# MÉTRICAS PLANAS Y EL TEOREMA DE UNIFORMIZACIÓN EN TOROS MÍNIMOS DE LA ESFERA 3 DIMENSIONAL

Por

**Oscar Montaño[1], Oscar Perdomo[2] & Nazly Salas[3]**

**Resumen**

**Montaño O, O. Perdomo & N. Salas:** Métricas planas y el teorema de uniformización en toros mínimos de la esfera 3 dimensional. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **32**(123): 235-243, 2008. ISSN 0370-3908.

Sea $(M, g)$ una superficie con una métrica riemanniana la cual es topológicamente un toro. El teorema de uniformización implica la existencia de una inmersión conforme $\phi$: $R^2 \to M$ la cual es una aplicación cubierta con la propiedad que el grupo $H_0$ de difeomorfismos $\rho$: $R^2 \to R^2$ tales que $\phi \circ \rho = \phi$, está conformado por traslaciones en $R^2$ y es isomorfo a $Z^2$. La demostración clásica de este teorema utiliza herramientas de topología algebraica y de ecuaciones diferenciales parciales sobre espacios de Sobolev. En este artículo demostraremos este teorema en el caso particular de un toro mínimo inmerso en la esfera unidad 3 dimensional, $S^3$, de una manera sencilla e innovadora, más precisamente, estos teoremas serán una consecuencia del estudio del operador de forma en toros mínimos en $S^3$. En lo posible, trataremos que este artículo quede escrito de una manera auto-contenida, con el fin de darle un valor pedagógico y con el fin de inducir al lector en el estudio de toros mínimos en la esfera 3-dimensional. Recordemos que una de las conjeturas más importantes de la Geometría Diferencial Clásica es la conjetura de Lawson, la cual esteblece que el único toro encajado mínimo en $S^3$ es el toro de Clifford.

**Palabras clave:** esferas, toros mínimos, aplicaciones cubiertas.

**Abstract**

Let $(M, g)$ be a torus with a riemannian metric $g$. The Uniformization theorem implies

1 Universidad del Valle. Correo electrónico: oscara@puj.edu.co

2 Central Connecticut State University, New Britain CT, USA. Correo electrónico: perdomoosm@ccsu.edu

3 Universidad Javeriana, Cali, Colombia, Correo electrónico: nazlyes@puj.edu.co

the existence of a covering conformal map $\phi : R^2 \to M$ such that the group $H_\phi$ of diffeomorphisms $\rho : R^2 \to R^2$ such that $\phi \circ \rho = \phi$, is a subgroup of the group of translations in $R^2$ and is isomorph to $Z^2$. The classical proof of his theorem uses tools from algebraic topology and PDE's in Sobolev spaces. In this paper we will give an alternative and easier proof of this theorem in the case that $M$ is a minimal immersed torus in the unit three dimensional sphere, $S^3$. We will achieve this theorem by studying the shape operator of minimal torus on the sphere. One of the main ideas of the this paper is to induce the reader to the study of minimal torus in $S^3$. Recall that one important conjecture in differential geometry is Lawson's conjecture. This conjecture states that the only minimal embedded tori in $S^3$ are the Clifford tori.

## 1. Introducción.

Sea $S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : |x|^2 = 1\}$ la esfera unidad contenida en $R^4$, $M$ una superficie topológicamente un toro y $\xi : M \to S^3$ una immersión. Ya que $M$ es un toro, $M$ es orientable y existe una aplicación diferenciable $\nu : M \to S^3$ con la propiedad de que para todo $m \in M$, $\nu(\xi(m))$ es perpendicular a $\xi(m)$ y a $d\xi_m(T_mM) \subset R^4$. Ya que toda inmersión es localmente un encaje, muchas veces en este artículo, cuando estemos realizando argumentos locales, como cálculo de derivadas covariantes o laplacianos, identificaremos $M$ con $\xi(M)$ y $T_mM$ con $d\xi_m(T_mM) \subset R^4$. Usando esta identificación se tiene que la diferencial de $\nu$, $d\nu_m : T_mM \to d\xi_m(T_mM)$ puede ser vista, ya sea como una aplicación lineal de $d\xi_m(T_mM)$ a $d\xi_m(T_mM)$ o una aplicación lineal de $T_mM$ en $T_mM$. En la anterior afirmación hemos usado el hecho de que $d\nu_m(T_mM)$ no sólo es un subespacio de $R^4$ sino también un subespacio de $d\xi_m(T_mM)$. Al operador de forma en $m$ lo denotaremos como $A_m : T_mM \to T_mM$ y está dado por $A_m(v) = -d\nu_m(v)$. La métrica riemanniana que se considerará en $M$ será la inducida por la métrica estándar en $S^3$ y la inmersión $\xi$. Más precisamente, $g(m)(v,w) =< d\xi_m(v), d\xi_m(w) >$ para todo $m \in M$ y $v, w \in T_mM$. Es bien conocido que el operador $A_m$ es auto-adjunto, es decir $< A_m(v), w > = < v, A_m(w) >$. Nótese que de la misma forma como es natural identificar un vector $v \in T_mM$ con $d\xi_m(v) \in R^4$, es natural denotar a $g(m)(v,w)$ como $< v, w >$; en la ecuación $< A_m(v), w > = < v, A_m(w) >$, estamos utilizando esta identificación. Ya que $A_m$ es auto-adjunto, existen dos reales $\kappa_1(m)$ y $\kappa_2(m)$ y dos vectores unitarios y perpendiculares $V_1(m)$ y $V_2(m)$ en $T_mM$, tales que $A_m(V_1(m)) = \kappa_1(m)V_1(m)$, y $A_m(V_2(m)) = \kappa_2(m)V_2(m)$. Los valores $\kappa_1(m)$ y $\kappa_2(m)$ son llamados curvaturas principales y el promedio de las curvaturas principales es llamado la curvatura media de la inmersión $\xi$ y denotado por $H(m)$. Diremos que la immersión $M$ es mínima si $H(m) = 0$ para todo $m \in M$. En adelante supondremos que nuestra inmersión $\xi : M \to S^3$ es mínima, por lo tanto $\kappa_1(m) = -\kappa_2(m)$, y denotaremos a $a(m) = |\kappa_1(m)|$. Es conocido, véase [L] por ejemplo, que debido a que la característica de Euler de $M$ es cero, entonces la función $a : M \to R$ nunca se anula, esto garantiza la existencia de campos vectoriales $V_1 : M \to R^4$ y $V_2 : M \to R^4$ diferenciables, unitarios y ortogonales los cuales satisfacen que $A(V_1) = aV_1$ y $A(V_2) = -aV_2$. Estos campos vectoriales serán muy importantes en este artículo y haremos referencia a ellos en varias ocasiones. Veamos un ejemplo concreto de una inmersión mínima. Sea

$$T = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \quad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}\right\}$$

