EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO CON UNA ECUACIÓN NO LINEAL GENERALIZADA DE SCHRÖDINGER

por

Omar Duque & Guillermo Rodríguez-Blanco[1]

Resumen

Duque, Omar & Guillermo Rodríguez–Blanco: El problema de Cauchy asociado a una ecuación no lineal generalizada de Schrödinger. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (116): 353–360, 2006. ISSN 0370-3908.

Se estudia el buen planteamiento local en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, con $s > 1/2$, del problema de valor inicial asociado a una ecuación no lineal generalizada de Schrödinger y se muestra el buen planteamiento global (bajo ciertas condiciones de los parámetros) en $H^s(\mathbb{R})$ para $s = 2$ y $s = 1$. Además se obtiene un criterio de *blow up* cuando el dato inicial ϕ está en el espacio $F_1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}) \cap L_1^2(\mathbb{R})$.

Palabras clave: Ecuación no lineal generalizada de Schrödinger, problema de valor inicial, buen planteamiento local y global, espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

Abstract

In this paper we stablish the local wellpossedness for non linear generalized Schrödinger equation in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$, with $s > 1/2$. Also, we obtain global welposedness in $H^s(\mathbb{R})$ for $s = 1, 2$. In addition, a blow up result is established if the initial data belongs to $F_1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}) \cap L_1^2(\mathbb{R})$.

Key words: Non linear generalized Schrödinger equation, initial value problems, local and global wellposedness, Sobolev spaces.

[1]Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Email: oduqueg@unal.edu.co, grodriguezb@unal.edu.co
AMS Classification 2000: Primary: 49K20, 35Q55. Secondary: 37L50, 37L05, 37K10.

1. Introducción

En este trabajo estamos interesados en estudiar el problema de Cauchy asociado al problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + D\partial_x^2 u + P\partial_x^4 u + B\,|u|^2\, u + K\,|u|^4\, u = 0\ ; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R} \\ u\,(0) = \phi \end{cases} \tag{1}$$

donde $D,\ P,\ B, K$ son parámetros reales con $D^2+P^2\neq 0$ y $\phi\in H^s\,(\mathbb{R})$. Más precisamente, estudiamos el buen planteamiento tanto local como global del problema (1) en los espacios de Sobolev $H^s\,(\mathbb{R})$. La ecuación diferencial parcial (E.D.P.) de (1) modela fenómenos físicos que se presentan en óptica no lineal y en teoría de ondas; mayores detalles a este respecto pueden encontrarse por ejemplo en [4] y en las referencias dadas allí.

Los siguientes funcionales:

$$I\,(u\,(t)) = \|u\,(t)\|_0^2 = \|\phi\|_0^2 \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} E\,(u\,(t)) = \quad & \|\partial_x u\,(t)\|_0^2 - P\left\|\partial_x^2 u\,(t)\right\|_0^2 - \frac{B}{2}\,\|u\,(t)\|_{L^4}^4 \\ & - \frac{K}{3}\,\|u\,(t)\|_{L^6}^6\ ; \end{aligned} \tag{3}$$

son conservados por el flujo generado por (1) y serán de utilidad para obtener estimativas apriori para las normas $\|u\|_s$ con $s=1,2$.

Observe que la E.D.P. en (1) es una generalización de cuarto orden de la E.D.P.

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u + \lambda\,|u|^{p-1}\, u\ ;\ \lambda = -1, 1 \tag{4}$$

conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger. El buen plantemiento tanto local como global de (4) en espacios de Sobolev $H^s\,(\mathbb{R})$ ha sido ampliamente estudiado, vea por ejemplo: [2], [8], [9], [12], [15], para mayor información. El caso $p=5$, conocido como caso crítico, ha sido de interés, porque sus soluciones explotan en tiempo finito, dicho fenómeno es conocido como *blow up*, véase, por ejemplo, [1], [2], [3], [13], [14] para más información a este respecto. Los primeros resultados de *blow up* para (4) fueron obtenidos por **Glassey** [10], como consecuencia de la siguiente identidad para la varianza

$$\frac{d^2}{dt^2}V = E\,(\phi)$$

donde

$$V\,(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2\,|u|^2\,dx$$

y

$$E\,(\phi) = \|\partial_x\phi\|_0^2 - \frac{2\lambda}{p+1}\,\|\phi\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

Dicho resultado despertó el interés y nuevos criterios de *blow up* fueron obtenidos a partir del estudio de la estabilidad orbital de (4). Para más información a este respecto véase [1].

