

MÉTODO HÍBRIDO DE FRONTERAS NO REFLECTIVAS EN LÍMITES DE MODELOS SÍSMICOS

por

Alfredo Ghisays Ruiz*, Carlos Alberto Vargas J*. & Luis Alfredo Montes Vides*

Resumen

Ghisays Ruiz, A. C.A. Vargas & L.A. Montes: Método híbrido de fronteras no reflectivas en límites de modelos sísmicos. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **30** (115): 209-214. 2006. ISSN 0370-3908.

Para modelar la propagación de ondas en un medio se usan fronteras artificiales intentando eliminar las reflexiones en los límites del dominio computacional finito. Distintas aproximaciones han logrado atenuar parcialmente estas señales no deseadas. La implantación de fronteras perfectamente acopladas (PML) elimina estas reflexiones en un medio continuo. El uso de métodos finitos o elementos finitos requiere un modelo discreto espacialmente; esto da lugar a remanentes de tales reflexiones. Una disminución en el tamaño de la grilla redonda en la atenuación de las reflexiones pero incrementa el consumo de recursos computacionales. En este trabajo se muestran los resultados cuando se introduce una función de atenuación a la solución por PML en la zona de absorción, logrando una atenuación satisfactoria sin incrementar apreciablemente el uso de recursos de mecánicas. Las simulaciones se hicieron usando diferencias finitas, tanto en modelos simples de capas planas con buzamiento, como en modelos con una mayor complejidad estructural.

Palabras clave: Fronteras no reflectoras, Elementos Finitos, Diferencias finitas, Capas Perfectamente Acopladas, Modelamiento.

Abstract

To simulate wave propagation in a medium, artificial borders are introduced trying to eliminate reflections originated in limits of finite computational domain. Different approaches have attenuated partially these unwanted signals. The perfectly matched layers (PML) implementation eliminates these reflections in a continuous medium. The finite differences and finite elements methods require a discretized medium giving place to residual reflections. Diminishing the grid size improves

* Universidad Nacional de Colombia-Bogotá. Departamento de Geociencias. Grupo de Geofísica. Edificio Manuel Ancizar, Oficina 326. Ciudad Universitaria. Apartado 14490. Bogotá. PBX 3165000 Ext. 16539 correos electrónicos: lamontesv@unal.edu.co; cavargasj@unal.edu.co; AGhisays@helvetia.edu.co

attenuation but increases the computational resources demand. This paper shows results furnished by including an attenuation function to PML solution in the damped zone, obtaining a noticeable attenuation without increasing appreciably the use of machine resources. Simulations were done using finite differences using plane dipping layers models and complex geological structure models.

Key words: Non reflective borders, Finite elements, Finite differences, Perfectly matched layers, Modeling

Introducción

Al simular numéricamente la propagación de ondas en un medio se hace necesario limitar el tamaño del modelo para optimizar los recursos de computación. Esta imposición de fronteras artificiales introduce reflexiones espurias que contaminan los sismogramas, dificultan la comprensión de los fenómenos por estudiar. La solución más sencilla es utilizar un modelo mucho mayor al área estudiada para que las reflexiones de los bordes no alcancen la zona de interés en el tiempo de simulación, desperdiciando de este modo recursos de computación. Desarrollar por tanto una condición de frontera absorbente efectiva y estable de bajo costo computacional es una tarea importante en modelado numérico. El método implementado más común en los programas de simulación de ondas es la aproximación paraxial de la ecuación de onda de **Clayton & Engquist** (1977), que atenúa completamente las reflexiones por ondas que inciden normalmente en la frontera, disminuyendo su efectividad al aumentar el ángulo de incidencia. Otro enfoque es adicionar un filtro espacial mediante una zona de atenuación alrededor del modelo (**Cerjan et al.**, 1985; **Sarma et al.**, 1998); sin embargo, los resultados suministrados por estos métodos no han sido satisfactorios. El método PML (Perfectly Matched Layers) basado en zona de atenuación con capas perfectamente acopladas demostró ser altamente efectivo para absorber ondas electromagnéticas en medios bidimensionales (**Berenger**, 1994) y tridimensionales (**Berenger**, 1996). Su similitud con el sistema de ecuaciones de ondas elásticas lo llevó al modelado elastodinámico (**Chew & Liu**, 1996); desde entonces ha mostrando su efectividad como condición a fronteras no reflectoras siendo ampliamente utilizado en diferencias finitas y elementos finitos (**Chew & Weedon**, 1994; **Liu** 1997) e implantado en diversas aplicaciones (**Zeng & Liu.**, 2001; **Basu & Chopra**, 2003). El método requiere de un número finito de celdas en la zona de atenuación que incrementa su efectividad en la medida en que disminuye el tamaño de la celda a costa de mayor consumo de recursos computacionales (**Festa & Nielsen**, 2003). En desarrollo de un proyecto de modelado de propagación de ondas en áreas de piedemonte