Un cálculo directo muestra que $T \subset S^3$, $\nu(x) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4)$ es una aplicación de Gauss, las curvaturas principales son $\kappa_1(x) = 1$ con vector propio asociado $V_1(x) = \sqrt{2}(-x_2, x_1, 0, 0)$ y $\kappa_2(x) = -1$ con vector propio asociado $V_2(x) = \sqrt{2}(0, 0, -x_4, x_3)$. Por lo tanto, tenemos que $T$ es un toro mínimo encajado en $S^3$ y por ende cualquier movimiento rígido de $T$ será también un toro mínimo. Estos toros son conocidos como toros de Clifford y hasta el momento, ellos constituyen los únicos ejemplos conocidos de toros mínimos encajados en $S^3$. La conjetura que establece que los toros de Clifford son los únicos toros mínimos encajados en $S^3$ es conocida como la *conjetura de Lawson*.

Dados dos campos vectoriales $V$ y $W$ en $R^n$, denotaremos por $\bar{\nabla}$ la derivada conexión natural en $R^n$, es decir, si $dV$ denota el diferencial de $V$ y $DV$ denota la matriz jacobiana de $V$ vista como una función de $R^n$ en $R^n$, entonces la siguiente relación se tiene,

$$(\bar{\nabla}_W V)(x) = dV_x(W(x)) = DV(x)W(x),$$

para todo $x \in R^n$. En el caso de que $V, W : M \to R^4$ sean dos campos vectoriales tangentes definidos en $M$, $\nabla_W V$ denotará la conexión de Levi-Civita en $M$. Nótese que ([D, Capítulo 3])

$$\nabla_W V(m) = \{dV(m)(W(m))\}^T \quad \text{para todo } m \in M\,,$$

donde, para cualquier vector $\eta \in R^4$, $\eta^T$ denota la proyección ortogonal del vector $\eta$ en el subespacio dos dimensional $T_mM \subset R^4$.

Este artículo está organizado en 4 secciones. El primer teorema de la sección 2 y toda la sección 4 pueden ser omitidas por el lector experto en el área, pues ellas presentan resultados bien conocidos en geometría diferencial, aunque cabe rescatar que en estas secciones se han introducido pequeñas variaciones a las demostraciones clásicas con el fin de hacerlas más asequibles a una mayor cantidad de lectores.

Antes de continuar, los autores desean agradecer a la Pontificia Universidad Javeriana por su ayuda económica que permitió el desarrollo de este artículo.

## 2. Estudio del operador de forma para superficies en $S^3$.

Consideremos una superficie $M$ como en la introducción. En esta sección utilizaremos las ecuaciones de Codazzi para demostrar ciertas relaciones entre los campos vectoriales construidos a partir de los campos vectoriales $V_1$ y $V_2$ y la función curvatura principal positiva $a : M \to R$ definida en la sección anterior. Estas relaciones nos permitirán definir la aplicación cubierta conforme de $R^2$ en el toro que satisface las condiciones mencionadas en el resumen. Con el fin de hacer la exposición más fácil de seguir para los lectores no especialistas en el área de la geometría diferencial, definiremos el tensor derivada covariante de $A$, $DA$, y luego demostraremos las ecuaciones de Codazzi.

**Definición 2.1.** Si $A$ denota el operador de forma de la superficie $M$ inmersa en $S^3$, se define el tensor derivada covariante de $A$ en el punto $m \in M$ como la aplicación lineal

$$DA_m : T_mM \times T_mM \longrightarrow T_mM$$

que toma dos vectores $v, w \in T_mM$ y los envía al vector,

$$DA_m(v,w) = \nabla_w A(V) - A_m(\nabla_w V)\,,$$

donde $V$ es un campo vectorial definido en una vecindad de $m$ con la propiedad que $V(m) = v$.

Se demuestra que $DA(v,w)$ es independiente del campo vectorial $V$, siempre y cuando $V(m) = v$. A continuación enunciaremos y demostraremos las ecuaciones de Codazzi.

**Teorema 2.1.** *Sea $M \subset S^3 \subset R^4$ una superficie. Entonces $DA_m(v,w) = DA_m(w,v)$.*

*Demostración.* Sean $V$ y $W$ dos campos vectoriales definidos en una vecindad de $m$ tales que $V(m) = v$ y $W(m) = w$. Utilizando la definición de $DA$ y la de tensor de curvatura, obtenemos que

$$\begin{aligned} DA_m(v,w) - DA_m(w,v) = \\ & \nabla_w A(V) - A_m(\nabla_w V) - \nabla_v A(W) + A_m(\nabla_v W) \\ & = \nabla_w A(V) - \nabla_v A(W) - A_m([W,V]) \\ & = -\nabla_w \bar{\nabla}_V \nu + \nabla_v \bar{\nabla}_W \nu + \bar{\nabla}_{[W,V]}\nu \\ & = (\bar{R}(W,V)\nu)^T = 0^T = 0 \end{aligned}$$

donde $\bar{R}$ es el tensor de curvatura en $R^4$. ∎

Usando las ecuaciones de Codazzi podemos encontrar ecuaciones para las derivadas de los campos vectoriales $V_1$ y $V_2$ correspondientes a los vectores propios del operador de forma. Veamos esto,