En este trabajo, probaremos que (1):

1. Está localmente bien planteado en $H^s\,(\mathbb{R})$ si $s>1/2$.
2. Está globalmente bien planteado en $H^2\,(\mathbb{R})$ si $P\neq 0$.
3. Está globalmente bien planteado en $H^1\,(\mathbb{R})$ si $P=0$ y $DK\leq 0$.
4. Está globalmente bien planteado en $H^1\,(\mathbb{R})$ si $P=0$, $DK>0$ y $\|\phi\|_0$ es suficientemente pequeña.
5. Si $\phi\in F_1\,(\mathbb{R})$, $P=0$, $DK>0$, $BD\leq 0$, $\|\phi\|_0\geq C$ (donde C es una constante positiva (18)) y alguna de las siguientes situaciones ocurre:
   (a) $E\,(\phi)=0$ y $D\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\partial_x\phi dx<0$, o,
   (b) $DE\,(\phi)<0$, o,
   (c) $D\,E\,(\phi)>0$ y
   $$D\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\partial_x\phi dx < -\sqrt{DE\,(\phi)}\,\|x\phi\|_0$$
   entonces, la solución local de (1) explota en tiempo finito.

Nuestros resultados de *blow up* para (1) son semejantes a los obtenidos por **Glassey** [10], salvo que la fórmula de la segunda derivada de la varianza $V\,(t)$, es más complicada. Sería desable hacer un estudio más profundo del *blow up* para (1) con $P=0$. Con esto en mente creemos que el estudio de la estabilidad orbital podría ser de utilidad como ocurrió en (4), para obtener criterios adicionales de *blow up* para (1) con $P=0$.

Antes de comenzar el desarrollo del trabajo, fijaremos la notación que será usada:

1. $S\,(\mathbb{R})$ es el espacio de Schwartz.
2. $S'\,(\mathbb{R})$ es el espacio de las distribuciones temperadas.
3. $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de $u\in S'\,(\mathbb{R})$.

4. $H^s(\mathbb{R}) = \left\{u \in S'(\mathbb{R}) : \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$ con $s \in \mathbb{R}$, es el espacio de Sobolev de orden s, dotado de la norma
$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$
inducida por el producto interno
$$\langle u, v\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$
Información adicional sobre estos espacios puede ser consultada en [5], [11], [7].
5. $C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ es el espacio de las funciones continuas $u : [0,T] \to H^s(\mathbb{R})$, dotado con la norma usual $\|u\|_{s,\infty} = \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_s$.
6. Para s, $r \in \mathbb{R}$,
$$F_{s,r}(\mathbb{R}) = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2\left(\left(1+x^2\right)^r dx\right)$$
dotado con la norma usual
$$\|u\|_{F_{s,r}} = \|u\|_s + \left\|\left(1+x^2\right)^r u\right\|_0.$$
En el caso $r = s$ escribiremos $F_r(\mathbb{R})$ en lugar de $F_{r,r}(\mathbb{R})$.
7.
$$A = P\partial_x^4 + D\partial_x^2, \tag{5}$$
$$F(u) = i\left[B|u|^2 u + K|u|^4 u\right]. \tag{6}$$
8. Por comodidad escribiremos el problema (1) en la forma
$$\begin{cases} \partial_t u = iAu + F(u) \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}), \ s > 1/2. \end{cases} \tag{7}$$
9.
$$\exp[it\,A]\,\phi = \left\{\exp[it\,Q(\xi)]\,\widehat{\phi}(\xi)\right\}^{\vee}$$
donde, $Q(\xi) = D(i\xi)^2 + P(i\xi)^4$ y $^\vee$ es la transformada inversa de Fourier, es el grupo generado por iA, con A como en (5).

