POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR. APLICACIONES EN ANÁLISIS NUMÉRICO Y TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

por

Francisco Marcellán[1]

Resumen

Marcellán, F.: Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en análisis numérico y teoría de la aproximación. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (117): 563-579, 2006. ISSN 0370-3908.

En esta contribución presentamos un sumario de recientes resultados sobre aplicaciones de la teoría de polinomios ortogonales no estándar (en particular, asociados a medidas soportadas en la circunferencia unidad y respecto a productos de Sobolev asociados a vectores de medidas soportados en la recta real). Consideramos transformaciones espectrales de medidas y su tratamiento desde el punto de vista de factorización de matrices. Finalmente, se abordan algunos problemas de teoría de aproximación en espacios de Sobolev.

Palabras clave: Polinomios ortogonales, generadores de espacios de estados, matrices de momentos, transformaciones espectrales.

Abstract

In this contribution we present a summary of recent results on applications of the theory of non standard orthogonal polynomials (in particular, associated with measures supported on the unit circle and with respect to Sobolev products associated with a vector of measures supported on the real line). We consider spectral transformations of measures and their analysis from the point of view of matrix factorization. Finally, we deal with some problems of approximation theory in Sobolev spaces.

Key words: Orthogonal polynomials, state-space generators, moment matrices, spectral transformations.

1 Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid. Avenida de la Universidad 30, 28911, Leganés, España. E-mail: pacomarc@ing.uc3m.es

AMS Classification 2000: 42C05, 15A23.

1. Introducción

Sea μ una medida de Borel positiva cuyo soporte es un subconjunto $\mathbb{I}$, no finito, de la recta real y tal que

$$\left|\int_{\mathbb{I}} x^n d\mu\right| < +\infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De manera unívoca queda definida una sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que

$$\int_{\mathbb{I}} x^k P_n(x) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ se denomina sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida μ.

Si $d_n = \int_{\mathbb{I}} (P_n(x))^2 d\mu$, entonces la sucesión $\left\{d_n^{-\frac{1}{2}} P_n\right\}_{n\geqslant 0}$ se denomina sucesión estándar de polinomios ortonormales respecto a la medida μ.

$\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \qquad (1.1)$$

donde $\beta_n \in \mathbb{R}$ y $\gamma_n \in \mathbb{R}_+$.

En términos matriciales, la anterior relación viene dada por

$$x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

donde M es una matriz tridiagonal

$$M = \begin{bmatrix} \beta_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \beta_1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Estos polinomios ortogonales aparecen en diversas áreas de las matemáticas como la teoría de aproximación, análisis numérico (fórmulas de cuadratura gaussiana, métodos espectrales para problemas de valores en la frontera), teoría de códigos, sistemas integrales, etc.

El interés de su estudio ha crecido en los últimos 20 años como consecuencia de sus aplicaciones que han enriquecido de manera notable la teoría clásica. A modo de ejemplo, en [24] se consideran transformaciones de Darboux discretas para familias de polinomios ortogonales que satisfacen (1.1), entendiendo dicha relación como una ecuación de Schrödinger discreta. De manera natural aparecen las denominadas transformaciones espectrales canónicas que corresponden a perturbaciones de la medida μ

(i) Christoffel

$$d\widetilde{\mu} = (x-a)d\mu, \quad a \notin \mathbb{I}.$$

(ii) Uvarov

$$d\widetilde{\mu} = d\mu + \mathrm{M}\delta_a,$$

con $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ y δ_a la función de Dirac en a.

(iii) Geronimus

$$d\widetilde{\mu} = \frac{1}{x-a} d\mu + \mathrm{M}\delta_a,$$

con $a \notin \mathbb{I}$.

La relación entre las matrices tridiagonales asociadas se establece a través de la factorización LU y UL de la matriz M correspondiente a la medida μ (véase [1]) mientras que a través de la factorización QR de M se puede abordar la iteración de la transformación $d\widetilde{\mu} = (x-a)^2 d\mu$ (véase [2]).

El objeto de este trabajo es presentar un análisis matricial de polinomios ortogonales no estándar, en particular, de dos situaciones ampliamente estudiadas en la literatura:

(i) El caso de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ como soporte de una medida μ que define un producto escalar

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z)\overline{q(z)} d\mu,$$

donde p, q son polinomios con coeficientes complejos (véase [23] así como [7] y [22] desde una perspectiva numérica).

(ii) El caso de ortogonalidad respecto a un vector de medidas a través de un producto de Sobolev

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(z)\overline{q^{(k)}(z)} d\mu_k,$$

donde $\mathbb{I}_k \subset \mathbb{R}$ denota el soporte de la medida μ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ (véase [16], [17], [18] y [19]).

El marco general se analiza en la sección 2 donde se establece una conexión natural entre productos escalares generales, matrices de momentos, matrices de Hessenberg y matrices de controlabilidad.

En la sección 3 se estudian transformaciones espectrales para medidas soportadas en la circunferencia unidad. En particular, analizamos los análogos de las de Christoffel, Uvarov y Geronimus estableciendo la conexión con las funciones de Carathéodory definidas por la sucesión de momentos.

En la sección 4 se consideran las nuevas matrices de Hessenberg asociadas a una transformación espectral lineal como es la de Christoffel así como dos ejemplos racionales no lineales.

Finalmente, en la sección 5 presentamos algunos resultados relativos a matrices de momentos para productos de Sobolev y sus implicaciones en el análisis de los coeficientes de Fourier correspondientes a los polinomios ortogonales asociados.

2. Polinomios ortogonales y sistemas lineales

En el espacio vectorial $\mathbb{P}$ de los polinomios en una variable con coeficientes complejos introducimos un producto escalar $\langle\,,\,\rangle$, i. e. una aplicación de $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ en $\mathbb{C}$ tal que

(*i*) $\langle \alpha p + \beta q, r\rangle = \alpha\langle p, r\rangle + \beta\langle q, r\rangle$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p, q, r \in \mathbb{P}$.
(*ii*) $\langle p, q\rangle = \overline{\langle q, p\rangle}$, $p, q \in \mathbb{P}$.
(*iii*) $\langle p, p\rangle \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{P}\setminus\{0\}$.

Si se considera la base canónica $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ del espacio $\mathbb{P}$, tenemos asociada la matriz infinita de Gram $R = \left(r_{k,j}\right)_{k,j=0}^{\infty}$, también denominada matriz de momentos, donde $r_{k,j} = \langle z^k, z^j\rangle$. R_n, $n = 0, 1, \ldots$, denotará la submatriz principal de orden $(n+1)\times(n+1)$ de la matriz R.

Por otra parte, aplicando a la base canónica el método de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos construir una única familia de polinomios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que

(*i*) $P_n(z) = \kappa_{n,n}z^n +$ términos de grado inferior, $\kappa_{n,n} > 0$.
(*ii*) $\langle P_n, P_k\rangle = \delta_{n,k}$, para $0 \leqslant k \leqslant n$, donde $\delta_{n,k}$ es la delta de Kronecker.

La familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ se denomina familia de polinomios ortonormales respecto al producto escalar $\langle\,,\,\rangle$. La familia $\left\{\kappa_{n,n}^{-1}P_n\right\}_{n\geqslant 0}$ se denomina familia de polinomios ortogonales mónicos asociada al anterior producto escalar.

Si mediante $w_{n+1} = [1, z, \ldots, z^n]^t$ y $v_{n+1} = [P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z)]^t$ denotamos los vectores polinómicos de orden $n+1$ correspondientes a las bases $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, entonces se deduce fácilmente

Proposición 2.1.

(*i*) $\langle w_{n+1}\, w_{n+1}^t\rangle = R_n$.
(*ii*) $\langle v_{n+1}\, v_{n+1}^t\rangle = I_{n+1}$.

Con la anterior notación queremos denotar que el producto escalar se aplica a cada una de las entradas de las matrices producto.

Por otra parte, $v_{n+1} = A_n w_{n+1}$ donde $A_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ es una matriz triangular inferior con elementos diagonales positivos. Más concretamente, los elementos diagonales son los coeficientes conductores $\kappa_{0,0}, \kappa_{1,1}, \ldots, \kappa_{n,n}$ de los polinomios ortonormales $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z)$.