**Proposición 2.1.** *Sea $M$ una toro mínimo inmerso en $S^3$ y tomemos los campos vectoriales $V_1$, $V_2$ y la función $a : M \to R$ como en la sección 1. Las siguientes ecuaciones son ciertas,*

a. $\bar{\nabla}_{V_1} V_1 = \frac{D_{V_2}(a)}{2a} V_2 + a\nu - m$

b. $\bar{\nabla}_{V_1} V_2 = -\frac{D_{V_2}(a)}{2a} V_1 = \nabla_{V_1} V_2$

c. $\bar{\nabla}_{V_2} V_1 = -\frac{D_{V_1}(a)}{2a} V_2 = \nabla_{V_2} V_1$

d. $\bar{\nabla}_{V_2} V_2 = \frac{D_{V_1}(a)}{2a} V_1 - a\nu - m\,,$

*donde $D_{V_i}(a)$ representa a la derivada de $a$ en la dirección de $V_i$ para $i = 1$ ó $2$.*

*Demostración.* Ya que para todo punto $m \in M$ los vectores $m, \nu(m), V_1(m), V_2(m)$ forman una base para $R^4$, existen reales $a_i$, $b_i$, $c_i$ y $d_i$, $i = 1,2,3,4$, tales que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{V_1} V_1 &= a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 \nu + a_4 m \\ \bar{\nabla}_{V_1} V_2 &= b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 \nu + b_4 m \\ \bar{\nabla}_{V_2} V_1 &= c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 \nu + c_4 m \\ \bar{\nabla}_{V_2} V_2 &= d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 \nu + d_4 m \end{aligned}$$

Al derivar la ecuación $\langle V_1, V_1\rangle = 1$ en la dirección $V_1$, se obtiene que

$$a_1 = \langle \bar{\nabla}_{V_1} V_1, V_1\rangle = \frac{1}{2}\nabla_{V_1}\langle V_1, V_1\rangle = 0\,.$$

Análogamente al derivar la ecuación $\langle V_2, V_2\rangle = 1$ en la dirección $V_2$, obtenemos que $d_2 = 0$. De la misma manera se prueba que $c_1$ y $b_2$ son cero. Ahora, si derivamos la expresión $\langle V_i(m), m\rangle = 0$ en las direcciones $V_1$ y $V_2$, obtenemos que

$$a_4 = -1 \quad b_4 = 0 \quad c_4 = 0 \quad \text{y} \quad d_4 = -1\,.$$

Si utilizamos ahora las ecuaciones $\langle V_i, \nu\rangle = 0$ y las derivamos en las direcciones $V_1$ y $V_2$, obtenemos que

$$a_3 = \langle \bar{\nabla}_{V_1} V_1, \nu\rangle = -\langle V_1, \bar{\nabla}_{V_1}\nu\rangle = \langle V_1, A(V_1)\rangle = a\,.$$

De la misma forma se deduce que

$$d_4 = -a\,.$$

Al derivar la ecuación $\langle V_1, V_2\rangle = 0$ con respecto a $V_1$ y $V_2$ obtenemos que

$$a_2 = -b_1 \quad \text{y} \quad d_1 = -c_2\,.$$

A continuación se usa la ecuación de Codazzi $DA(V_1, V_2) = DA(V_2, V_1)$ para encontrar $b_1$ y $c_2$.

$$\begin{aligned} DA(V_1, V_2) &= \nabla_{V_2} A(V_1) - A(\nabla_{V_2} V_1) \\ &= \nabla_{V_2}(aV_1) - A(c_2 V_2) \\ &= D_{V_2}(a)V_1 + a\nabla_{V_2} V_1 - c_2 A(V_2) \\ &= D_{V_2}(a)V_1 + ac_2V_2 + ac_2V_2 \\ &= D_{V_2}(a)V_1 + 2ac_2V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DA(V_2, V_1) &= \nabla_{V_1} A(V_2) - A(\nabla_{V_1} V_2) \\ &= \nabla_{V_1}(-aV_2) - A(b_1 V_1) \\ &= -D_{V_1}(a)V_2 - a\nabla_{V_1} V_2 - b_1 A(V_1) \\ &= -D_{V_1}(a)V_2 - ab_1V_1 - ab_1V_1 \\ &= -D_{V_1}(a)V_2 - 2ab_1V_1 \end{aligned}$$

Igualando

$$D_{V_2}(a)V_1 + 2ac_2V_2 = -D_{V_1}(a)V_2 - 2ab_1V_1,$$

$$(D_{V_2}(a) + 2ab_1)\, V_1 + (D_{V_1}(a) + 2ac_2)\, V_2 = 0\,,$$

de donde podemos concluir usando la independencia lineal de los vectores $V_1$ y$V_2$ que

$$b_1 = -\frac{D_{V_2}(a)}{2a} \quad \text{y} \quad c_2 = -\frac{D_{V_1}(a)}{2a}\,.$$

Esto concluye la demostración de la proposición. ∎

El siguiente lema establece una fórmula para calcular el laplaciano de una función definida en $M$ en términos de las derivadas con respecto a las direcciones $V_i$.

**Lema 2.1:** *Sean $M$ un toro mínimo inmerso en $S^3$, $V_1 : M \to R^4$, $V_2 : M \to R^4$ y $a : M \to R$ como en la proposición anterior. Si $f : M \to R$ es una función diferenciable, entonces*

$$\begin{aligned} \Delta f =& \nabla_{V_1}\nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2}\nabla_{V_2} f \\ & - \frac{1}{2a}(\nabla_{V_1} a\; \nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2} a\; \nabla_{V_2} f) \\ =& \nabla_{V_1}\nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2}\nabla_{V_2} f - \frac{1}{2a}\langle \nabla a, \nabla f\rangle \end{aligned}$$

*Demostración.* Por definición $\Delta f = \operatorname{div}\nabla f$ donde para todo campo vectorial $X$ en $M$

$$\operatorname{div} X(m) = \langle \nabla_{e_1} X, e_1\rangle + \langle \nabla_{e_2} X, e_2\rangle$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es cualquier base ortonormal de $T_mM$, en particular tenemos que

$$\operatorname{div} X = \langle \nabla_{V_1} X, V_1\rangle + \langle \nabla_{V_2} X, V_2\rangle$$