2. El problema local

Comenzaremos nuestra labor con la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si u, $v \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ con $s > \frac{1}{2}$ entonces,*
$$\|F(u(t)) - F(v(t))\|_s \leq$$
$$\left(\|u(t)\|_s^4 + \|v(t)\|_s^4 + \|u(t)\|_s^2 + \|v(t)\|_s^2\right) \|u(t) - v(t)\|_s$$
para alguna constante $C = C(B,K,s) > 0$. Además,
$$\|F(u) - F(v)\|_{s,\infty} \leq k\,\|u - v\|_{s,\infty}, \tag{8}$$
donde $k = C\left(\|u\|_{s,\infty}^4 + \|v\|_{s,\infty}^4 + \|u\|_{s,\infty}^2 + \|v\|_{s,\infty}^2\right)$.

Demostración. Que $H^s(\mathbb{R})$, con $s > \frac{1}{2}$, sea un álgebra de Banach, la desigualdad de Young (28), las identidades
$$|f|^2 f - |g|^2 g = |f|^2 (f-g) + \overline{f} g (f-g) + g^2 \left(\overline{f} - \overline{g}\right)$$
y
$$\begin{aligned} |f|^4 f - |g|^4 g = {} & |f|^4 (f-g) \\ & + |f|^2 g\overline{f}(f-g) + |f|^2 g^2 \left(\overline{f} - \overline{g}\right) \\ & + |g|^2 g\overline{f}(f-g) + |g|^2 g^2 \left(\overline{f} - \overline{g}\right), \end{aligned}$$
implican el resultado. □

Proposición 2. *Si $s > \frac{1}{2}$ entonces (1) es equivalente a la ecuación integral*
$$u(t) = \exp[tiA]\,\phi + \int_0^t \exp[(t-\tau)\,iA]\,F(u(\tau))\,d\tau \tag{9}$$
en el siguiente sentido: Si $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ satisface (1) entonces satisface (9) y si $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ satisface (9) entonces,
$$\lim_{h\to 0} \left\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - iAu(t) - F(u(t))\right\|_{s-4} = 0.$$

Demostración. Este resultado es cosecuencia del método de variación de parámetros, del lema de Sobolev y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Los detalles de la prueba son semejantes a los expuestos en [11] para la ecuación de Schrödinger. □

Teorema 3. *El problema de valor inicial (1) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 1/2$.*

Demostración. La idea de la prueba es aplicar el teorema del punto fijo de Banach para resolver la ecuación integral (9). Con este fin, para $M > 0$ consideramos el espacio métrico completo
$$\begin{aligned} \mathbb{X}_M(T) = \{u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R})) : & \|u(t) - \exp[itA]\,\phi\|_s \\ & \leq M, \ \forall t \in [0,T]\}, \end{aligned}$$
con la métrica $d_\infty(u,v) = \|u - v\|_{s,\infty}$.

Como consecuencia de la proposición 1, existe
$$T_0 = \text{mín}\left\{\frac{M}{C_1}, \frac{1}{C_2+1}\right\} > 0,$$

donde

$$C_1 = C_s\left(M + \|\phi\|_s\right)^3\left(1 + \left(M + \|\phi\|_s\right)^2\right),$$

$$C_2 = 2C_s\left(1 + \left(M + \|\phi\|_s\right)^2\right)\left(M + \|\phi\|_s\right)^2$$

y C_s es una constante positiva que depende de $B,\ K$ y s; tal que si $0 < T \le T_0$ entonces,

$$\mathcal{A}u(t) = \exp[itA]\,\phi + \int_0^t \exp[i(t-\tau)A]\,F(u(\tau))\,d\tau$$

es una contracción en $\mathbb{X}_M(T)$, (mayores detalles sobre este hecho pueden encontrarse en [6]). Por lo tanto, el Teorema de Punto Fijo Banach y la proposición 2 nos permiten concluir que (1) admite una única solución en $\mathbb{X}_M(T)$.