colombiano se observó la presencia de estas reflexiones fantasmas en los registro sintéticos (**Montes et al.**, 2003; **Malaver & Montes**, 2005). Se realizó un estudio para establecer una técnica de eliminación de tales reflexiones y se estudiaron varias técnicas llegando finalmente a la inclusión de una función de atenuación en la solución PML en la zona de absorción. Se obtuvieron sismogramas sin reflexiones apreciables en los bordes de los modelos sísmicos, que indican que este enfoque mixto de condiciones de atenuación es apropiado. Se realizaron diferentes ensayos utilizando para la zona de atenuación tamaños de celda que satisfacían las condiciones de Courant. Las simulaciones que utilizan programas desarrollados en diferencias finitas, desde modelos simples de capas planas hasta modelos con una complejidad estructural considerable, suministraron registros libres de reflexiones espurias. La adición de la función de atenuación en las simulaciones PML no registró incrementos apreciables de recursos de computación.

Método de Capas Perfectamente Acopladas

El fundamento del método PML es introducir una capa absorbente de grosor finito alrededor del modelo, que minimice las reflexiones espurias. Dado su aplicabilidad en distintos campos, se presenta una generalización del método para su mejor comprensión. Se denomina dominio computacional el área correspondiente al modelo y PML a la zona amortiguada. Sea v un campo vectorial con condición inicial v_0 que se propaga en dirección x sujeto a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A \frac{\partial v}{\partial y} - B \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [1]$$

El principio básico es acoplar la ecuación 1 en el dominio computacional con otra en la zona de atenuación tal que no halle reflexiones en la interfase que separa los dominios, con un decaimiento de la onda en la zona PML. Si el campo vectorial $v=v^{\parallel}+v^{\perp}$ se separa en sus componentes perpendicular (v^{\perp}) y paralela (v^{\parallel}) a la interfase, la ecuación 1 se descompone en el sistema de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^\perp}{\partial t} - A \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v^\parallel}{\partial t} - B \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad [2]$$

Sea una función $d(x)$ nula en el dominio computacional y positiva en la zona PML, la cual lleva a cabo la atenuación en la zona PML. Similar a v se define ahora una nueva función $\hat{u} = u^\perp + u^\parallel$ con condición inicial que es solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^\perp}{\partial t} + d(x)u^\perp - A \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u^\parallel}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad [3]$$

La solución armónica del sistema 1 con frecuencia angular satisface la ecuación:

$$i\omega\hat{v} - A \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - B \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0 \quad [4]$$

De igual forma para el sistema acoplado de ecuaciones [3] se tiene y

$$\begin{aligned}[i\omega + d(x)]\hat{u}^\perp - A \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} &= 0 \\ i\omega\hat{u}^\parallel - B \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad [5]$$

EL sistema de ecuaciones [5] es equivalente a

$$\begin{aligned}i\omega\hat{u}^\perp - \frac{i\omega}{i\omega + d(x)} A \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} &= 0 \\ i\omega\hat{u}^\parallel - B \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad [6]$$

De la expresión [6] y de su comparación con el sistema [1] se deduce que la introducción de capas PML consiste en realizar la sustitución

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d(x)} \frac{\partial}{\partial x} \quad [7]$$

La expresión [6] representa un cambio a variable compleja por

$$\tilde{x} = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d(s) ds$$

Se busca una solución al sistema de ecuaciones [3] mediante ondas planas $u = u^\parallel + u^\perp$

$$\begin{aligned}u^\parallel &= a^\parallel \exp[-i(k_x \tilde{x}(x) + k_y y - \omega t)], \\ u^\perp &= a^\perp \exp[-i(k_x \tilde{x}(x) + k_y y - \omega t)]\end{aligned}$$

La onda plana

$$u = v_o \exp[-i(k_x x + k_y y - \omega t)] \exp[-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d(s) ds]$$

con inicial v_o será solución del sistema [3] y representa la solución en el dominio computacional sin reflexión en la interfase con un factor de amortiguamiento

$\alpha_d = \exp[-\frac{k_x}{\omega} \int_0^x d(s) ds]$ en la zona PML en dirección x . Un estudio más detallado sobre la aplicación del método PML en distintos fenómenos elastodinámicos se puede consultar en **Chew & Liu** (1996).