Ya que $\nabla f = \nabla_{V_1} f\; V_1 + \nabla_{V_2} f\; V_2$, entonces usando la expresión anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \Delta f =& \langle \nabla_{V_1}(\nabla_{V_1} f\; V_1 + \nabla_{V_2} f\; V_2), V_1\rangle \\ & + \langle \nabla_{V_2}(\nabla_{V_1} f\; V_1 + \nabla_{V_2} f\; V_2), V_2\rangle \\ =& \nabla_{V_1}\nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2} f\; \langle \nabla_{V_1} V_2, V_1\rangle \\ & + \nabla_{V_1} f\; \langle \nabla_{V_2} V_1, V_2\rangle + \nabla_{V_2}\nabla_{V_2} f \\ =& \nabla_{V_1}\nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2}\nabla_{V_2} f \\ & - \frac{1}{2a}(\nabla_{V_1} a\; \nabla_{V_1} f + \nabla_{V_2} a\; \nabla_{V_2} f) \end{aligned}$$

Terminaremos esta sección con el siguiente lema cuya demostración utiliza la proposición y el lema anterior.

**Lema 2.2.** *Sean $M$ un toro mínimo inmerso en $S^3$, $V_1 : M \to R^4$, $V_2 : M \to R^4$ y $a : M \to R$ como en la proposición anterior. Las siguientes fórmulas son ciertas,*

$$[a^{-\frac{1}{2}} V_1, a^{-\frac{1}{2}} V_2] = \mathbf{0} \quad y \quad \Delta \ln a = 2 - 2a^2$$

*Demostración.* La primera ecuación se demuestra usando la proposición 2.1, veamos esto,

$$\begin{aligned}[a^{-\frac{1}{2}}V_1, a^{-\frac{1}{2}}V_2] &= a^{-1}[V_1, V_2] + a^{-\frac{1}{2}}D_{V_1}(a^{-\frac{1}{2}})V_2 - a^{-\frac{1}{2}}D_{V_2}(a^{-\frac{1}{2}})V_1 \\ &= a^{-1}\left(\nabla_{V_1}V_2 - \nabla_{V_2}V_1\right) + a^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}D_{V_1}(a)V_2\right] - a^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}D_{V_2}(a)V_1\right] \\ &= a^{-1}\left(-\frac{D_{V_2}(a)}{2a}V_1 + \frac{D_{V_1}(a)}{2a}V_2\right) - \frac{D_{V_1}(a)}{2a^2}V_2 + \frac{D_{V_2}(a)}{2a^2}V_1 = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Para demostrar la segunda ecuación, calculemos primero la curvatura de Gauss $K$ de $M$ en términos de $a$ y sus derivadas,

$$\begin{aligned}K =& \langle R(V_1, V_2)V_1, V_2\rangle = \langle \nabla_{V_2}\nabla_{V_1}V_1 - \nabla_{V_1}\nabla_{V_2}V_1 + \nabla_{[V_1,V_2]}V_1, V_2\rangle \\ =& \langle \nabla_{V_2}\left[\frac{\nabla_{V_2}(a)}{2a}V_2\right] - \nabla_{V_1}\left[-\frac{\nabla_{V_1}(a)}{2a}V_2\right] + \nabla_{(\nabla_{V_1}V_2 - \nabla_{V_2}V_1)}V_1, V_2\rangle \\ =& -\frac{\left[\nabla_{V_2}(a)\right]^2}{2a^2} + \frac{\nabla_{V_2}\nabla_{V_2}(a)}{2a} - \frac{\left[\nabla_{V_1}(a)\right]^2}{2a^2} + \frac{\nabla_{V_1}\nabla_{V_1}(a)}{2a} + \langle \nabla_{\left(-\frac{\nabla_{V_2}(a)}{2a}V_1 + \frac{\nabla_{V_1}(a)}{2a}V_2\right)}V_1, V_2\rangle \\ =& -\frac{\left[\nabla_{V_2}(a)\right]^2}{2a^2} + \frac{\nabla_{V_2}\nabla_{V_2}(a)}{2a} - \frac{\left[\nabla_{V_1}(a)\right]^2}{2a^2} + \frac{\nabla_{V_1}\nabla_{V_1}(a)}{2a} - \left[\frac{\nabla_{V_2}(a)}{2a}\right]^2 - \left[\frac{\nabla_{V_1}(a)}{2a}\right]^2 \\ =& \frac{\nabla_{V_1}\nabla_{V_1}(a)}{2a} + \frac{\nabla_{V_2}\nabla_{V_2}(a)}{2a} - \frac{3}{4a^2}\left[\nabla_{V_1}(a)\right]^2 - \frac{3}{4a^2}\left[\nabla_{V_1}(a)\right]^2 \\ =& \frac{\nabla_{V_1}\nabla_{V_1}(a)}{2a} + \frac{\nabla_{V_2}\nabla_{V_2}(a)}{2a} - \frac{3}{4a^2}|\nabla a|^2\end{aligned}$$

Ahora, ya que $S^3$ tiene curvatura seccional constante igual a 1, la ecuación de Gauss nos dice que $K = 1+\kappa_1\kappa_2 = 1-a^2$. Combinando estas dos expresiones para $K$ obtenemos que,

$$\frac{\nabla_{V_1}\nabla_{V_1}(a)}{2a} + \frac{\nabla_{V_2}\nabla_{V_2}(a)}{2a} - \frac{3}{4a^2}|\nabla a|^2 = 1 - a^2\,.$$

Usando esta última ecuación y el lemma 2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}\Delta \ln a &= D_{V_1}D_{V_1}(lna) + D_{V_2}D_{V_2}(lna) - \frac{1}{2a}\langle \nabla \ln a, \nabla a\rangle \\ &= D_{V_1}(a^{-1}D_{V_1}(a)) + D_{V_2}(a^{-1}D_{V_2}(a)) - \frac{1}{2a}\frac{1}{a}\langle \nabla a, \nabla a\rangle \\ &= -a^{-2}[(D_{V_1}(a))^2 + (D_{V_2}(a))^2] + a^{-1}[D_{V_1}D_{V_1}(a) + D_{V_2}D_{V_2}(a)] - \frac{1}{2a^2}|\nabla a|^2 \\ &= -a^{-2}|\nabla a|^2 + a^{-1}[2a(1-a^2) + \frac{3}{2a}|\nabla a|^2] - \frac{1}{2a^2}|\nabla a|^2 \\ &= 2 - 2a^2\end{aligned}$$

Lo cual termina la demostración. ■

## 3. Una aplicación cubierta para toros mínimos en $S^3$.

En esta sección construiremos una aplicación cubierta de $R^2$ a un toro $M$ inmerso en $S^3$. Antes de continuar, escribamos uno de los lemas más importantes de la demostración. Este lema puede ser encontrado en [B], o para una demostración más elemental, invitamos al lector a leer el apéndice al final de este artículo.