Ahora, si $u,\ v \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ son soluciones de (1) con datos iniciales ϕ y ψ respectivamente, la ecuación integral (9) implica que:

$$\|u(t) - v(t)\|_s \le \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t \|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\|_s\,d\tau$$

y por la proposición 1 tenemos que

$$\|u(t) - v(t)\|_s \le \|\phi - \psi\|_s + \int_0^t k\,\|u(\tau) - v(\tau)\|_s\,d\tau,$$

donde $k = C\left(\|u\|_{s,\infty}^2 + \|v\|_{s,\infty}^2 + \|u\|_{s,\infty}^4 + \|v\|_{s,\infty}^4\right)$. Luego

$$\|u(t) - v(t)\|_s \le \|\phi - \psi\|_s \exp[kT], \tag{10}$$

que es una consecuencia de la desigualdad de Gronwall (25), nos da la unicidad de las soluciones de (1) en $C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ y una dependencia continua débil. La dependencia continua, es consecuencia de (10) y de la continuidad de T_0 como función de $\|\phi\|_s$. En efecto, si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H^s(\mathbb{R})$ que converge a ϕ en $H^s(\mathbb{R})$ y T^* satisface $0 < T^* < T_0(\|\phi\|_s)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que la solución u_n de (1) con dato inicial ϕ_n, pertenece a $C([0,T^*] : H^s(\mathbb{R}))$. Por lo tanto, eligiendo $T = \text{mín}\{T_1, ..., T_N, T^*\}$, donde T_j con $j = 1, ..., N$ es el tiempo de existencia de la solución de (1) con dato inicial ϕ_j, obtenemos que $u_n \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ es la solución de (1), tenemos que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_s \le \|\phi_n - \phi\|_s \exp[k_n T]$$

donde $k_n = C\left(\|u_n\|_{s,\infty}^2 + \|u\|_{s,\infty}^2 + \|u_n\|_{s,\infty}^4 + \|u\|_{s,\infty}^4\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,T]$. Puesto que, $\|u_n(t) - \exp[itA]\,\phi_n\|_s \le M$ para $t \in [0,T]$, entonces $\|u_n(t)\|_s \le M + \|\phi_n\|_s$. Como $\phi_n \to \phi$ en $H^s(\mathbb{R})$ entonces existe $C > 0$ tal que $\|u_n(t)\|_s \le M + C$ para $t \in [0,T]$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Así que, existe $E > 0$ tal que $\|u_n\|_{s,\infty}^2 + \|u_n\|_{s,\infty}^4 \le E$, para todo n y $C^* = C\left(\|u\|_{s,\infty}^2 + \|u\|_{s,\infty}^4 + E\right) \ge k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\|u_n - u\|_{s,\infty} \le \|\phi_n - \phi\|_s \exp[C^* T],$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{s,\infty} = 0. \quad \square$$

$\square$

Teorema 4. *El problema de valor inicial*

$$\begin{cases} i\partial_t u + D\partial_x^2 u + B|u|^2 u + K|u|^4 u = 0 \\ u(0) = \phi \in F_r(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{11}$$

está localmente bien planteado en $F_r(\mathbb{R})$ para $r \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, (1) con $P = 0$ está localmente bien planteado en $F_r(\mathbb{R})$.

Demostración. La prueba es similar a la del teorema 3, con ligeras modificaciones, entre ellas la desigualdad

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{F_r,\infty} &= \sup_{t\in[0,T]} \|F(u(t)) - F(v(t))\|_{F_r} \\ &\le C \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{F_r} \\ &= C\,\|u - v\|_{F_r,\infty} \end{aligned} \tag{12}$$

donde

$$C = C_r\left(\|u\|_{F_r,\infty}^2 + \|v\|_{F_r,\infty}^2 + \|u\|_{F_r,\infty}^4 + \|v\|_{F_r,\infty}^4\right) > 0$$

para $u,\ v \in C([0,T] : F_r(\mathbb{R}))$ con $r \in \mathbb{Z}^+$, y la equivalencia del problema (11) con la ecuación integral

$$u(t) = \exp\left[itD\partial_x^2\right]\phi + \int_0^t \exp\left[i(t-\tau)D\partial_x^2\right] F(u(\tau))\,d\tau, \tag{13}$$

en el siguiente sentido: Si $u \in C([0,T] : F_r(\mathbb{R}))$ satisface (11) entonces satisface la (13) y si $u \in C([0,T] : F_r(\mathbb{R}))$ satisface (13) entonces u satisface (11) en el siguente sentido,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - iAu(t) - F(u(t))\right\|_{r-2} = 0.$$

Detalles adicionales de esta prueba pueden encontrarse en [6]. $\square$

3. El problema global

Para establecer los resultados globales es suficiente mostrar que la solución local $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ de (1) es uniformemente acotada en $[0,T]$ y esto se logra usando la dependencia continua, las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg (26) y las leyes de conservación (2) y (3), las cuales se obtienen multiplicando la E.D.P. (1) por $\overline{u}$ y $\partial_t \overline{u}$ respectivamente, tomando parte real e imaginaria respectivamente, integrando por partes y usando un argumento de densidad (vea [6]).