Función de atenuación

Es un método extremadamente simple y capaz de amortiguar la amplitud de una onda en una zona de atenuación alrededor del modelo donde se quiere simular un fenómeno sísmico. De acuerdo con **Cêrjan et al.**, (1985), en la simulación por diferencias finitas se aplica una función de peso a las secciones que representan el estado del fenómeno en el tiempo actual y en el previo, en todos los puntos que se encuentran dentro de la zona de amortiguamiento.

La función tiene la forma $\alpha_d(i) = \exp[-0.015(Z - i)^2]$ donde Z es el número de nodos en la zona amortiguada en dirección del eje cartesiano e i indica i-nodo dentro de la misma en esa dirección.

Metodología

Durante la realización del proyecto en zonas de piedemonte colombiano se implementaron algoritmos en elementos finitos (**Montes et al.**, 2003) y en diferencias finitas (**Malaver & Montes**, 2005) con condiciones de fronteras no reflectivas (**Clayton & Engquist**, 1977; **Cêrjan et al.**, 1985) así como zona de atenuación (**Sarma et al.**, 1998) con resultados desalentadores en la eliminación de las reflexiones espurias, particularmente cuando las trayectorias de las ondas incidentes se alejaba de la

perpendicular a la frontera. Una implementación posterior de fronteras absorbentes con capas perfectamente acopladas en diferencias finitas arrojó mejores resultados; sin embargo la presencia de reflexiones parásitas llevó a un método híbrido de PML con una función de atenuación. En este artículo se consideran dos algoritmos para simular la propagación de la onda acústica, el primero con capas perfectamente acopladas - PML y el segundo incluyendo en la zona amortiguada una función de atenuación, un método híbrido que denominaremos PMLF. Para observar su respuesta, los algoritmos fueron ensayados en diferentes modelos. De estas pruebas se presentan los sismogramas correspondientes al modelo más simple y al más complejo. Los modelos representan medios estratificados con capas homogéneas separadas por interfaces arbitrariamente incurvadas, incluyendo superficie libre y grandes contrastes de velocidad. Para la simulación se generan modelos divididos en celdas cuadradas cuyas dimensiones están relacionadas con las velocidades en cada capa, bajo la restricción de que satisfagan las condiciones de Courant.

Análisis y resultados

El primero es un modelo simple, que consta de tres capas con buzamiento diferentes (Figura 1), con velocidades de 1500 m/s para la primera, de 2000 m/s para la

intermedia y de 2500 m/s para la más profunda. La fuente, una ondícula de Ricker de 60 Hz, se ubicó en un punto en el centro del modelo a una profundidad de 50m, mientras que los receptores fueron colocados sobre la interfase superior con intervalo de grupo de 5m, con intervalo de muestreo de 0.0005s y tiempo de registro de 1s. En la Figura 2 se muestra el sismograma obtenido para el modelo simple con PML en la zona de atenuación. En él se observa una continuidad débil del reflector más profundo, con reflexiones parásitas de la onda directa al alcanzar las fronteras laterales a 2 s aproximadamente, así como la presencia de ruido por debajo del segundo reflector que opacan la calidad de la imagen. A su vez, la Figura 3, que contiene el sismograma generado para el mismo modelo simple pero con PMLF, muestra una indudable mejoría en la continuidad de estos reflectores, sin la presencia de las reflexiones, ni el ruido manifiesto en el sismograma anterior.