Teniendo en cuenta que

$$zv_{n+1} = M_n v_{n+1} + [0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}P_{n+1}(z)]^t, \qquad (2.1)$$

donde $\alpha_{n+1} = \frac{\kappa_{n,n}}{\kappa_{n+1,n+1}}$ y M_n una matriz Hessenberg inferior, se tiene

$$zA_n w_{n+1} = M_n A_n w_{n+1} + [0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}P_{n+1}(z)]^t,$$

esto es

$$zw_{n+1} = A_n^{-1}M_n A_n w_{n+1} + \left[0, \ldots, 0, \frac{P_{n+1}(z)}{\kappa_{n+1,n+1}}\right]^t. \qquad (2.2)$$

Identificando las entradas en los dos miembros de la anterior igualdad, se tiene

$$A_n^{-1} M_n A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_{n+1,n+1} & -a_{n+1,n} & \cdots & & -a_{n+1,1} \end{bmatrix} = F_n^{(0)}, \tag{2.3}$$

donde $P_{n+1}(z) = \kappa_{n+1,n+1}\left(z^{n+1} + a_{n+1,1}z^n + \cdots + a_{n+1,n}z + a_{n+1,n+1}\right)$, $\left(F_n^{(0)}\right)^t = Z_n + u_n e_n^t$ como

$$u_n = \left(-a_{n+1,n+1}, -a_{n+1,n}, \ldots, -a_{n+1,1}\right)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}, \quad e_n = (0,0,\ldots,0,1)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$$

y Z_n es la matriz de orden $(n+1)\times(n+1)$ con 1 en la primera subdiagonal y las restantes entradas son nulas.

De (2.3) se sigue que el polinomio característico de M_n es precisamente el polinomio $\kappa_{n+1,n+1}^{-1} P_{n+1}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} R_n &= \langle w_{n+1} w_{n+1}^t \rangle = \langle A_n^{-1} v_{n+1} v_{n+1}^t A_n^{-t} \rangle \\ &= A_n^{-1} A_n^{-*} = L_n L_n^*. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Puesto que $L_n = A_n^{-1}$ es triangular inferior con elementos diagonales positivos, (2.4) es la factorización de Cholesky de la matriz R_n.

En la teoría de sistemas lineales [13] el par $\left(\left(F_n^{(0)}\right)^t, e_0\right)$, donde $e_0 = (1,0,\ldots,0)^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se denomina par canónico de controlabilidad de la matriz R_n. De hecho, para $k = 0,1,\ldots,n$

$$\begin{aligned} r_{k,j} &= e_k^t \left(A_n^{-1} A_n^{-*}\right) e_j \\ &= e_0^t \left(F_n^{(0)}\right)^k A_n^{-1} A_n^{-*} \left(F_n^{(0)*}\right)^j e_0 \\ &= e_0^t \left(A_n^{-1} M_n^k\right) \left(M_n^j\right)^* A_n^{-*} e_0 \\ &= \left(e_0^* A_n^{-1}\right) M_n^k \left(M_n^j\right)^* \left(e_0^* A_n^{-1}\right)^*. \end{aligned}$$

Si denotamos $g_n^* = e_0^* A_n^{-1}$, esto es $g_n = A_n^{-*} e_0 = L_n^* e_0$ y, por tanto

$$\begin{aligned} R_n &= \begin{bmatrix} g_n^* \\ g_n^* M_n \\ \vdots \\ g_n^* M_n^n \end{bmatrix} \left[g_n, M_n^* g_n, \ldots, (M_n^*)^n g_n\right] \\ &= C_n^* C_n, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $C_n = \left[g_n, M_n^* g_n, \ldots, (M_n^*)^n g_n\right]$ es la matriz de controlabilidad asociada al par (M_n^*, g_n).

Ahora bien, de (2.3) se sigue que

$$A_n^* (M_n^*)^k = \left(F_n^{(0)*}\right)^k A_n^*, \quad k \in \mathbb{N}$$

y, por tanto,

$$A_n^* C_n = I_{n+1}.$$

En conclusión, la matriz de controlabilidad $C_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ asociada al par (M_n^*, g_n) es la inversa de la matriz A_n^*.

En el caso del producto escalar estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la recta real, la matriz M_n es una matriz de Jacobi.

En el caso del producto escalar no estándar asociado a una medida positiva μ soportada en la circunferencia unidad, la matriz M_n es una matriz casi-unitaria (ver [15]).

Definición 2.2 ([13], [14]). *La sucesión (F_n, g_n) donde $F_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$, $g_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$ se denomina sucesión generadora de espacios de estado para la matriz de momentos R si, para cada n, la matriz de controlabilidad de R_n es $C_n = [g_n, F_n g_n, \ldots, F_n^n g_n]$.*

El par (M_n^*, g_n) es una sucesión generadora de espacios de estado asociada a la matriz de momentos R. Veamos como se puede construir por inducción dicha sucesión generadora de espacios de estado, esto es, presentaremos un método recursivo que permite deducir (M_{n+1}^*, g_{n+1}) a partir de (M_n^*, g_n).

Denotaremos $R_0 = [r_{0,0}]$,

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+2,n+2}$$

para $n \in \mathbb{N}$, con $a_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, y supongamos que hemos encontrado un generador de espacios de estado (F_n, g_n) para la matriz R_n. Queremos encontrar un generador de espacios de estado (F_{n+1}, g_{n+1}) para la matriz R_{n+1} de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & * \\ * & * \end{bmatrix}, \qquad g_{n+1} = \begin{bmatrix} g_n \\ * \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Si $R_n = L_n L_n^*$, con L_n triangular inferior y elementos diagonales positivos, denota la factorización de Cholesky de la matriz R_n, es fácil probar que

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n & 0 \\ a_n^* L_n^{-*} & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (2.7) \\ &= L_{n+1} L_{n+1}^*, \end{aligned}$$

donde $l_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ y $l_{n+1}^2 = r_{n+1,n+1} - a_n^* L_n^{-*} L_n^{-1} a_n$. Así pues, la matriz L_{n+1} es triangular inferior con elementos diagonales positivos y, por consiguiente, (2.7) es la factorización de Cholesky de R_{n+1}.

Por otra parte, $g_n = L_n^* e_0 = \left[r_{0,0}^{\frac{1}{2}}, 0, \ldots, 0 \right]^t$. Determinaremos, a continuación, F_{n+1}. Dado que, de acuerdo con (2.3), podemos asumir que

$$F_n = L_n^* \left(Z_n + \bar{u}_n e_n^t \right) L_n^{-*},$$

donde u_n es un vector a determinar en $\mathbb{C}^{n+1,1}$, y $e_n = [0, \ldots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{n+1,1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= L_{n+1}^* \left(Z_{n+1} + \bar{u}_{n+1} e_{n+1}^t \right) L_{n+1}^{-*} \\ &= L_{n+1}^* \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} L_{n+1}^{-*}, \end{aligned}$$

donde

$$\bar{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_n \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad v_n \in \mathbb{C}^{n+1,1}, \ \beta_n \in \mathbb{C}$$

y Z_n es la matriz de orden $(n+1) \times (n+1)$ que tiene 1 en la primera subdiagonal y las restantes entradas son nulas.

Utilizando (2.6)

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \begin{bmatrix} L_n^* & L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n & v_n \\ e_n^t & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^{-*} & -l_{n+1}^{-1} L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \\ 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_n^* \left(Z_n - L_n^{-*} L_n^{-1} a_n e_n^t \right) L_n^{-*} & s_n \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$s_n = l_{n+1}^{-1} \left(L_n^* v_n + \beta_n L_n^{-*} a_n - L_n^* F_n L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \right).$$

Sin más que escoger

$$\bar{u}_n = L_n^{-*} L_n^{-1} a_n = R_n^{-1} a_n \qquad (2.8)$$

de manera que

$$F_{n+1} = \begin{bmatrix} F_n & s_n \\ l_{n+1} e_n^t L_n^{-*} & \beta_n - e_n^t L_n^{-*} L_n^{-1} a_n \end{bmatrix}.$$

Así pues, hemos obtenido explícitamente F_{n+1} y g_{n+1} satisfaciendo las condiciones de anidamiento (2.6).

Es importante reseñar que las matrices F_n son Hessenberg superiores, esto es, las entradas por debajo de la primera subdiagonal son nulas. Además, la elección de u_n en (2.8) tiene una importancia especial. De hecho

$$\begin{aligned} [-u_n^t,\ 1] R_{n+1} &= [-u_n^t,\ 1] \begin{bmatrix} R_n & a_n \\ a_n^* & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \\ &= \left[0, \ldots, 0, l_{n+1}^2 \right]. \end{aligned}$$

Esto significa que el vector fila $[-u_n^t,\ 1] \in \mathbb{C}^{1,n+2}$ define un polinomio mónico de grado $n+1$ que es ortogonal a $\mathbb{P}_n$ respecto al producto escalar asociado a la matriz de Gram R.

Obsérvese que $F_n = M_n^*$, de acuerdo con la notación (2.5).

3. Polinomios ortogonales en el círculo unidad y transformaciones espectrales

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función compleja que es analítica en un entorno de $z = 0$, i. e.

