, 73.
- Weinberg S.**, 2008. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford UK.
- Yamazaki D.G. et. al.**, 2008. Effects of a primordial magnetic field on low and high multipoles of the CMB. *Phys. Rev. D* **77**, 043005.

Recibido: febrero 3 de 2008.

Aceptado para su publicación: septiembre 18 de 2008.