En la Figura 4 se observa el segundo modelo, considerado más complejo, compuesto por tres capas separadas por dos interfases sinusoidales con un campo de velocidad para la primera de 900m/s, la segunda de 1500m/s y la tercera con 2500m/s. Se generó el correspondiente sismograma con PML que se observa en la Figura 5. En él

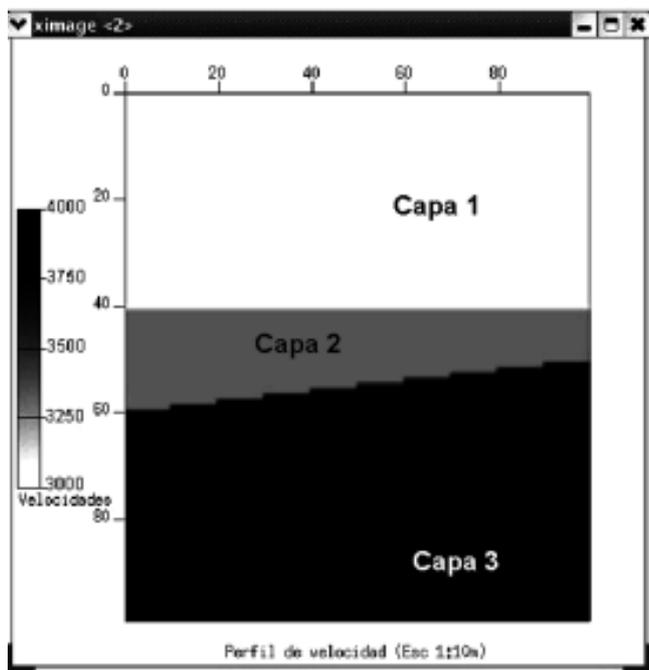


Figura 1. Modelo simple con capas con diferentes buzamientos.

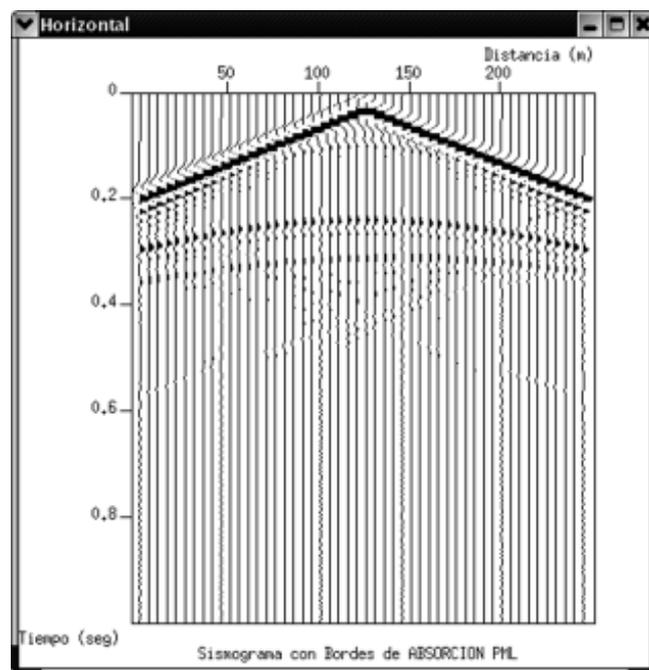


Figura 2. Sismograma obtenido de la simulación en el modelo de la figura 1, con fronteras PML, en la que se observan reflexiones que atraviesan la imagen.

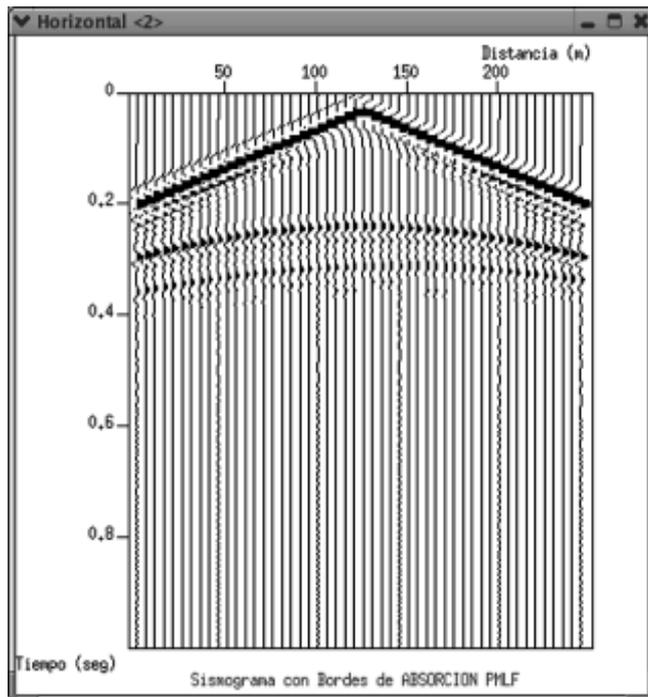


Figura 3. Sismograma logrado después de aplicar PMLF en fronteras. Las reflexiones de bordes en la figura 2 han desaparecido.