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \qquad (3.1)$$

donde $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$ y $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$. A dicha función le podemos asociar un funcional lineal $\mathcal{L}_F$ definido en el espacio de los polinomios de Laurent

$\Lambda = span\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ de manera que

$$\mathcal{L}_F(z^k) = c_{-k}, \ k \in \mathbb{Z},$$

donde asumimos que $c_{-k} = \bar{c}_k, \ k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{L}_F$ define una aplicación bilineal $\langle , \rangle$ en el espacio $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos de la siguiente forma

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}_F\left(p(z)q(z^{-1})\right).$$

La aplicación bilineal $\langle , \rangle$ satisface las propiedades (i) y (ii) de los productos escalares introducidos en la sección precedente. Si, además, se satisface (iii) diremos que $\mathcal{L}_F$ es un funcional definido positivo. En este caso, existe una medida positiva no trivial μ soportada en la circunferencia unidad de manera que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu. \qquad (3.2)$$

Definición 3.1 ([4], [21]). *Una función compleja F que admite una representación de la forma (3.2) donde μ es una medida positiva se denomina función de Carathéodory (C-función).*

Es inmediato probar que F es C-función si y sólo si F es analítica en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\Re e(F(z)) > 0$ para $|z| < 1$.

De acuerdo con este resultado, F es una C-función si y sólo si $\dfrac{1}{F}$ es una C-función.

La matriz de momentos R asociada a la forma bilineal $\langle , \rangle$ determinada por un funcional lineal satisface la propiedad

$$r_{k,j} = \langle z^k, z^j \rangle = \langle z^{k-j}, 1 \rangle = c_{j-k},$$

esto es, las entradas de cada subdiagonal son invariantes. La matriz R se denomina matriz de Toeplitz (ver [8]).

Si asumimos que las submatrices principales R_n de R son no singulares para todo $n \in \mathbb{N}$, el funcional $\mathcal{L}_F$ se denomina cuasi-definido. En este caso, existe una única sucesión de polinomios mónicos $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$, con $\deg \Phi_n = n$, de manera que

$$\langle \Phi_n, z^k \rangle = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad \text{y}$$
$$\langle \Phi_n, z^n \rangle = d_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La familia $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al funcional $\mathcal{L}_F$ (ver [4], [12]).

Proposición 3.2 ([4], [23], [25]). *La sucesión $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface dos tipos de relaciones de recurrencia*

(i) *Recurrencia ascendente:*

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z). \qquad (3.3)$$

(ii) *Recurrencia descendente*

$$\Phi_{n+1}(z) = (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)\, z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \quad (3.4)$$

donde $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi_n(\bar{z}^{-1})}$

Las evaluaciones $\Phi_{n+1}(0)$ de los polinomios ortogonales en $z = 0$ se denominan *coeficientes de reflexión.*

Una demostración de este resultado utilizando los generadores de espacios de estado de la matriz de Toeplitz R aparece en [14]. Sin embargo, utilizando el hecho de que el operador de multiplicación por z es unitario respecto a la forma bilineal $\langle , \rangle$ se puede dar una demostración alternativa.

Lema 3.3. *Si $J_n \in \mathbb{C}^{n+1,n+1}$ es una matriz con 1 en la anti-diagonal principal y las restantes entradas son nulas, entonces*

$$J_n \bar{R}_n J_n = R_n$$

Demostración. Es inmediata teniendo en cuenta que R_n es una matriz Toeplitz y hermitiana. □

Lema 3.4.

$$\langle \Phi_n^*, z^k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$
$$\langle \Phi_n^*, 1 \rangle = d_n.$$

Demostración. Si $\Phi_n(z) = z^n + a_{n,1}z^{n-1} + \cdots + a_{n,n}$ entonces tenemos

$$[a_{n,n}, \ldots, a_{n,1}, 1]R_n = [0, 0, \ldots, 0, d_n].$$

Considerando conjugados

$$[\bar{a}_{n,n}, \ldots, \bar{a}_{n,1}, 1]\overline{R_n} = [0, 0, \ldots, 0, d_n]$$

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \ldots, \bar{a}_{n,n}]\, J_n\overline{R_n} = [0, 0, \ldots, 0, d_n].$$

Multiplicando a la derecha por J_n

$$[1, \bar{a}_{n,1}, \ldots, \bar{a}_{n,n}]R_n = [d_n, 0, \ldots, 0].$$

De aquí se sigue el enunciado. □

Demostración de la proposición 3.2.

(i) $\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z) \in \mathbb{P}_n$ y, además,

$$\langle \Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z), z^k \rangle = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, $\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z) = \lambda_n\Phi_n^*(z)$. Evaluando esta igualdad en $z = 0$ se tiene $\lambda_n = \Phi_{n+1}(0)$, de donde se sigue el enunciado.

(*ii*) $\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi^*_{n+1}(z) \in z\mathbb{P}_n$ y, además,

$$\langle \Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi^*_{n+1}(z), z^k\rangle = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto,

$$\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(z)\Phi^*_{n+1}(z) = \xi_n z\Phi_n(z). \tag{3.5}$$

Identificando los coeficientes de z^{n+1} en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene $\xi_n = 1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2$, de donde se sigue el enunciado. □

Corolario 3.5.

$$\frac{d_{n-1}}{d_n} = 1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de multiplicar los dos miembros de la igualdad (3.5) por $z\Phi_n(z)$ y aplicar el producto escalar. □

De aquí se sigue que $|\Phi_{n-1}(0)| \neq 1$. Recíprocamente, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ de números complejos tales que $|a_n| \neq 1$ existe un único funcional lineal $\mathcal{L}_F$ tal que la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ satisface $\Phi_{n+1}(0) = a_n$. Para ello, basta utilizar la recurrencia ascendente y construir la familia de polinomios mónicos $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ de manera que los momentos se determinan de forma recurrente a partir de

$$\langle z\Phi_n(z), 1\rangle = -\Phi_{n+1}(0)d_n,$$

esto es,

$$c_{-n-1} - a_{n,1}c_{-n} + \cdots + a_{n,n}c_{-1} = -\Phi_{n+1}(0)d_n,$$

para $n \in \mathbb{N}$ con $d_0 = c_0$.

Definición 3.6 ([4], [23]). *Los polinomios mónicos Ω_n de grado n definidos mediante*

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0}\mathcal{L}_F\left(\tfrac{y+z}{y-z}\left(\Phi_n(y) - \Phi_n(z)\right)\right) \tag{3.6}$$

se denominan polinomios de segunda especie asociados al funcional $\mathcal{L}_F$.

Es un sencillo ejercicio comprobar que

$$\Omega_{n+1}(z) - z\Omega_n(z) - \Phi_{n+1}(0)\Omega^*_n(z)$$

y, por tanto, $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}$.

Proposición 3.7 ([21]).

$$(i) \begin{cases} F(z)\Phi_n(z) - \Omega_n(z) &= O\left(z^n\right), \\ F(z)\Phi^*_n(z) - \Omega^*_n(z) &= O\left(z^{n+1}\right). \end{cases}$$

$$(ii)\ \widetilde{F}(z) = \frac{1}{F(z)}.$$

De esta forma, aparece un primer ejemplo de lo que denominaremos transformación espectral de funcionales lineales $\mathcal{L}_F$.

Definición 3.8. *Dada una función F analítica en un entorno de $z = 0$ diremos que $\widetilde{F}$, función analítica en un entorno de $z = 0$, es una transformación racional de F si existen polinomios A, B, C, D tales que*

$$\widetilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \tag{3.7}$$

con $A(z)D(z) - B(z)C(z) \neq 0$.

Si $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{L}_F$, parece natural analizar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\mathcal{L}_{\widetilde{F}}$. Este es un problema abierto.

Mostraremos a continuación algunos ejemplos de transformaciones racionales.

3.1. Transformación de Christoffel.

Considérese un funcional lineal v tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle p, q\rangle_v = \langle (z-a)p, (z-a)q\rangle_{\mathcal{L}_F}, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

$v = C_a(\mathcal{L}_F)$ se denomina transformación canónica de Christoffel de $\mathcal{L}_F$.