Teorema 5. *Si $P \neq 0$ entonces (1) es un problema globalmente bien planteado en $H^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Al considerar la ley de conservación (3) obtenemos

$$\left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2 = \frac{D}{P}\left\|\partial_x u(t)\right\|_0^2 - \frac{B}{2P}\left\|u(t)\right\|_{L^4}^4 - \frac{K}{3P}\left\|u(t)\right\|_{L^6}^6 - \frac{E(\phi)}{P}. \tag{14}$$

La desigualdad de Gagliardo-Niremberg (26) junto con la desigualdad de Young (28) implican que:

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u\|_0^2 &< C_1\left\|\partial_x^2 u\right\|_0\|u\|_0 = C_1\left\|\partial_x^2 u\right\|_0\|\phi\|_0 \\
&\leq \frac{C_1}{2}\left(\varepsilon^2\left\|\partial_x^2 u\right\|_0^2 + \frac{\|\phi\|_0^2}{\varepsilon^2}\right), \\
\|u\|_{L^4}^4 &< C_2\|\partial_x u\|_0\|u\|_0^3 = C_2\|\partial_x u\|_0\|\phi\|_0^3 \\
&\leq \frac{C_2}{2}\left(\|\partial_x u\|_0^2 + \|\phi\|_0^6\right), \\
\|u\|_{L^6}^6 &< C_3\|\partial_x u\|_0^2\|u\|_0^4 = C_3\|\partial_x u\|_0^2\|\phi\|_0^4,
\end{aligned} \tag{15}$$

donde $C_1,\ C_2,\ C_3$ son constantes positivas. Combinando (14) y las desigualdades (15) obtenemos que

$$\left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2 \leq \alpha + \beta\varepsilon^2\left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2 + \frac{\beta\|\phi\|_0^2}{\varepsilon^2},$$

donde

$$\alpha = \left|\frac{B}{P}\right|\frac{C_2}{4}\|\phi\|_0^6 - \frac{E(\phi)}{P},$$

$$\beta = \left|\frac{D}{P}\right|\frac{C_1}{2} + \left|\frac{B}{P}\right|\frac{C_1C_2}{8} + \left|\frac{K}{P}\right|\frac{C_1C_3}{6}\|\phi\|_0^4,$$

es decir,

$$\left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2\left(1-\beta\varepsilon^2\right) \leq \frac{\beta\|\phi\|_0^2}{\varepsilon^2}.$$

Eligiendo ε tal que $1-\beta\varepsilon^2 = 1/2$ tenemos que

$$\left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_0^2 \leq M\|\phi\|_0^2 \tag{16}$$

donde $M = \dfrac{2\beta}{\varepsilon^2}$. La cantidad conservada (2) y (16) implican que, existe $C > 0$, tal que,

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C\|\phi\|_0^2,$$

para todo $t \in [0,T]$. Es decir, $\|u(t)\|_2$ está uniformemente acotada en $[0,T]$ y por lo tanto, u puede ser extendida de manera única a $[0,\infty)$. □

Teorema 6. *El problema (1) con $P = 0$ está globalmente bien plantedao en $H^1(\mathbb{R})$ si:*

1. $DK \leq 0$,

o

2. *$DK > 0$ y $\|\phi\|_0$ es suficientemente pequeña.*

Demostración. La cantidad conservada (3) implica que

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 = \frac{E(\phi)}{D} + \frac{B}{2D}\|u(t)\|_{L^4}^4 + \frac{K}{3D}\|u(t)\|_{L^6}^6$$

luego,

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 \leq \frac{E(\phi)}{D} + \frac{|B|}{2|D|}\|u(t)\|_{L^4}^4 + \frac{K}{3D}\|u(t)\|_{L^6}^6$$