son evidentes las reflexiones de bordes, tanto de las ondas directas como de las provenientes de las interfases, donde la falta de continuidad de estos eventos dificulta la identificación de las distintas señales asociadas con los reflectores. La aplicación del PMLF sobre el modelo complejo mejora el contenido de la información, en el registro como se observa de la Figura 6. Las reflexiones visibles en la Figura 5 se han desvanecido por completo en el nuevo sismograma, donde ahora se aprecia mejor continuidad de los reflectores y facilita la identificación de las distintas señales provenientes de cada reflector. La diferencia en consumo de recursos de procesamiento para la obtención de las imágenes por ambos algoritmos es prácticamente indistinguible.

Conclusiones

Los resultados obtenidos indican que aunque el método PML permite obtener sismogramas sintéticos con una apreciable atenuación de las reflexiones de bordes, estos registros manifiestan la presencia de reflexiones parásitas que disminuyen la calidad de la información haciendo más difícil la interpretación de las imágenes producto de simulaciones de fenómenos ondulatorios. La técnica de uso aislado de una función de atenuación en una zona de

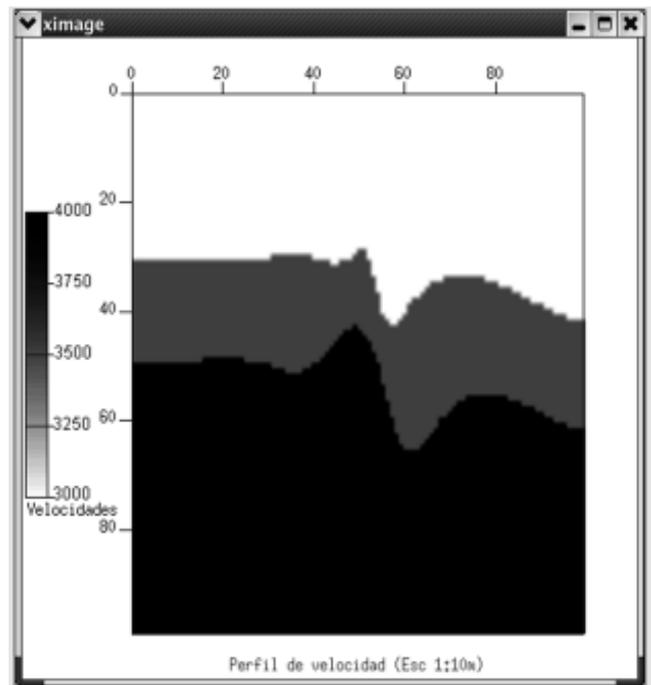


Figura 4. Segundo modelo mostrando una complejidad mayor al primero.

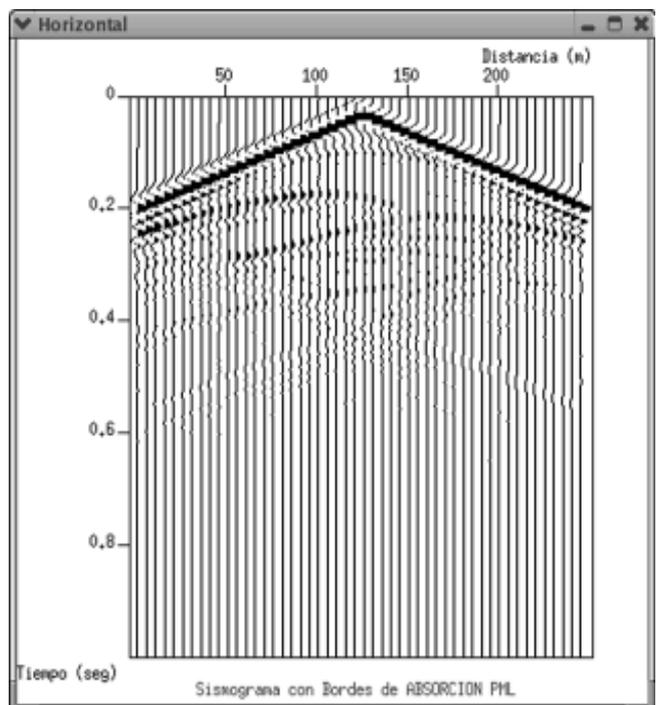


Figura 5. Sismograma sintético obtenido de la simulación en modelo en figura 4, con fronteras con PML. Nuevamente se observan reflexiones de bordes que atraviesan la imagen.