En [3] y [15] se han presentado condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto a v. De hecho

Proposición 3.9 ([3], [15]). *v es cuasi-definido si y sólo si $K_n(a,a) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, donde*

$$K_n(z,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(y)}}{d_j}.$$

Veamos que $\widetilde{F}(z) = v_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$, donde $v_{-k} = v\left(z^k\right)$ es una transformación racional de F.

$$\begin{aligned} v_{-k} &= v\left(z^k\right) = \langle z^k, 1\rangle_v \\ &= \langle (z-a)z^k, z-a\rangle_{\mathcal{L}_F} = \langle z^{k+1} - az^k, z-a\rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)} + |a|^2 c_{-k} \\ &= \left(1+|a|^2\right)c_{-k} - ac_{-(k-1)} - \bar{a}c_{-(k+1)}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}(z) &= v_0 - 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k \\
&= \left(1+|a|^2\right) c_0 - a c_1 - \bar{a} c_{-1} - 2\bar{a}\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^k \\
&\qquad - 2a\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} z^k + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+|a|^2\right) c_k z^k \\
&= \left(1+|a|^2\right) F(z) - \bar{a}\Big(c_{-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1}\Big) \\
&\qquad - a\Big(c_1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{k-1}\Big) \\
&= \left(1+|a|^2\right) F(z) - \bar{a}\Big(c_{-1} + z\left(F(z)+c_0\right)\Big) \\
&\qquad - a\Big(c_1 + \frac{1}{z}\left(F(z) - c_0 - 2c_1 z\right)\Big) \\
&= \Big(1+|a|^2 - \bar{a}z - \frac{a}{z}\Big) F(z) + a\Big(c_1 + \frac{c_0}{z}\Big) \\
&\qquad - a\left(c_{-1} + c_0 z\right).
\end{aligned}
$$

Proposición 3.10.

$$
\widetilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A(z) &= -az^2 + \left(1+|a|^2\right) z - a, \\
B(z) &= -\bar{a}c_0 z^2 + \left(ac_1 - \bar{a}c_{-1}\right) z + ac_0, \\
D(z) &= z.
\end{aligned}
$$

En el caso definido positivo, iteraciones de estas transformaciones de Christoffel han sido estudiadas en [5] y [11].

3.2. Transformación de Uvarov.

Considérese un funcional lineal v tal que la forma bilineal asociada satisface

$$
\langle p, q\rangle_v = \langle p, q\rangle_{\mathcal{L}_F} + \mathrm{M}p(a)\overline{q}(a^{-1}) + \overline{\mathrm{M}}p(\bar{a}^{-1})\overline{q(a)}, \quad (3.9)
$$

con $|a| \neq 1$ y $\mathrm{M} \in \mathbb{C}$. $v = U_{a,\mathrm{M}}(\mathcal{L}_F)$ se denomina transformación canónica de Uvarov de $\mathcal{L}_F$.

Proposición 3.11. *v es cuasi-definido si y solo si*

$$
\det \Lambda_n = \begin{vmatrix} K_{n-1}(a,a) & \frac{1}{\mathrm{M}} + K_{n-1}(a,\bar{a}^{-1}) \\ \frac{1}{\overline{\mathrm{M}}} + K_{n-1}(\bar{a}^{-1},a) & K_{n-1}(\bar{a}^{-1},\bar{a}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.10)
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que v es cuasi-definido y sea $\{V_n\}_{n\geqslant 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada. Entonces

$$
V_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j}\Phi_j(z),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n,j} &= \frac{\langle V_n, \Phi_j\rangle_{\mathcal{L}_F}}{d_j} \\
&= -\frac{\mathrm{M}V_n(a)\overline{\Phi}_j(a^{-1}) + \overline{\mathrm{M}}V_n(\bar{a}^{-1})\overline{\Phi_j(a)}}{d_j}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
V_n(z) = \Phi_n(z) &- \mathrm{M}V_n(a)K_{n-1}(z,\bar{a}^{-1}) \\
&- \overline{\mathrm{M}}V_n(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(z,a). \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

Evaluando la anterior igualdad en $z = a$ y $z = \bar{a}^{-1}$, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
&V_n(a)\left(1 + \mathrm{M}K_{n-1}(a,\bar{a}^{-1})\right) + \\
&\qquad \overline{\mathrm{M}}V_n(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(a,a) \\
&\qquad = \Phi_n(a)\mathrm{M}V_n(a)K_{n-1}(\bar{a}^{-1},\bar{a}^{-1}) + \\
&\qquad\qquad V_n(\bar{a}^{-1})\left(1 + \overline{\mathrm{M}}K_{n-1}(\bar{a}^{-1},a)\right) \\
&\qquad\qquad = \Phi_n(\bar{a}^{-1}),
\end{aligned}
$$

de manera que

$$
\begin{aligned}
V_n(z) &= \Phi_n(z) - \left[\overline{\mathrm{M}}K_{n-1}(z,a),\ \mathrm{M}K_{n-1}(z,\bar{a}^{-1})\right]\begin{bmatrix} V_n(\bar{a}^{-1}) \\ V_n(a)\end{bmatrix} \\
&= \Phi_n(z) - \left[K_{n-1}(z,a),\ K_{n-1}(z,\bar{a}^{-1})\right]\Lambda_n^{-1}\begin{bmatrix}\Phi_n(a) \\ \Phi_n(\bar{a}^{-1})\end{bmatrix} \quad (3.12)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\Lambda_n = \begin{bmatrix} K_{n-1}(a,a) & \frac{1}{\mathrm{M}} + K_{n-1}(a,\bar{a}^{-1}) \\ \frac{1}{\overline{\mathrm{M}}} + K_{n-1}(\bar{a}^{-1},a) & K_{n-1}(\bar{a}^{-1},\bar{a}^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.13)
$$

es una matriz no singular dado que $\langle V_n, V_n\rangle_v = \dfrac{\det \Lambda_n}{\det \Lambda_{n-1}} d_n \neq 0$. El recíproco es inmediato sin más que probar que el polinomio mónico V_n dado por (3.12) verifica

$$
\begin{aligned}
\langle V_n(z), z^k\rangle_v &= 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\
\langle V_n(z), z^n\rangle_v &\neq 0. \quad \square
\end{aligned}
$$

Veamos que $\widetilde{F}(z) = v_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$, donde $v_{-k} = v\left(z^k\right)$ es una transformación racional de F.

$$
v_{-k} = \langle z^k, 1\rangle_v = \langle z^k, 1\rangle_{\mathcal{L}_F} + \mathrm{M}a^k + \overline{\mathrm{M}}\bar{a}^{-k}.
$$

Así pues

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(z) &= c_0 + \mathrm{M} + \overline{\mathrm{M}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k + \overline{\mathrm{M}}\bar{a}^k + \mathrm{M}a^{-k}\right) z^k \\ &= F(z) + \overline{\mathrm{M}}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k z^k\right) + \mathrm{M}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k\right) \\ &= F(z) + \overline{\mathrm{M}}\frac{1+\bar{a}z}{1-az} - \mathrm{M}\frac{a+z}{a-z} \\ &= F(z) + \\ &\frac{a\left(\mathrm{M}+\overline{\mathrm{M}}\right) + \left(1-|a|^2\right)\left(\mathrm{M}-\overline{\mathrm{M}}\right)z - \bar{a}\left(\mathrm{M}+\overline{\mathrm{M}}\right)z^2}{(z-a)(\bar{a}z-1)}.\end{aligned}$$

Proposición 3.12.

$$\widetilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) - B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned}A(z) &= D(z) = (z-a)(\bar{a}z-1), \\ B(z) &= \left(a - \bar{a}z^2\right)\left(\mathrm{M}+\overline{\mathrm{M}}\right) + \left(1-|a|^2\right)\left(\mathrm{M}-\overline{\mathrm{M}}\right) z.\end{aligned}$$

3.3. Transformación de Geronimus.

Considérese un funcional lineal v tal que la forma bilineal asociada satisface

$$\langle (z-a)p, (z-a)q\rangle_v = \langle p, q\rangle_{\mathcal{L}_F}, \quad a \neq 0. \qquad (3.14)$$

$v = G_a\left(\mathcal{L}_F\right)$ se denomina transformada canónica de Geronimus de $\mathcal{L}_F$. Entonces

$$\begin{aligned}c_k &= \langle 1, z^k\rangle_{\mathcal{L}_F} = \langle z-a, z^k(z-a)\rangle_v \\ &= v_k\left(1+|a|^2\right) - av_{k+1} - \bar{a}v_{k-1}, \quad k \geqslant 0.\end{aligned} \qquad (3.15)$$