**Lema 3.1:** *Sean $M$ un toro inmerso en $S^3$, $X$ y $Y$ dos campos vectoriales en $M$ y $\theta : M \times R \to M$ y $\eta : M \times R \to M$ los flujos asociados a los campos vectoriales $X$ y $Y$ respectivamente. Si $[X,Y](p) = \mathbf{0}$ para todo $p$ $M$, entonces los flujos conmutan.*

La demostración de este lema está en la sección 4. Ahora enunciemos el resultado más importante de esta sección

**Teorema 3.1.** *Sea $M$ un toro mínimo inmerso en $S^3$, $a : M \to R$ la función curvatura principal positiva, $V_1$ y $V_2$, los campos vectoriales unitarios definidos en la sección 1, $X = a^{-\frac{1}{2}}V_1$ y $Y = a^{-\frac{1}{2}}V_2$ y $\theta : M \times R \to M$ y $\eta : M \times R \to M$ los flujos asociados a los campos vectoriales $X$ y $Y$ respectivamente. Si $p_0$ es un punto fijo en $M$, entonces la aplicación $\phi : R^2 \to M$ dada por*

$$\phi(x,y) = \theta_x(\eta_y(p_0))$$

*es una aplicación cubierta tal que el grupo de difeomorfismos $\rho : R^2 \to R^2$ es un subgrupo, isomorfo a $Z^2$, del grupo de traslaciones.*

*Demostración:* Por la definición de flujo, tenemos que $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = X(\phi(x,y))$ y ya que $[X,Y] = \mathbf{0}$, por el lema 3.1, deducimos que

$$\phi(x,y) = \theta_x(\eta_y(p_0)) = \eta_y(\theta_x(p_0))$$

Por lo tanto, también podemos concluir que $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = Y(\phi(x,y))$. Puesto que los vectores $X(p)$ y $Y(p)$ son linealmente independientes para todo $p \in M$, el teorema de la función inversa implica que $\phi$ es un difeomorfismo local. $\phi(R^2)$ no es vacío porque $\phi(0,0) = p_0 \in M$. Para demostrar que $\phi$ cubre todo $M$ basta demostrar que $\phi(R^2)$ es abierto y cerrado porque $M$ es conexo.

Claramente $\phi(R^2)$ es abierto porque $\phi$ es un difeomorfismo local y porque $R^2$ es abierto. Demostremos ahora que $\phi(R^2)$ es cerrado. Sea $p_1 \notin \phi(R^2)$ y definimos

$$\xi(x,y) = \theta_x(\eta_y(p_1)) = \eta_y(\theta_x(p_1))$$

y demostremos por contradicción que $\xi(R^2)$ está contenido en el complemento de $\phi(R^2)$ lo que termina la demostración porque $\xi(R^2)$ es un abierto que contiene a $p_1$. Supongamos que $\xi(R^2) \cap \phi(R^2) \neq \emptyset$, entonces, existe $q \in M$ tal que $q = \xi(s,t) = \phi(u,v)$, esto es una contradicción porque de ser cierto se tendría que,

$$\phi(u-s, v-t) = \theta_{-s}(\eta_{-t}(\theta_u(\eta_v(p_0)))) = \theta_{-s}(\eta_{-t}(q)) = p_1\,,$$

lo cual es imposible porque estamos suponiendo que $p_1 \notin \phi(R^2)$. Por lo tanto $\phi$ es sobreyectiva. Demostremos que $H_\phi = \left\{\rho : R^2 \to R^2 : \phi \circ \rho = \phi\right\}$ está conformado por traslaciones, es decir, que si $\phi(\rho(x,y)) = \phi(x,y)$ entonces $\rho(x,y)$ es una traslación.

Sea $A = \phi^{-1}(p_0)$. Para cualquier $a = (s,t) \in A$ definamos $\rho_a(x,y) = (x+s, y+t)$. La siguiente igualdad demuestra que $\rho_a \in H_\phi$

$$\phi(\rho_a(x,y)) = \theta_x(\eta_y(\theta_s(\eta_t(p_0)))) = \theta_x(\eta_y(p_0)) = \phi(x,y)\,.$$

Demostremos ahora que cualquier elemento en $H_\phi$ es de la forma $\rho_a$ para algún $a \in A$. Dado $\rho \in H_\phi$, tomemos $h = \rho_a^{-1} \circ \rho$ donde $a = \rho(0,0)$. Nótese que $a \in A$ porque $\phi(\rho(a)) = \phi(a) = p_0$. Ya que $H_\phi$ es un grupo, se tiene que $h \in H_\phi$. Nótese que $h(0,0) = \rho_a^{-1}(\rho(0,0)) = \rho_a^{-1}(a) = (0,0)$. Ya que

$$h(0,0) = (0,0) \quad \text{y} \quad \phi(h(x,y)) = \phi(x,y)\,,$$

entonces podemos deducir del hecho de que $\phi$ es localmente invertible, que $h$ es la aplicación identidad, por lo tanto $\rho = \rho_a$.

El anterior argumento demostró que (i) $H_\phi$ está conformado por traslaciones, (ii) el conjunto $A$ es un conjunto sin puntos límites (ya que $\phi$ es localmente invertible) y (iii) $A$ es un subgrupo del grupo aditivo $R^2$ el cual es isomorfo a $H_\phi$.