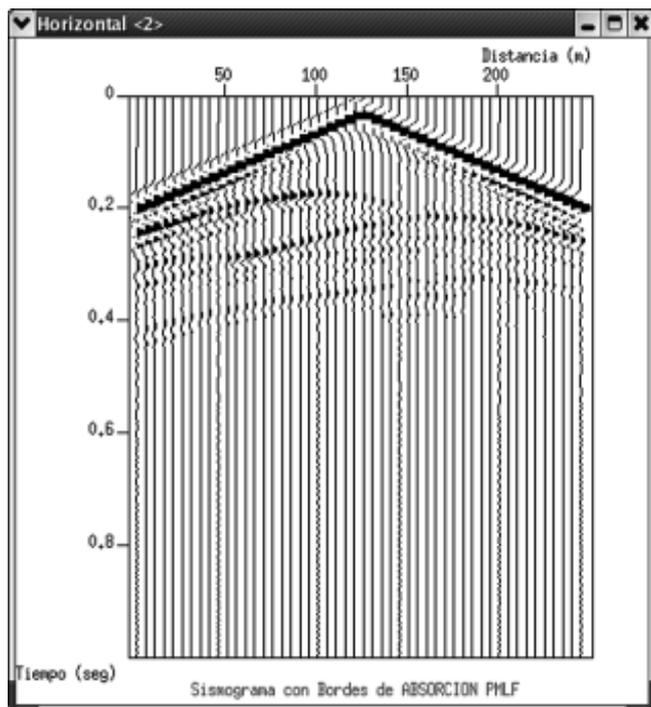


Figura 6. Como resultado de aplicar PMLF en los bordes del modelo de la figura 4, se han atenuado por completo las reflexiones de bordes.

absorción, como se sabe, tampoco suministra resultados alentadores. Sin embargo la aplicación conjunta de estos dos enfoques permite obtener sismogramas con una evidente atenuación de reflexiones no deseadas en simulación, con un costo computacional similar al de los métodos usados por separado. El método PMLF mostró ser efectivo y capaz de lograr eliminar las reflexiones en los límites de modelos sísmicos, permitiendo “aclarar” los reflectores más profundos. La aplicación de la técnica a datos sintéticos muestra que las reflexiones producidas por los bordes del modelo desaparecen, realizando la información de interés.

Bibliografía

- Basu U. & Chopra A.** 2003. Perfectly matched layers for elastic waves and applications to earthquakes analysis of dams. 16th ASCE Engineering Mechanics conference. University of Washington, Seattle.
- Berenger, J. P.** 1994. A Perfectly Matched Layers for the absorption of Electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.* **114**: 185-200
- 1996. Three-dimensional perfectly matched layers for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.* **127**: 363-379.
- Cърjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., & Reshef, M.** 1985. A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equations. *Geophysics.* **50**: 705-708.
- Chew W. & Liu Q.** 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition, *J. Comp. Acoust.* **4**: 341-359.
- & **Weedon W.H.** 1994. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microw. Opt. Technol. Lett.* **7**: 599-604.
- Clayton R. & Engquist B.** 1977. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equation. *Bull. Seism. Soc. Am.* **67**: 1592-1450.
- Festa G. & Nielsen S.** 2003. PML absorbing boundaries. *Bull. Seism. Soc. Am.* **93**: 891-903.
- Liu Q. H.** 1997. An FDTD algorithm with perfectly matched layers for conductive media: *Opt. Technol. Lett.* **14**: 134-137.
- Malaver L. & Montes L.** 2005. Elastic approach to remove surficial waves from shot gathers, *Earth. Sci. Res. J.* **9** (1): 12-22.
- Montes L., Quintana R., Céspedes R., Espíndola N., Salinas T. & Pérez G.** 2003. Attenuation of the seismic dispersion associated to foothills topography, *CT&F*, **2** (4): 7-12.
- Sarma G., Mallik K. & Gadhinglajkar V.** 1998. Non reflective boundary condition in finite-element formulation for an elastic wave equation. *Geophysics*, **63** (3): 1006-1016.
- Zeng Y. J. & Liu Q.** 2001. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics* **66**: 1258-1266.

Recibido el 5 de febrero de 2006.

Aceptado para su publicación el 10 de abril de 2006.