Haciendo $s_k = \dfrac{c_k}{\bar{a}^k}$, $t_k = \dfrac{v_k}{\bar{a}^k}$, la anterior expresión resulta ser

$$s_k = \left(1+|a|^2\right)t_k - |a|^2 t_{k+1} - t_{k-1}, \quad k \geqslant 0,$$

de modo que

$$s_k = t_k - t_{k-1} - |a|^2\left(t_{k+1} - t_k\right), \quad k \geqslant 0.$$

Si hacemos $q_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geqslant 0$,

$$s_k = q_k - |a|^2 q_{k+1}, \quad k \geqslant 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}q_k &= \frac{q_0 - s_0 - |a|^2 s_1 - \cdots - |a|^{2k-2}s_{k-1}}{|a|^{2k}} \\ &= \frac{q_0 - c_0 - ac_1 - \cdots - a^{k-1}c_{k-1}}{|a|^{2k}}, \quad k \geqslant 1,\end{aligned} \qquad (3.16)$$

así como

$$\begin{aligned}q_0 &= t_0 - t_{-1} = v_0 - \bar{a}\bar{v}_1 \\ q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|a|^2} = t_1 - t_0 = \frac{v_1}{\bar{a}} - v_0.\end{aligned}$$

q_0 aparece como un parámetro libre. De esta forma

$$\begin{aligned}v_0 - av_1 &= \bar{q}_0 \\ v_0 - \frac{v_{-1}}{\bar{a}} &= \frac{c_0 - q_0}{|a|^2}\end{aligned} \qquad (3.17)$$

y, por tanto,

$$\left(1-|a|^2\right)v_0 = 2\Re e\left(q_0\right) - c_0,$$

esto es, $v_0 \in \mathbb{R}$. Si asumimos $|a| \neq 1$, v_0 queda unívocamente determinado y de (3.17) deducimos v_1. Reiterando (3.16) se sigue que

$$\frac{v_k}{\bar{a}^k} = v_0 - \sum_{j=1}^{k} q_j, \quad k \geqslant 2.$$

Por tanto, disponemos de un grado de libertad que es la elección de q_0. Por otra parte, multiplicando en (3.15) por z^k, $k \geqslant 1$, se tiene

$$\begin{aligned}F(z) &= v_0\left(1+|a|^2\right) - av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 + \\ &2\left(1+|a|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k - 2a\sum_{k=1}^{\infty} v_{k+1}z^k - 2\bar{a}\sum_{k=1}^{\infty} v_{k-1}z^k \\ &- \left(1+|a|^2\right)\widetilde{F}(z) - a\left(v_1 + \frac{2}{z}\sum_{k=2}^{\infty} v_k z^k\right) \\ &- \bar{a}\left(\bar{v}_1 + 2z\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k\right) \\ &= \left(1+|a|^2\right)\widetilde{F}(z) - a\left(v_1 + \frac{1}{z}\left(\widetilde{F}(z) - v_0 - 2v_1 z\right)\right) \\ &- \bar{a}\left(\bar{v}_1 + z\left(v_0 + \widetilde{F}(z)\right)\right) \\ &= \left(1+|a|^2\right)\widetilde{F}(z) + a\left(v_1 + \frac{v_0}{z}\right) - \frac{a}{z}\widetilde{F}(z) \\ &- \bar{a}\left(\bar{v}_1 + v_0 z\right) - \bar{a}z\widetilde{F}(z) \\ &= \left(1+|a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z\right)\widetilde{F}(z) + av_1 - \bar{a}\bar{v}_1 \\ &+ v_0\left(\frac{a}{z} - \bar{a}z\right) \\ &= \left(1+|a|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z\right)\widetilde{F}(z) + v_0 - \bar{q}_0 - \bar{v}_0 + \\ &q_0 + v_0\left(\frac{a}{z} - \bar{a}z\right).\end{aligned} \qquad (3.18)$$

Por tanto,

Proposición 3.13.

$$\widetilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z, \\ B(z) &= \bar{a}v_0 z^2 - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\, z - a v_0, \\ D(z) &= -\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{B(z)}{D(z)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \frac{\bar{a}v_0 z^2 - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\, z - a v_0}{-\bar{a}z^2 + \left(1 - |a|^2\right) z - a} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) \\ &\quad + \frac{\frac{\bar{a}z^2 - a}{1 - |a|^2}\left(2\mathfrak{Re}\,(q_0) - c_0\right) - 2i\mathfrak{Im}\,(q_0)\, z}{-\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) \\ &\quad + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(q_0 + \bar{q}_0 - c_0\right) - \left(1 - |a|^2\right)\left(q_0 - \bar{q}_0\right) z}{\left(1 - |a|^2\right)\left(-\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a\right)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) \\ &\quad + \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1 - |a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right) z}{-\bar{a}z^2 + \left(1 + |a|^2\right) z - a} \end{aligned}$$

con $l_0 = \dfrac{\bar{q}_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$. En conclusión

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) \\ &\quad - \frac{\left(\bar{a}z^2 - a\right)\left(l_0 + \bar{l}_0\right) + \left(1 - |a|^2\right)\left(l_0 - \bar{l}_0\right) z}{\left(1 - \bar{a}z\right)\left(a - z\right)} \\ &= \frac{A(z)}{D(z)}F(z) + \mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z}, \end{aligned}$$

donde $\mathrm{M} = \bar{l}_0 = \dfrac{q_0 - \frac{c_0}{2}}{1 - |a|^2}$. En el caso definido positivo, un ejemplo de transformación de Geronimus con $\mathrm{M} = 0$ ha sido analizado en [6].

Proposición 3.14.

(i) $G_a \circ C_a\left(\mathcal{L}_F\right) = U_{a,\tilde{\mathrm{M}}}\left(\mathcal{L}_F\right)$.

(ii) $C_a \circ G_a\left(\mathcal{L}_F\right) = \mathcal{L}_F$.

Demostración.

(i) Sea G la función analítica asociada al funcional $C_a\left(\mathcal{L}_F\right)$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 3.10

$$G(z) = \frac{A(z)}{z}F(z) - \left(\bar{a}c_0 z - \left(a c_1 - \bar{a}\bar{c}_1\right) - a c_0 \frac{1}{z}\right)$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z - 1)(z - a)$. Si H es la función analítica asociada al funcional $G_a \circ C_a\left(\mathcal{L}_F\right)$ de acuerdo con la Proposición 3.13,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z}{A(z)}G(z) + \mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \\ &= F(z) + \frac{\bar{a}c_0 z^2 - \left(a c_1 - \bar{a}\bar{c}_1\right) z - a c_0}{\left(\bar{a}z - 1\right)\left(z - a\right)} \\ &\quad + \mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \\ &= F(z) + \tilde{\mathrm{M}}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\tilde{\mathrm{M}}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\mathrm{M}} = \mathrm{M} - \frac{1}{2}\left(c_0 + \frac{a c_1 - \bar{a}\bar{c}_1}{1 - |a|^2}\right).$$

(ii) Sea $\tilde{F}$ la función analítica asociada al funcional $v = G_a\left(\mathcal{L}_F\right)$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 3.13

$$\tilde{F}(z) = \frac{z}{A(z)}F(z) + \mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z},$$

donde $A(z) = -(\bar{a}z - 1)(z - a)$.

Si K es la función analítica asociada al funcional $C_a \circ G_a\left(\mathcal{L}_F\right)$ de acuerdo con la Proposición 3.10 se tiene

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{A(z)}{z}\tilde{F}(z) - \left(\bar{a}v_0 z + \left(a v_1 - \bar{a}\bar{v}_1\right) - \frac{a v_0}{z}\right) \\ &= F(z) + \frac{A(z)}{z}\left(\mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z}\right) \\ &\quad - \frac{A(z)}{z}\left(\mathrm{M}\frac{a + z}{a - z} + \overline{\mathrm{M}}\frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z}\right) \\ &= F(z). \end{aligned}$$

Las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus se denominan transformaciones espectrales lineales canónicas. En un caso definido positivo, corresponden a transformaciones de las medidas dadas por

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu} &= \left|e^{i\theta} - a\right|^2 d\mu, \\ d\tilde{\mu} &= d\mu + \mathrm{M}\delta_a + \overline{\mathrm{M}}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \\ d\tilde{\mu} &= \frac{d\mu}{\left|e^{i\theta} - a\right|^2} + \mathrm{M}\delta_a + \overline{\mathrm{M}}\delta_{\bar{a}^{-1}}, \quad |a| \neq 1, \end{aligned}$$

respectivamente.

Ejemplos de transformaciones espectrales racionales propias aparecen en la literatura cuando se perturban los parámetros de reflexión.

Definición 3.15. *Sea $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional cuasi-definido $\mathcal{L}_F$. Denominaremos polinomios asociados de $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ y orden N, $\left\{\Phi_n^{(N)}\right\}_{n\geqslant 0}$, a los generados por la recurrencia*

$$\Phi_{n+1}^{(N)}(z) = z\Phi_n^{(N)}(z) + \Phi_{n+N+1}(0)\left(\Phi_n^{(N)}\right)^*(z). \quad (3.19)$$

Si $\mathcal{L}_{F^{(N)}}$ es el correspondiente funcional de ortogonalidad y $F^{(N)}$ denota la función analítica asociada, se tiene

Proposición 3.16 ([21]).

$$F^{(N)}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= \Phi_N(z) + \Phi_N^*(z),\\
B(z) &= \Omega_N(z) - \Omega_N^*(z),\\
C(z) &= \Phi_N(z) - \Phi_N^*(z),\\
D(z) &= \Omega_N(z) + \Omega_N^*(z).
\end{aligned}$$

Si consideramos un desplazamiento en los parámetros de reflexión en sentido inverso, se tiene el siguiente resultado

Proposición 3.17 ([21]). *Sean $b_1, b_2, \ldots, b_N$ números complejos con $|b_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Si mediante $\left\{\widetilde{\Phi}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ denotamos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos generados por los parámetros de reflexión $\{b_k\}_{k=1}^N \bigcup \{\Phi_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$, entonces*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= \widetilde{\Omega}_N(z) - \widetilde{\Omega}_N^*(z),\\
B(z) &= \widetilde{\Omega}_N^*(z) - \widetilde{\Omega}_N(z),\\
C(z) &= \widetilde{\Phi}_N(z) - \widetilde{\Phi}_N^*(z),\\
D(z) &= \widetilde{\Phi}_N^*(z) - \widetilde{\Phi}_N(z).
\end{aligned}$$

Finalmente, si se considera la sucesión de parámetros de reflexión $\{\lambda\Phi_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ donde $|\lambda| = 1$ y, si mediante $\left\{\widetilde{\Phi}_n(\cdot,\lambda)\right\}_{n\geqslant 0}$ denotamos la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos, se tiene

Proposición 3.18 ([23]).