Usando (15) tenemos que

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 \leq \frac{E(\phi)}{D} + \frac{|B|C_2}{4|D|}\left(\varepsilon^2\|\partial_x u\|_0^2 + \frac{\|\phi\|_0^6}{\varepsilon^2}\right) + \frac{K}{3D}\|u(t)\|_{L^6}^6$$

y eligiendo ε de manera que $1 - \dfrac{|B|C_2}{4|D|}\varepsilon^2 = \dfrac{1}{2}$ tenemos

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 \leq \frac{2E(\phi)}{D} + \frac{|B|^2 C_2^2}{4|D|^2}\|\phi\|_0^6 + \frac{2K}{3D}\|u(t)\|_{L^6}^6. \tag{17}$$

En el caso, $DK \leq 0$, de (17) se deduce que $\|\partial_x u(t)\|_0^2$ está uniformemente acotada en $[0,T]$, pues

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 \leq \frac{2E(\phi)}{D} + \frac{|B|^2 C_2^2}{4|D|^2}\|\phi\|_0^6.$$

En el caso, $DK > 0$ usamos (15) nuevamente para obtener:

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 \leq \frac{2E(\phi)}{D} + \frac{|B|^2 C_2^2}{4|D|^2}\|\phi\|_0^6 + \frac{2KC_3}{3D}\|\partial_x u\|_0^2\|\phi\|_0^4,$$

de modo que $\|\partial_x u(t)\|_0^2$ está uniformemente acotada en $[0,T]$ si

$$0 < \|\phi\|_0 < \left(\frac{3D}{2KC_3}\right)^{1/4} = C. \tag{18}$$

Por lo tanto, en ambos casos tenemos que $\|u(t)\|_1^2 = \|\phi\|_0^2 + \|\partial_x u(t)\|_0^2 \le \|\phi\|_0^2 + C(\phi)$ para $t \in [0,T]$, donde $C(\phi) = \dfrac{2E(\phi)}{D} + \dfrac{|B|^2 C_2^2}{4|D|^2} \|\phi\|_0^6$. □

4. Criterio de blow up

El criterio de *blow up*, es consecuencia del resultado local con dato inicial en $F_1(\mathbb{R})$, de las leyes de conservación (19) y (20), de las seudo leyes de conservación (21), (22) y de la desigualdad de Heisenberg (27).

Proposición 7. *Si $u \in C([0,T] : H^1(\mathbb{R}))$, es la solución local de (1) con $s = 1$ y $P = 0$, entonces u satisface las siguientes leyes de conservación: Para todo $t \in [0,T]$*

$$I(u(t)) = \|u(t)\|_0^2 = \|\phi\|_0^2 \tag{19}$$

y

$$\begin{aligned} E(u(t)) &= D\|\partial_x u(t)\|_0^2 - \frac{B}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 - \frac{K}{3}\|u(t)\|_{L^6}^6 \\ E(u(0)) &= E(\phi). \end{aligned} \tag{20}$$

Demostración. En el caso $\phi \in H^2(\mathbb{R})$, (19) se obtiene multiplicando la E.D.P. de (1) por $\overline{u}$ tomando parte real e integrando por partes, y (20) se obtiene multiplicando la E.D.P. de (1) por $\partial_t \overline{u}$, tomando parte imaginaria e integrando por partes. Y por densidad, junto con la dependencia continua, se obtienen las fórmulas para el caso $\phi \in H^1(\mathbb{R})$. □

Proposición 8. *Si $u \in C([0,T] : F_r(\mathbb{R}))$ es la solución local de (1) con $\phi \in F_r(\mathbb{R})$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} x^2 |u(t)|^2 dx = 4D\int_{\mathbb{R}} x\overline{u(t)}\partial_x u(t)\,dx \tag{21}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}} x^2|u(t)|^2 dx &= 4D\Big\{2D\|\partial_x u(t)\|_0 - \\ &\quad \frac{B}{2}\|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 - \frac{2K}{3}\|u(t)\|_{L^6(\mathbb{R})}^6\Big\} \\ &= 4D\left\{2E(\phi) + \frac{B}{2}\|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

para $t \in [0,T]$.