Una vez conocido el grupo $H_\phi$, se verifica fácilmente que si $p = \phi(x,y) \in M$, entonces existe un abierto $U$ de $M$ que contiene a $p$ tal que $\phi^{-1}(U)$ es abierto y tal que $\phi$ restringido a cada componente conexa de $\phi^{-1}(U)$ es invertible. Para ver esto basta tomar abiertos $U$ de $M$ y $V$ de $R^2$ tales que $\phi(V) = U$ y tales que $\phi$ restringida a $V$ sea inyectiva. Se verifica que $\cup_{a \in A}\rho_a(V) = \phi^{-1}(U)$, que $\phi_a(V) \cap \phi_b(V) = \emptyset$ si $a \neq b$ y que $\phi$ restringida a cada $\phi_a(V)$ es inyectiva. Esto completa la demostración de que $\phi$ es una aplicación cubierta. Resta demostrar que el grupo $A$ es un grupo isomorfo a $Z^2$. Empecemos notando que $A$ no puede ser el conjunto $\{(0,0)\}$, porque de serlo, tendríamos que $\phi$ sería inyectiva y por lo tanto un difeomorfismo. Esto es imposible porque un toro es compacto y $R^2$ no lo es. Sea $a_1 \neq (0,0)$ un elemento en $A$ con la propiedad de que $|a_1| \leq |a|$ para todo $a \in A$, este $a_1$ existe porque el conjunto $A$ no tiene puntos límites. Ya que $A$ es grupo, tenemos que el conjunto $B = \{na_1 : n \in Z\}$ está contenido en $A$. Demostremos por contradicción que $A \neq B$. Si $A$ fuese igual a $B$, entonces, definiendo la relación de equivalencia $(x,y) \sim (s,t)$ si $(x-s, y-t) \in B$, tendríamos que $C = \frac{R^2}{\sim}$ es topológicamente un cilindro, en particular $C$, con la topología cociente inducida por $R^2$ y por la relación de equivalencia no es compacta, por otro lado, la aplicación

$$\widetilde{\phi}([(x,y)]) = \phi(x,y)$$

está bien definida por la definición de $A$ y claramente define un homeomorfismo entre $C$ y $M$, lo cual es imposible porque $C$ no compacto y $M$ si lo es. Por lo tanto $A \neq B$

y podemos tomar un vector $a_2 \in A \setminus B$, $a_2 \neq (0,0)$ con la propiedad de que $|a_2| \leq |a|$ para todo $a \in A \setminus B$. Definamos

$$D = \{na_1 + ma_2 : n, m \in M\}$$

Claramente, $D \subset A$ porque $A$ es un grupo. Demostremos que $A = D$. Primero, note que por la definición de $a_1$ y $a_2$ tenemos que $\phi$ es inyectiva cuando la restringimos al conjunto

$$E = \{xa_1 + ya_2 : 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1\},$$

ya que si $\phi(c) = \phi(d)$ para algún par de puntos en $E$ tendríamos que al menos uno de los 9 vectores de la forma

$$c - d + na_1 + ma_2 \quad \text{con} \quad n, m \in Z, \ -1 \leq n, m \leq 1,$$

no pertenece a $B$ y tiene norma menor que $|a_2|$, esto es una contradicción porque todos estos 9 vectores son elementos de $A$. El hecho de que $\phi$ sea inyectiva en $E$ garantiza que $A = D$ porque si existiese un vector $e$ en $A \setminus D$, entonces sería posible encontrar enteros $r$ y $s$ tales que $g = e + ra_1 + sa_2$ pertenece a $E$, es diferente de $(0,0)$ y tal que $\phi(g) = p_0 = \phi(0,0)$, lo cual es una contradicción. Esto termina la demostración que $H_\phi$ es isomorfo a $Z^2$ y por lo tanto la demostración del teorema. ∎

**Corolario 3.1.** *Si $M$ es un toro mínimo inmerso en $S^3$ y $g_0$ es la métrica inducida por $S^3$, entonces la métrica $g = ag_0$ es una métrica plana.*

*Demostración.* Basta verificar que si tomamos esta métrica $g = ag_0$ y tomamos los campos vectoriales $X$ y $Y$ y la función $\phi$ como en el teorema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} g(X,X) &= g(a^{-\frac{1}{2}}V_1, a^{-\frac{1}{2}}V_1) \\ &= ag_0(a^{-\frac{1}{2}}V_1, a^{-\frac{1}{2}}V_1) \\ &= aa^{-1}g_0(V_1,V_1) = 1, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente al hecho de que $g(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) = 1$. De la misma manera se verifica que $g(X,Y) = 0$ y que $g(Y,Y) = 1$. Estas igualdades implican que $\phi$ es una isometría local cuando tomamos la métrica $g$ en $M$. Ya que $R^2$ tiene curvatura 0, concluimos que $g$, por ser localmente isométrica a $R^2$, también tiene curvatura 0, es decir, es una métrica plana. ∎

**Observación.** Este corolario confirma la ecuación para el laplaciano de $\ln a$ en el lema 2.2 y la ecuación para que un cambio conforme de la métrica sea una métrica plana. Es conocido que $g = e^{2f}g_0$ es una métrica plana si y solo si (véase [K])

$$\Delta f - K = 0, \tag{1}$$

donde el laplaciano es tomado con respecto a la métrica inicial $g_0$ y $K$ es la curvatura de Gauss del $M$ con respecto a la métrica $g_0$. En nuestro caso $e^{2f} = a$ y por lo tanto $f = \frac{1}{2}\ln(a)$, pero por el lema 2.2, tenemos que

$$\Delta f = 1 - a^2.$$

Nótese que en últimas, mediante el estudio del operador de forma, hemos encontrado una solución explícita a la ecuación (1) en derivadas parciales.