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 + \lambda,\\
B(z) &= 1 - \lambda,\\
C(z) &= 1 - \lambda,\\
D(z) &= 1 + \lambda.
\end{aligned}$$

Esta transformación espectral racional se denomina transformación de Aleksandrov.

4. Polinomios ortogonales en el círculo unidad y factorización de matrices Hessenberg

A continuación, estudiaremos la expresión explícita de la matriz de Hessenberg inferior M introducida en (2.1), que representa la matriz del operador de multiplicación por z respecto a la base de polinomios ortonormales asociados a un funcional definido positivo $\mathcal{L}_F$.

Teniendo en cuenta que $\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle = d_n > 0$, denotemos mediante $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ la correspondiente familia de polinomios ortonormales, esto es, $\varphi_n(z) = d_n^{-\frac{1}{2}}\Phi_n(z)$.

De (3.4) se sigue que

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \left(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2\right)\Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)}\Phi_{n+1}(z),$$

esto es, de acuerdo con el corolario 3.5

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \frac{d_{n+1}}{d_n}\Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)}\Phi_{n+1}(z).$$

Por tanto

$$\frac{\Phi_{n+1}^*(z)}{d_{n+1}} = \frac{\Phi_n^*(z)}{d_n} + \frac{\overline{\Phi_{n+1}(0)}}{d_{n+1}}\Phi_{n+1}(z).$$

De aquí deducimos

$$\frac{\Phi_n^*(z)}{d_n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{\Phi_k(0)}\Phi_k(z)}{d_k}.$$

Sustituyendo en (3.3)

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z)$$

y utilizando polinomios ortonormales, la anterior expresión se convierte en

$$z\varphi_n(z) = \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(0)d_n^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{\Phi_k(0)}\varphi_k(z)}{d_k^{\frac{1}{2}}}.$$

Así pues, hemos probado

Proposición 4.1 ([15]). *Si* $\mathbf{v}(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$ *y* $z\mathbf{v}(z) = M\mathbf{v}(z)$, *entonces las entradas de la matriz* M *vienen dadas por*

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\left(\dfrac{d_k}{d_j}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_{k+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, & si \quad 0 \leqslant j \leqslant k, \\ \left(\dfrac{d_{k+1}}{d_k}\right)^{\frac{1}{2}}, & si \quad j = k+1, \\ 0, & si \quad j > k+1, \end{cases}$$

$k, j = 0, 1, 2, \ldots$ *Además,*

$$MM^* = I,$$
$$M^*M = I - \alpha\mathbf{v}(0)\left[\mathbf{v}(0)\right]^*,$$

donde $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(0)|^2}$.

Así pues, M^* es inversa a la derecha de M, mientras que $M^*M - I$ es una matriz de rango 1, a lo más.

Es bien conocido [23] que $\alpha = 0$ si y solo si $\log \mu' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$. En este caso, M es unitaria. Por otra parte, si consideramos la submatriz principal M_n de orden $(n+1) \times (n+1)$ se tiene

Corolario 4.2. *Si* $\mathbf{v}_n(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1, \ldots \varphi_n(z)]^t$, *entonces las entradas de la matriz* M_n *vienen dadas por*

$$m_{k,j} = \begin{cases} -\left(\dfrac{d_k}{d_j}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_{k+1}(0)\overline{\Phi_j(0)}, \; si\; 0 \leqslant j \leqslant k, \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n, \\ \left(\dfrac{d_{k+1}}{d_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \; si\; j = k+1, \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 0, \; si\; j > k+1. \end{cases}$$

con $k, j = 0, 1, 2, \ldots, n$. *Además,*

$$M_n M_n^* = I_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{d_n} e_n e_n^t,$$
$$M_n^* M_n = I_{n+1} - d_{n+1}\mathbf{v}_n(0)\mathbf{v}_n(0)^*.$$

Demostración. Basta efectuar los correspondientes productos escalares y observar que los vectores fila son ortonormales salvo el último que tiene por cuadrado de su norma $1 - \frac{d_{n+1}}{d_n}$.

En el cálculo con los productos escalares de los vectores columnas se utiliza, básicamente, la identidad del Corolario 3.5. $\square$

Si consideramos la sucesión $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales correspondiente a la transformada de Christoffel v del funcional definido positivo $\mathcal{L}_F$ y denotamos por $\widetilde{M}$ la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ abordaremos a continuación el análisis de la relación existente entre $\widetilde{M}$ y M.

Proposición 4.3 ([15]).

$$(z-a)\tilde{\varphi}_n(z) = \frac{b_n}{b_{n+1}}\varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_{n+1}(a)\overline{\varphi_j(a)}}{b_n b_{n+1}}\varphi_j(z), \tag{4.1}$$

donde $b_n = K_n(a,a)^{\frac{1}{2}}$.

De esta forma, si $\mathbf{v}(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots]^t$ y $\tilde{\mathbf{v}}(z) = [\tilde{\varphi}_0(z), \tilde{\varphi}_1(z), \ldots]^t$, entonces (4.1) se escribe en términos matriciales

$$(z-a)\tilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z), \tag{4.2}$$

donde S es una matriz Hessenberg inferior con entradas

$$s_{k,j} = \begin{cases} -\dfrac{\varphi_{k+1}(a)\overline{\varphi_j(a)}}{b_k b_{k+1}}, & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant k, \\ \dfrac{b_k}{b_{k+1}}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases}$$

La matriz S satisface

Proposición 4.4 ([15]). *(i)* $SS^* = I$,
(ii) $S^*S = I - \beta\mathbf{v}(a)\mathbf{v}(a)^*$,

donde $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{K_n(a,a)}$.

Corolario 4.5 ([15]). *Sea* S_n *la submatriz principal de orden* $(n+1) \times (n+1)$ *de* S, *entonces*

(i) $S_n S_n^* = I_{n+1} - \left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^2 e_n e_n^t$.
(ii) $S_n^* S_n = I_{n+1} - \frac{1}{b_{n+1}^2}\mathbf{v}_n(a)\mathbf{v}_n(a)^*$

Para obtener la relación entre las matrices de Hessenberg M y $\widetilde{M}$, introducimos la matriz triangular inferior L de cambio de base $\mathbf{v}(z) = L\tilde{\mathbf{v}}(z)$.

Proposición 4.6.

(i) $L = (M - aI)\,S^*$.
(ii) $\widetilde{M} - aI = SL$.

Demostración.

(i) Dado que

$$(z-a)\tilde{\mathbf{v}}(z) = (z-a)L^{-1}\mathbf{v}(z),$$

de (4.2) se sigue que

$$S\mathbf{v}(z) = L^{-1}(M - aI)\mathbf{v}(z).$$

Por tanto, $LS = M - aI$ y puesto que $SS^* = I$, se sigue el resultado.

(ii) Puesto que $(z-a)\widetilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z)$, entonces

$$\left(\widetilde{M} - aI\right)\widetilde{\mathbf{v}}(z) = S\mathbf{v}(z) = SL\widetilde{\mathbf{v}}(z),$$

de donde se sigue el enunciado. $\square$

Ahora bien, si consideramos la factorización QR de la matriz $(M - aI)^*$, donde $QQ^* = I$ y R es una matriz triangular superior con entradas diagonales positivas, se tiene