Demostración. En el caso, $r \ge 2$ la fórmula (21), se obtiene de multiplicar la E.D.P. de (1) por $2\overline{u}$, de tomar la parte imaginaria e integrar por partes. La fórmula (22) se obtiene de multiplicar el conjugado complejo de la E.D.P. de (1) por $2x\partial_x u$, de tomar la parte real e integrar por partes. Usando un argumento de densidad junto con la dependencia continua se obtinen las fórmulas en el caso $r = 1$. Mayores detalles pueden verse en [6]. □

Teorema 9. *Si $u \in C([0,T] : F_1(\mathbb{R}))$ es la solución local del problema (1) con $\phi \in F_1(\mathbb{R})$, $P = 0$, $DK > 0$, $BD \le 0$ y $C \le \|\phi\|_0$, donde C es como en (18) y alguna de las siguientes situaciones ocurre:*

(a) *$E(\phi) = 0$ y $D\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\partial_x\phi dx < 0$, o,*
(b) *$DE(\phi) < 0$, o,*
(c) *$DE(\phi) > 0$ y*

$$D\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\partial_x\phi dx < -\sqrt{DE(\phi)}\,\|x\phi\|_0 ,$$

entonces existe $T^* \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lim\limits_{t\to T^*} \|\partial_x u(t)\|_0 = \infty$.

Demostración. Supongamos que el problema (1), con las condiciones dadas, es global en $F_1(\mathbb{R})$. Integrando dos veces (22) entre 0 y t tenemos

$$\begin{aligned} \|xu(t)\|_0^2 &= 4DE(\phi)t^2 + 4Dt\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx \\ &\quad + 2BD\int_0^t\int_0^s \|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau ds + \|x\phi\|_0^2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|xu(t)\|_0^2 \le 4DE(\phi)t^2 + 4Dt\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \|x\phi\|_0^2.$$

Las condiciones (a), (b) y (c) aseguran la existencia de $T^* \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$4DE(\phi)T^{*2} + 4DT^*\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} x\overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \|x\phi\|_0^2 = 0$$

luego

$$\lim_{t\to T^{*-}} \|xu(t)\|_0^2 = 0.$$

La desigualdad de Heisenberg (27) junto con (2) implican que

$$\|\phi\|_0 = \|u(t)\|_0 \le 2\|xu(t)\|_0\|\partial_x u(t)\|_0 \tag{23}$$

y tomando límite cuando $t \to T^{*-}$ en (23) obtenemos que $\|\phi\|_0 = 0$, lo cual es imposible. □

5. Apéndice

Teorema 10 (Lema de inmersión de Sobolev)**.** *Si*

$$s > \frac{1}{2} + k \ ,$$

donde k es un entero no negativo, entonces $H^s(\mathbb{R})$ está contenido continuamente en el espacio $C_\infty^k(\mathbb{R})$ de funciones con k derivadas continuas tales que $\lim_{|x|\to\infty} \partial_x^n u(x) = 0$ para $n = 0, ..., k$. La inclusión continua significa que existe $C_s > 0$ tal que

$$\|u\|_{C_\infty^k} = \sum_{n=0}^{k} \|\partial_x^n u\|_\infty \leq C_s \|u\|_s . \tag{24}$$

Demostración. Véanse [14] y las referencias dadas allí. □

Teorema 11 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sean $k \in L^1([a,b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([a,b] : \mathbb{R})$ tales que $f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s)\, ds$ para $a \leq t \leq b$. Entonces*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp\left[\int_s^t k(r)\, dr\right] g(s)\, ds$$

para $a \leq t \leq b$. Además, si g es constante entonces

$$f(t) \leq g \exp\left[\int_a^t k(r)\, dr\right]. \tag{25}$$

Demostración. Véanse [11] y las referencias dadas allí. □

Teorema 12 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Si $u \in H^k(\mathbb{R})$ donde k es un entero positivo, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|\partial_x^n u\|_{L^p} \leq C \|\partial_x^m u\|_{L^q}^{\theta} \|u\|_{L^r}^{1-\theta} \tag{26}$$

donde $n < m \leq k$, $C = C(n, m, p, q, r)$, $\theta \in \left[\frac{n}{m}, 1\right]$ y

$$\frac{1}{p} - n = \theta\left(\frac{1}{q} - m\right) + (1-\theta)\frac{1}{r}.$$