## 4. Apéndice: Demostraciones elementales de algunos lemas.

En esta sección presentamos varios lemas que se emplearon en la demostración del teorema central, el Teorema 3.1, los cuales a pesar de ser conocidos, pues en esencia, estos lemas hacen parte de la demostración del teorema de Frobenius, los presentaremos en este artículo por completés y porque las demostraciones que mostramos tienen unos pequeños cambios que los hacen más fáciles de entender para el lector que sólo tiene un buen dominio de cálculo avanzado. Enunciemos y demostremos estos lemas

**Lema 4.1.** *Sean $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ dos campos vectoriales en $R^2$ y $\widetilde{\theta} : R^2 \times R \to R^2$ y $\widetilde{\eta} : R^2 \times R \to R^2$ los flujos asociados a los campos vectoriales $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ respectivamente. Si $(x_0, y_0)$ es un punto fijo en $R^2$ y $\widetilde{\alpha} : R \to R^2$ es la curva*

$$\widetilde{\alpha}(t) = D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(x_0,y_0)) \cdot \widetilde{Y}(\widetilde{\theta}_t(x_0,y_0))$$

*entonces $\widetilde{\alpha}'(0) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](x_0,y_0)$, donde $D$ es la derivada con respecto a las variables espaciales $x$ y $y$.*

*Demostración.* Sea $p$ un punto en una vecindad de $(x_0,y_0) \in R^2$. Se pretende demostrar que

$$\left[\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p))\right]_{t=0} = -D\widetilde{X}(p).$$

Para ello partamos de $\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p)) = p$; entonces $D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p)) \cdot D\widetilde{\theta}_t(p) = I$ y para $t = 0$, $D\widetilde{\theta}_0(p) = D(p) = I$, lo que implica que $D\widetilde{\theta}_0(\widetilde{\theta}_0(p)) = I$ y además

$$\left[\left(\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p))\right) \cdot D\widetilde{\theta}_t(p) + D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p)) \cdot \frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_t(p)\right]_{t=0} = 0$$

$$\left[\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p))\right]_{t=0} + \left[\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_t(p)\right]_{t=0} = 0$$

$$\left[\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p))\right]_{t=0} = -\left[\frac{d}{dt} D\widetilde{\theta}_t(p)\right]_{t=0} = -D\widetilde{X}(p)$$

Para comprobar la última igualdad, suponga que $\widetilde{\theta}_t(u_1,u_2) = (\widetilde{\theta}_1(t,u_1,u_2), \widetilde{\theta}_2(t,u_1,u_2))$ y $X(u_1,u_2) = (b_1(u_1,u_2), b_2(u_1,u_2))$ entonces

$$D\widetilde{\theta}_t(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial u_2} \\ \\ \dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}(p)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D\widetilde{\theta}_t(p) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}(p) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u_1}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial u_2}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_1}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial u_2}\dfrac{\partial\widetilde{\theta}_2}{\partial t} \end{bmatrix}(p) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial b_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial b_1}{\partial u_2} \\ \\ \dfrac{\partial b_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial b_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}(\widetilde{\theta}_t(p)) \end{aligned}$$

porque $\frac{d}{dt}\widetilde{\theta}_t(p) = X(\widetilde{\theta}_t(p)) = (b_1(\widetilde{\theta}_t(p)), b_2(\widetilde{\theta}_t(p)))$. Así

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}'(0) &= \left[\frac{d}{dt}D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(x_0,y_0))\right]_{t=0}\widetilde{Y}(x_0,y_0) \\ &+ \left[D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(x_0,y_0))\right]_{t=0}\left[\frac{d}{dt}\widetilde{Y}(\widetilde{\theta}_t(x_0,y_0))\right]_{t=0} \\ &= -D\widetilde{X}(x_0,y_0)\widetilde{Y}(x_0,y_0) + D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(x_0,y_0) \\ &= [\widetilde{X},\widetilde{Y}](x_0,y_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lema 4.2.** *Sean $M$ un toro inmerso en $S^3$, $X$ y $Y$ dos campos vectoriales en $M$ y $\theta : M\times R \to M$ y $\eta : M\times R \to M$ los flujos asociados a los campos vectoriales $X$ y $Y$ respectivamente. Si $(x_0,y_0)$ es un punto fijo en $M$ y $\alpha : R\to M$ es la curva $\alpha(t) = d\theta_{-t}(\theta_t(p))\cdot Y(\theta_t(p))$ entonces $\alpha'(0) = [X,Y](p)$.*

**Demostración.** Sea $\varphi : R^2 \to M$ una parametrización de $M$. Se cumple entonces que

$$X(\varphi(u,v)) = \widetilde{a}_1(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + \widetilde{a}_2(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)$$

y

$$Y(\varphi(u,v)) = \widetilde{b}_1(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + \widetilde{b}_2(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v).$$

Si definimos los campos vectoriales $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ en $R^2$ como, $\widetilde{X}(u,v) = \widetilde{a}_1(u,v)e_1 + \widetilde{a}_2(u,v)e_2$ y $\widetilde{Y}(u,v) = \widetilde{b}_1(u,v)e_1 + \widetilde{b}_2(u,v)e_2$ entonces, se verifica fácilmente que

$$d\varphi(\widetilde{X}(r,s)) = X(\varphi(r,s)) \quad \text{y} \quad d\varphi(\widetilde{Y}(r,s)) = Y(\varphi(r,s)).$$

Más aún, si $[\widetilde{X},\widetilde{Y}](u,v) = \widetilde{c}_1(u,v)e_1 + \widetilde{c}_2(u,v)e_2$, usando la definición de "bracket" entre dos campos vectoriales en coordenadas (véase [D]), se tiene que

$$[X,Y](\varphi(u,v)) = \widetilde{c}_1(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + \widetilde{c}_2(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v).$$

Sean $\widetilde{\theta} : R^2\times R \to R^2$ y $\widetilde{\eta} : R^2\times R\to R^2$ los flujos asociados a los campos vectoriales $\widetilde{X}$ y $\widetilde{Y}$ respectivamente, y demostremos que

$$\varphi(\widetilde{\theta}_t(u,v)) = \theta_t(\varphi(u,v)).$$

Nótese que la curva $\gamma(t) = \varphi(\widetilde{\theta}_t(u,v))$ satisface $\gamma(0) = \varphi(u,v)$ y