Proposición 4.7. *Si* $(M - aI)^* = QR$, *entonces*

$$\widetilde{M} - aI = Q^*R^*.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\langle \mathbf{v}\,\mathbf{v}^t\rangle_v = \langle L\widetilde{\mathbf{v}}\,\widetilde{\mathbf{v}}^t L^t\rangle_v = LL^*,$$

así como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}\,\mathbf{v}^t\rangle_v &= \langle (z-a)\mathbf{v}\,(z-a)\mathbf{v}^t\rangle_{\mathcal{L}_F} \\ &= (M-aI)(M-aI)^* \\ &= R^*R, \end{aligned}$$

de la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz se sigue que $L = R^*$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \widetilde{M} - aI &= \left(\widetilde{M} - aI\right)\langle \widetilde{\mathbf{v}}\,\widetilde{\mathbf{v}}^t\rangle_v \\ &= \langle (z-a)\widetilde{\mathbf{v}}\,\widetilde{\mathbf{v}}^t\rangle_v \\ &= \langle (z-a)L^{-1}\mathbf{v}\,\mathbf{v}^t L^{-t}\rangle_v \\ &= L^{-1}\langle (z-a)\mathbf{v}\,\mathbf{v}^t\rangle_v L^{-*} \\ &= L^{-1}(M-aI)\langle \mathbf{v}\,\mathbf{v}^t\rangle_v L^{-*} \\ &= L^{-1}(M-aI)LL^*L^{-*} \\ &= L^{-1}R^*Q^*L = Q^*R^* \qquad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8. Sea $\mathcal{L}_F$ el funcional lineal asociado a la medida de Lebesgue normalizada de manera que

$$\langle p, q\rangle_{\mathcal{L}_F} = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Es bien conocido que la sucesión de polinomios ortonormales respecto a $\mathcal{L}_F$ es $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$. Si consideramos la transformada de Christoffel v de $\mathcal{L}_F$ para $a = 1$, determinaremos la matriz de Hessenberg de la familia de polinomios ortonormales $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ correspondiente al funcional v. Teniendo en cuenta que

$$M - aI = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & -a & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La factorización QR de la matriz $(M - aI)^*$ es tal que

$$r_{k,j} = \begin{cases} \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}, & si \quad j = k, \\ -\frac{1}{a}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{1}{2}}, & si \quad j = k+1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

$$q_{k,j} = \begin{cases} \frac{-1}{a^{j-k-1}\sqrt{(j+1)(j+2)}}, & si \quad j \geqslant k, \\ \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}, & si \quad j = k-1, \\ 0, & si \quad j < k-1. \end{cases}$$

Por tanto

$$\widetilde{M} - aI = Q^*R^* = (\widetilde{m}_{k,j} - a\delta_{k,j})_{k,j=0}^{\infty},$$

donde

$$\widetilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 0, & si \quad j \geqslant k+2, \\ \frac{\sqrt{(k-1)(k+3)}}{k+2}, & si \quad j = k+1, \\ -\frac{a}{(k+1)(k+2)}, & si \quad j = k, \\ -\frac{a^{k-j-1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)(j+1)(j+2)}}, & si \quad j < k. \end{cases}$$

Si consideramos la sucesión $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales correspondiente a la transformada de Aleksandrov v del funcional definido positivo $\mathcal{L}_F$ y denotamos por $\widetilde{M}$ la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$, abordamos a continuación el análisis de la relación existente entre M y $\widetilde{M}$.

Puesto que $\widetilde{\Phi}_k(0) = \lambda\Phi_k(0)$, $|\lambda| = 1$, deducimos del Corolario 3.5 que $\dfrac{\widetilde{d}_{n+1}}{\widetilde{d}_n} = \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$, $n \geqslant 0$, junto con $\widetilde{d}_0 = \dfrac{(1+\lambda)d_0 - (1-\lambda)}{(1-\lambda)d_0 - (1+\lambda)}$. Esto significa que $\widetilde{d}_n = \dfrac{\widetilde{d}_0}{d_0}d_n$.

De acuerdo con la Proposición 4.1, las entradas de la matriz $\widetilde{M}$ son las de la matriz M salvo las que se encuentran en la primera columna que resultan de multiplicar la primera columna de M por λ. Así pues

Proposición 4.9.

$$\widetilde{M} = M \operatorname{diag}(\lambda, 1, 1, \ldots).$$

con $|\lambda| = 1$.

Finalmente, si consideramos la sucesión $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ de polinomios ortonormales correspondiente a la transformación de asociación de orden N definida en la sección 3, sabemos que $\widetilde{\Phi}_n(0) = \Phi_{n+N}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{d}_{n+1}}{\widetilde{d}_n} &= 1 - \left|\widetilde{\Phi}_{n+1}(0)\right|^2 \\ &= 1 - |\Phi_{n+N+1}(0)|^2 \\ &= \frac{d_{n+N+1}}{d_{n+N}}, \quad n \geqslant 0, \end{aligned}$$

de acuerdo con la Proposición 4.1, las entradas de la matriz de Hessenberg $\widetilde{M}$ correspondiente a la sucesión $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\geqslant 0}$ vienen dadas por

$$\widetilde{m}_{k,j} = \begin{cases} -\left(\dfrac{\widetilde{d}_k}{\widetilde{d}_j}\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Phi}_{k+1}(0)\overline{\widetilde{\Phi}_j(0)} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant k, \\ \left(\dfrac{\widetilde{d}_{k+1}}{\widetilde{d}_k}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases}$$

Salvo las entradas de la primera columna, que satisfacen $\widetilde{m}_{k,0} = m_{k+N,0}$, $k \in \mathbb{N}$, las restantes entradas satisfacen

$$\widetilde{m}_{k,j} = \begin{cases} m_{k+N,j+N}, & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \\ m_{k+N,k+N+1}, & \text{si} \quad j = k+1, \\ 0, & \text{si} \quad j > k+1. \end{cases}$$

Por tanto,

Proposición 4.10.

$$\widetilde{M} \operatorname{diag}(\Phi_N(0), 1, 1, \ldots) = \left(Z^t\right)^N M Z^N, \quad N \geqslant 1,$$

donde Z es la matriz infinita con 1 en la subdiagonal principal inferior y las restantes entradas son nulas.

5. Polinomios ortogonales y espacios de Sobolev

El estudio de polinomios ortogonales respecto a un producto escalar de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x), \tag{5.1}$$

donde $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ es un vector de medidas positivas de Borel donde el soporte de μ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$ es un subconjunto $\mathbb{I}_k$ de la recta real y $p, q \in \mathbb{P}$, aparece en diversas áreas de Matemática Aplicada.

(i) En ajuste por mínimos cuadrados con condiciones de suavidad, dichos polinomios constituyen la base natural en los subespacios de aproximación.

(ii) En series de Fourier, el análisis de los fenómenos de Gibbs se puede mejorar utilizando tales polinomios tal y como se muestra en experimentos numéricos [9].

(iii) Finalmente, la utilización de dichos polinomios en el tratamiento de métodos espectrales para problemas con valores en la frontera es más competitivo que la consideración de polinomios ortogonales estándar.

Si denotamos mediante R la matriz de Gram del producto escalar (5.1) respecto a la base canónica $\{x^n\}_{n\geqslant 0}$ y mediante $R^{(j)}$ la matriz de Gram del producto escalar estándar relativo a la medida μ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, entonces

Proposición 5.1.

$$R = \sum_{k=0}^{N} Z^k D_k R^{(k)} D_k \left(Z^t\right)^k, \tag{5.2}$$

donde $D_k = \operatorname{diag}\left(d_j^{(k)}\right)_{j=0}^{\infty}$ *con* $d_j^{(k)} = k!\binom{k+j}{k}$, $k = 0, 1, \ldots$

Las matrices $R^{(k)}$ son matrices de Hankel.

Si consideramos la sucesión de polinomios ortogonales respecto a (5.1), las entradas de la matriz de Hessenberg asociada no se pueden determinar de manera explícita como hemos realizado en la sección 3 para el caso de los polinomios ortonormales en la circunferencia unidad. No obstante, en algunos casos particulares sí que se puede abordar este problema.

Consideremos (5.1) con $N = 1$ y $d\mu_1 = \lambda d\widetilde{\mu}_1$. El par de medidas $(\mu_0, \widetilde{\mu}_1)$ se dice *coherente* [10] si las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ están relacionadas mediante

$$S_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_n\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geqslant 1. \tag{5.3}$$

donde $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión no nula de números reales.

De aquí se sigue que si $\{Q^\lambda{}_n\}_{n\geqslant 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto al producto escalar de Sobolev, se tiene

$$P_{n+1}(x) + b_n\frac{n+1}{n}P_n(x) = Q^\lambda_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}Q^\lambda_j(x),$$

donde

$$a_{n,j} = \frac{\left\langle P_{n+1}(x) + b_n\frac{n+1}{n}P_n(x), Q^\lambda_j(x)\right\rangle_S}{\left\langle Q^\lambda_j(x), Q^\lambda_j(x)\right\rangle_S} = 0,$$

para $0 \leqslant j \leqslant n-1$ y x

$$a_{n,n} = \frac{\frac{n+1}{n}b_n \int P_n^2(x)d\mu_0}{\langle Q^\lambda_n(x), Q^\lambda_n(x)\rangle_S}.$$

Por tanto, hemos establecido una relación algebraica sencilla entre los polinomios $\{Q^\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ de manera que

$$P_n(x) + c_nP_{n-1}(x) = Q^\lambda_n(x) + e_n(\lambda)Q^\lambda_{n-1}(x)., \tag{5.4}$$

donde $c_n = b_{n-1}\frac{n}{n-1}$, $e_n(\lambda) = a_{n-1,n-1}$, $n \geqslant 2$. En términos matriciales, si $\mathbf{a}(x) = [P_0(x), P_1(x), \ldots]^t$ y $\mathbf{q}(x) = [Q^\lambda_0(x), Q^\lambda_1(x), \ldots]^t$, (5.4) resulta ser

$$A\mathbf{a}(x) = B\mathbf{q}(x), \tag{5.5}$$

donde A y B son matrices bidiagonales inferiores con entradas diagonales 1.