Demostración. Véanse [14] y las referencias dadas allí. □

Teorema 13 (Desigualdad de Heisenberg)**.** *Si $u \in F_1(\mathbb{R})$ entonces*

$$\|u\|_0^2 \leq 2 \|xu\|_0 \|\partial_x u\|_0 . \tag{27}$$

Demostración. Véase [11]. □

Teorema 14 (Desigualdad de Young)**.** *Si $x, \ y \geq 0$, $p, \ q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{28}$$

Demostración Véase [11].

Algunas de las propiedades importantes de $F_{s,r}(\mathbb{R})$ son las siguientes:

Teorema 15. *$F_{s,r}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach con respecto al producto de funciones para todo $r \in \mathbb{R}$ si $s > \frac{1}{2}$, es decir, existe $C_{s,r} > 0$ tal que si $u, \ v \in F_{s,r}(\mathbb{R})$ entonces $uv \in F_{s,r}(\mathbb{R})$ y*

$$\|uv\|_{F_{s,r}} \leq C_{s,r} \|u\|_{F_{s,r}} \|v\|_{F_{s,r}} . \tag{29}$$

Demostración. Véase [11]. □

Teorema 16. *Si $u \in F_{r,r}(\mathbb{R}) = F_r(\mathbb{R})$ entonces para todo par de enteros no negativos m y n tales que $0 \leq n + m \leq r$ existe una constante positiva $C_{n,m}$ tal que*

$$\|x^n \partial_x^m u\|_0 \leq C_{n,m} \|u\|_{F_r} . \tag{30}$$

Demostración. Véase [11]. □

Teorema 17. *Si $u \in F_{r,r}(\mathbb{R}) = F_r(\mathbb{R})$ con $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\widehat{u} \in F_r(\mathbb{R})$ y*

$$\|\widehat{u}\|_{F_r} = \|u\|_{F_r} . \tag{31}$$

Demostración. Véase [11]. □

Referencias

[1] **J. Bourgain & W. Wang**. *Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical Nonlinearity,* Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. **25** (4) (1997), 197–215.

[2] **T. Cazenave**. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations.* Tercera edicción. Instituto de Matematica–UFRJ, 1996.

[3] **T.Cazenave & F. B. Weissler**, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Analysis Theory and Applications **14** (10) (1990), 807–836.

[4] **T. Davydova & Y. Zaliznyak**. *Schrödinger ordinary solitons and chirped solitons: fourth-order dispersive effects and cubic-quintic nonlinearity*, Physica D **156** (2001) 260–282.

[5] **J. Duoandikoetxea**. *Análisis de Fourier*, Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1995.

[6] **O. Duque**. *El problema de Cauchy asociado a una ecuación no lineal generalizada de Schrödinger*, Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá 2005.

[7] **G. Folland**. *Introduction to Partial Diferential Equations*, Princeton University Press/University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[8] **J. Ginibre & G. Velo**. *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case.* J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32.

[9] **J. Ginibre & G. Velo. G.** *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case.* J. Funct. Anal. **32** (1979), 33-71.

[10] **R. Glassey**. *On the blowing up of solutions to the Caychy Problem for nonlinear Schrödinger equations.* J. Math. Phys. **18** (9) (1997), 1794–1797.

[11] **R. Iório, Jr. & V. Iório**. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[12] **C. Kenig, G. Ponce & L. Vega**. *On the IVP for the nonlinear Schrödinger equations.* American Mathematical Society. Contemp. Math. **189** (1995), 353-367.

[13] **G. Ponce**. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución.* I Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Numérico. Universidad del Valle, Cali (Colombia), 1993.

[14] **G. Ponce & F. Linares**. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Prepublication, 2003.

[15] **C. Sulem & P. Sulem**. *The nonlinear Schrödinger equation.* Applied Mathematical Sciences **139**, Springer-Verlag, New York, 1999.

Recibido el 9 de septiembre de 2005

Aceptado para su publicación en enero de 2006