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= d\varphi\Big(\frac{d\widetilde{\theta}_t(u,v)}{dt}\Big) = d\varphi(\widetilde{X}(\widetilde{\theta}_t(u,v)) \\ &= X(\varphi(\widetilde{\theta}_t(u,v))) = X(\gamma(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\theta_t(\phi(u,v)) = \gamma(t) = \varphi(\widetilde{\theta}_t(u,v))$ lo cual era lo que deseabamos probar. Esta última igualdad la podemos escribir como,

$$\theta_{-t}(w) = \varphi\circ\widetilde{\theta}_{-t}\circ\varphi^{-1}(w).$$

Nótese que si tomamos $p = \varphi(u,v)$, $w = \theta_t(p)$, entonces $w = \varphi(z)$ donde $z = \widetilde{\theta}_t(u,v)$. Más aún, usando la relación que existe entre $Y$ y $\widetilde{Y}$, tenemos que $d\varphi(z)(\widetilde{Y}(z)) = Y(w)$. Terminemos la demostración comprobando que si $\alpha(t) = d\theta_{-t}(\theta_t(p))(Y(\theta_t(p)))$ entonces $\alpha'(0) = [X,Y](p)$. Por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned} d\theta_{-t}(w)(Y(w)) &= d\varphi(u,v)\circ d\widetilde{\theta}_{-t}(z)\circ D\varphi^{-1}(w)(Y(w)) \\ &= d\varphi(u,v)\circ d\widetilde{\theta}_{-t}(z)\circ D\varphi^{-1}(w)(D\varphi(z)(\widetilde{Y}(z))) \\ &= d\varphi(u,v)\circ d\widetilde{\theta}_{-t}(z)(\widetilde{Y}(z)). \end{aligned}$$

La igualdad anterior muestra que si definimos

$$\widetilde{\alpha}(t) = D\widetilde{\theta}_{-t}(\widetilde{\theta}_t(p))\cdot\widetilde{Y}(\widetilde{\theta}_t(u,v))$$

entonces, $\alpha(t) = d\varphi(u,v)(\widetilde{\alpha}(t))$, de donde se deduce, usando el lema anterior, que $\alpha'(0) = d\varphi(u,v)([\widetilde{X},\widetilde{Y}](u,v)) = [X,Y](p)$. $\blacksquare$

**Lema 3.1.** *Sean $M$ un toro inmerso en $S^3$, $X$ y $Y$ dos campos vectoriales en $M$ y $\theta : M\times R\to M$ y $\eta : M\times R \to M$ los flujos asociados a los campos vectoriales $X$ y $Y$ respectivamente. Si $[X,Y](p) = \mathbf{0}$ para todo $p\in M$ entonces los flujos conmutan.*

*Demostración.* Para cada $m\in M$ definamos $\alpha_m(t) = d\theta_{-t}(\theta_t(m))Y(\theta_t(m))$. Por el lemma anterior tenemos que $\alpha_m{}'(0) = [X,Y](m) = \mathbf{0}$.

Sea $\beta(\tau) = \alpha_p(t+\tau)$ luego $\beta'(0) = \alpha'(t)$. Por otro lado tenemos que

$$\beta(\tau) = d\theta_{-t-\tau}(\theta_{t+\tau}(p))Y(\theta_{t+\tau}(p)).$$

Como $\theta_{-t-\tau}(z) = \theta_{-t}(\theta_{-\tau}(z))$, entonces,

$$d\theta_{-t-\tau}(z) = d\theta_{-t}(\theta_{-\tau}(z)) \circ d\theta_{-\tau}(z).$$

Haciendo $z = \theta_{t+\tau}(p)$ se cumple que

$$\beta(\tau) = d\theta_{-t}(\theta_t(p)) \circ d\theta_{-\tau}(\theta_{t+\tau}(p))Y(\theta_{t+\tau}(p))$$

Si definimos $q = \theta_t(p)$, se obtiene que

$$\beta(\tau) = d\theta_{-t}(q)(d\theta_{-\tau}(\theta_\tau(q))Y(\theta_\tau(q))).$$

Por tanto $\beta(\tau) = d\theta_{-t}(q)(\alpha_q(\tau))$. De aquí se obtiene que

$$\frac{d}{d\tau}\beta(\tau) = d\theta_{-t}(q)\frac{d}{d\tau}\alpha_q(\tau) = \mathbf{0}.$$

Como $\alpha_p'(t) = \mathbf{0}$ se cumple que $\alpha_p(t) = \alpha_p(-t) = \alpha_p(0) = Y(p)$ por tanto $d\theta_t(\theta_{-t}(p))Y(\theta_{-t}(p)) = Y(p)$. Si $q = \theta_{-t}(p)$ entonces $p = \theta_t(q)$ y se tiene que $d\theta_t(q)Y(q) = Y(\theta_t(q))$. Sea $F = \theta_t$ entonces se cumple que $dF(q)Y(q) = Y(F(q))$. Sea $\eta_s$ el flujo asociado al campo vectorial $Y$ y consideremos las curvas $\delta(s) = \eta_s(F(q))$ y $\gamma(s) = F(\eta_s(q))$. Ellas cumplen que $\delta(0) = \eta_0(F(q)) = F(q) = p$ y $\gamma(0) = F(\eta_0(q)) = F(q) = p$, por tanto $\delta(0) = \gamma(0)$. Además se tiene que

$$\delta'(s) = Y(\delta(s))$$

y

$$\gamma'(s) = dF(\eta_s(q))Y(\eta_s(q)) = Y(F(\eta_s(q))) = Y(\gamma(s)).$$

Por el teorema de existencia y unicidad se tiene que $\delta(s) = \gamma(s)$, lo que implica que $\eta_s(F(q)) = F(\eta_s(q))$, es decir que $\eta_s(\theta_t(q)) = \theta_t(\eta_s(q))$; por tanto los flujos conmutan. ■

## Bibliografía


[B] **Boothby, W. M.** *An introduction to differentable manifolds and riemannian geometry.* Second Edition. Academic Press, Inc. (1990).

[D] **Do Carmo, Manfredo.** *Riemannian Geometry.* Second Edition. Birkhäuser,Boston. (1992).

[K] **Kazdan, J. L. & Warner, F.** *Scalar curvature and conformal deformations of riemannian structure.* J. Diff. Geometry. **10** (1975), 113–134.

[L] **Lawson, H. B.** *Complete minimal surfaces in $S^3$*, Ann. Math. (2) **92** (1970) pp. 335–374.


Recibido el 26 de marzo de 2007

Aceptado para su publicación el 30 de mayo de 2008