Por tanto, si M es la matriz tridiagonal asociada a la familia $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, esto es, $x\mathbf{a}(x) = M\mathbf{a}(x)$, y $\widetilde{M}$ es la matriz de Hessenberg asociada a la familia $\{Q^\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, esto es, $x\mathbf{q}(x) = \widetilde{M}\mathbf{q}(x)$ de (5.5) se sigue que

$$AM\mathbf{a}(x) = B\widetilde{M}\mathbf{q}(x),$$

esto es,

$$AMA^{-1}B\mathbf{q}(x) = B\widetilde{M}\mathbf{q}(x).$$

Por tanto, deducimos el siguiente resultado

Proposición 5.2. *Si el par de medidas $(\mu_0, \widetilde{\mu}_1)$ es coherente, la matriz de Hessenberg $\widetilde{M}$ asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev es*

$$\widetilde{M} = \left(B^{-1}A\right)M\left(B^{-1}A\right)^{-1},$$

donde A, B son las matrices bidiagonales que han sido introducidos en (5.5).

La descripción de todos los pares coherentes de medidas ha sido obtenida en [20]. Esencialmente, una de ellas es la medida de Jacobi o Laguerre y la otra es una transformada espectral lineal de la anterior.

A modo de ejemplo, en el caso Laguerre se tienen tres situaciones

$$(i)\begin{cases} d\mu_0 = (x+a)x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \\ d\widetilde{\mu}_1 = x^\alpha e^{-x}dx, \quad a>0,\ \alpha>0. \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} d\mu_0 = e^{-x}dx + M\delta(x), \\ d\widetilde{\mu}_1 = e^{-x}dx, \quad M>0. \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} d\mu_0 = x^\alpha e^{-x}dx, \\ d\widetilde{\mu}_1 = \dfrac{x^{\alpha+1}e^{-x}}{x+a}dx + M\delta(x+a), \\ \qquad\qquad a \geqslant 0,\ \alpha > -1,\ M \geqslant 0. \end{cases}$$

En el caso de Jacobi, se tienen las siguientes situaciones

$$(i)\begin{cases} d\mu_0 &= (x+a)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx, \\ d\widetilde{\mu}_1 &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha,\beta>0,\ a>-1. \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} d\mu_0 &= (1-x)^{\alpha-1}dx + M\delta(x+1), \\ d\widetilde{\mu}_1 &= (1-x)^\alpha dx, \quad \alpha>0,\ M\geqslant 0. \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} d\mu_0 &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \\ d\widetilde{\mu}_1 &= \dfrac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta-1}}{x-a}dx + M\delta(x+a), \\ & \qquad a>1,\ \alpha,\beta>-1,\ M\geqslant 0. \end{cases}$$

De la relación (5.4) se sigue una interesante aplicación al tratamiento de la series de Fourier respecto a familias de polinomios ortogonales de Sobolev. Sea

$$\mathbb{W}^{2,1} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \ : \ \int f^2 d\mu_0 < +\infty, \int f'^2 d\widetilde{\mu}_1 < +\infty \right\}.$$

Denotaremos mediante $\widehat{\mathbf{a}}$, $\widehat{\mathbf{b}}$, $\widehat{\mathbf{q}}$ los vectores columnas cuyas $(n+1)$-ésimas componentes son, respectivamente,

$$\widehat{\mathbf{a}}(n) = \int f(x)P_n(x)d\mu_0$$

$$\widehat{\mathbf{b}}(n) = \int f'(x)S_n(x)d\widetilde{\mu}_1$$

$$\widehat{\mathbf{q}}(n) = \left\langle f(x), Q_n^\lambda(x)\right\rangle_S.$$

De (5.5) se sigue que

$$B\widehat{\mathbf{q}} = A\widehat{\mathbf{a}} + \lambda D\widehat{\mathbf{b}},$$

donde $D = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n, \ldots)$.

Por tanto,

Proposición 5.3.

$$\widehat{\mathbf{q}} = B^{-1}A\widehat{\mathbf{a}} + \lambda B^{-1}D\widehat{\mathbf{b}}.$$

De esta forma se pueden determinar los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función f respecto a los polinomios ortonormales de Sobolev en términos de los coeficientes de Fourier de f respecto a $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ y los coeficientes de Fourier de f' respecto a $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$.

Un interesante problema es el análisis de los errores de aproximación $f - S_N f$, donde S_N denota el proyector N-ésimo de Fourier respecto a las familias $\{Q_n^\lambda\}_{n\geqslant 0}$, $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ y $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$, respectivamente. Las correspondientes estimaciones en términos de N permitirían la comparación entre la aproximación estándar y la aproximación de Sobolev, hasta ahora sólo realizada entre el caso Legendre y el Legendre Sobolev [10].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BFM 2003-06335-C03-02 financiado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia de España. Asimismo deseo agradecer los comentarios y sugerencias de **Javier Hernández Benítez** que con su cuidadosa revisión ha contribuido a mejorar sustancialmente su contenido.

Referencias

[1] **Bueno, M. I. & Marcellán, F.** *Darboux transformations and perturbation of linear functionals.* Linear Alg. and Appl. **384** (2004), 215–242.

[2] **Buhmann, M. & Iserles, A.** *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm.* J. Comput. Appl. Math. **43** (1992), 117–134.

[3] **Daruis, L., Hernández, J. & Marcellán, F.** *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices.* J. Comput. Appl. Math. (2006). En prensa.

[4] **Geronimus, Ya. L.** *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval.* Consultants Bureau: New York, 1961.

[5] **Godoy, E. & Marcellán, F.** *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle.* Boll. Un. Mat. Ital A **5** (1991), 1–12.

[6] **Godoy, E. & Marcellán, F.** *Orthogonal polynomials and rational modification of measures.* Canad. J. Math. **45** (1993), 930–943.

[7] **Gragg, W. B.** *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices.* J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.

[8] **Grenander, U. & Szegö, G.** *Toeplitz Forms and their Applications.* University of California Press: Berkeley. 2^{nd} ed. Chelsea: New York, 1984.

[9] **Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P. & Sanz-Serna, J. M.** *Orthogonality and approximations in a Sobolev Space.* In *Algorithms for Approximations*, **J. C. Mason & M. G. Cox**, eds. Chapman and Hall: London (1990) 117–124.

[10] **Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P. & Sanz-Serna, J. M.** *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner product.* J. Approx. Theory **65** (1991), 151–175.

[11] **Ismail, M. E. H. & Ruedemann, R. W.** *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weigths.* J. Approx. Theory 71 (1992), 39–60.

[12] **Jones, W. B., Njåstad, O. & Thron, W. J.** *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle.* Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.

[13] **Kailath, T.** *Linear Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.

[14] **Kailath, T. & Porat, B.** *State-space generators for orthogonal polynomials.* In: *Prediction Theory and Harmonic Analysis.* Eds. **V. Mandrekar & H. Salehi**. The Pesi Massani Volume, 1983, 131–163.

[15] **Marcellán, F. & Hernández, J.** *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals.* Mediterr. J. Math. **2** (2005), 451–458.

[16] **Marcellán, F. & Moreno-Balcazar, J. J.** *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports* Acta Appl. Math. **49** (2006), 163–192.

[17] **Marcellán, F. & Szafraniec, F. H.** *The Sobolev type moment problem.* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2309–2316.

[18] **Martínez Finkelshtein, A.** *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited.* J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 255–266.

[19] **Meijer, M. G.** *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev Space I: The non-discrete case.* Niew Arch. Wisk. **14** (1996), 93–112.

[20] **Meijer, M. G.** *Determination of all coherent pairs of functionals.* J. Approx. Theory **89** (1997), 321–343.

[21] **Peherstorfer, F.** *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials.* Constr. Approx. **12** (1996), 161–185.

[22] **Reichel, L., Ammar, G. S. & Gragg, W. B.** *Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials.* Math. Comp. **57** (1991), 273–289.

[23] **Simon, B.** *Orthogonal polynomials on the unit circle.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series 54, two vols. Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 2005.

[24] **Spiridonov, V. & Zhedanov, A.** *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials.* J. Phys. A. Math. Gen. **30** (1997), 7621–7637.

[25] **Szegő, G.** *Orthogonal Polynomials.* 4^{th} ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series 23. Amer. Math. Soc.: Providence, RI, 1975.

Recibido el 5 de octubre de 2006

Aceptado para su publicación el 4 de diciembre de 2006