VIEJOS Y NUEVOS RESULTADOS SOBRE INTEGRALES SINGULARES E HIPERSINGULARES

por

J. Horváth[1]

Resumen

Horváth J.: Viejos y nuevos resultados sobre integrales singulares e hipersingulares. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **29** (113): 547-569, 2005. ISSN 0370-3908.

Exposición de algunos trabajos del autor sobre integrales singulares e hipersingulares, publicados entre 1953 y 1987, completada con resultados nuevos, observaciones sobre contribuciones de otros matemáticos, simplificaciones y algunas correcciones.

Palabras clave: Operadores integrales singulares, transformada de Hilbert, distribuciones, convolución de distribuciones.

Abstract

Exposition of some works of the author on singular and hypersingular integrals, published between 1953 and 1987, complemented with new results, and remarks on contributions by other mathematicians, simplifications, and some amendments.

Key words: Singular integral operators, Hilbert transforms, distributions, convolution of distributions.

1 University of Maryland, Department of Mathematics, College Park, MD, 20742-4015, USA. Correo electrónico: jhorvath@wam.umd.edu.
AMS Classification 2000: 46F12, 46F10, 44A15, 44A35, 47G10, 42B20.

1.

Mi intención es dar en estas páginas un resumen de algunos de mis trabajos sobre integrales singulares e hipersingulares, publicados entre 1953 y 1987, completándolo con algunos resultados nuevos, observaciones sobre las contribuciones de mis colaboradores y de otros matemáticos, simplificaciones de varias demostraciones y correcciones de errores.

Si bien me acuerdo, fue alrededor de 1948 que **Jean Leray** me habló de **Georges Giraud** y de sus trabajos sobre ecuaciones integrales con valores principales. Me dijo que valdría la pena estudiar estos trabajos porque había mucho que hacer. Yo no seguí inmediatamente este consejo y fue sólo en 1955 que me interesé por las investigaciones de **Giraud**, de manera que hablaré de él más abajo en la sección 11.

Marcel Riesz fue quien me dió el impulso para ocuparme con integrales singulares. El estuvo en París en el verano de 1949 y una segunda vez al principio de 1951. Ya con ocasión de su primera visita mencionó que tenía una idea de cómo se podría generalizar la transformada de Hilbert a varias variables, y el 12 de febrero de 1951, durante un almuerzo me explicó de que se trataba.

Antes de contar lo que **Marcel Riesz** me dijo durante aquel almuerzo, tengo que recordar los conceptos de función conjugada y transformada de Hilbert. Sea f una función integrable en el sentido de Lebesgue en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (o bien una función localmente integrable, periódica sobre la recta $\mathbf{R}$, con período 2π). Su serie de Fourier

$$S(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

con coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt,$$

determina completamente (es decir en casi todos los puntos) la función f, aunque no es necesariamente convergente (maximalidad del sistema trigonométrico). Consideremos ahora la serie de potencias

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta),$$

donde $z = re^{i\theta}$. Si ponemos $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, obtenemos

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(\alpha_k \cos k\theta - \beta_k \sin k\theta) + i\sum_{k=0}^{\infty} r^k(\beta_k \cos k\theta + \alpha_k \sin k\theta).$$

Por lo tanto, se define la serie conjugada de $S(\theta)$ por

$$\tilde{S}(\theta) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta).$$

Cuando esta serie converge, su suma se llama la *función conjugada* $\tilde{f}$ de f. Si por ejemplo $f \in L^2$, entonces $\sum |a_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$ y por consiguiente $\tilde{S}$ converge hacia la función $\tilde{f} \in L^2$. Se tiene

$$-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin k(\theta - t)dt,$$

y se comprueba utilizando la parte imaginaria de la progresión geométrica $\sum_1^n e^{ikt}$ que

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Esta expresión se simplifica si restamos la mitad del último término de la suma:

$$\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\sin nt = \frac{1 - \cos nt}{2\tan\frac{t}{2}}.$$

Así la $n-$ésima suma parcial modificada de $\tilde{S}$ es

$$\tilde{S}_n^*(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1 - \cos n(\theta - t)}{\tan\frac{\theta - t}{2}}dt,$$

y la función conjugada, si existe, está dada por el valor principal de Cauchy:

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{\epsilon \to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{|t-\theta|\geq\epsilon} f(t)\frac{dt}{\tan\frac{\theta - t}{2}}. \tag{1}$$

2.

Otro camino para llegar a la expresión (1) de la función conjugada es la *sumación de Abel* de la serie de Fourier. Para esto es preferible servirse de la forma compleja de la serie y escribir

$$S(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt,$$

es decir $a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$, o sea $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ para $k \geq 0$ y $c_{-k} = \bar{c}_k$. Poniendo $z = re^{i\theta}$, la serie

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

converge para $r < 1$, ya que por el lema de Riemann los coeficientes c_k tienden a cero, además u es una función armónica en $|z| < 1$. La fórmula para la suma de la serie geométrica da

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} = \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}},$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt$$
$$= \Re\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

Reemplazando el valor de c_k en la serie que define $u(re^{i\theta})$ se tiene

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\theta - t)}dt,$$

desde luego obtenemos para la *suma de Abel* de la serie $S(\theta)$ la expresión

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}dt.$$

La expresión a la derecha es la *integral de Poisson* de la función f.

Ahora bien,

$$\Im\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} = \frac{2r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2},$$

y por lo tanto la función armónica conjugada de $u(z)$ es

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{r\sin(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}dt,$$

donde a la derecha tenemos la *integral conjugada de Poisson* de f. Observemos que cuando $r \to 1$, la integral $v(re^{i\theta})$ tiende formalmente a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(\theta - t)}{1 - \cos(\theta - t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{dt}{\tan\dfrac{\theta - t}{2}},$$

es decir a la integral cuyo valor principal define $\tilde{f}(\theta)$ en (1), ya que

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)} = \frac{1}{\tan(t/2)}.$$

3.

Sería fácil demostrar ahora el teorema de **A. Plessner** [67] según cual si $f \in L^2$, entonces $\tilde{f}$ existe, pertenece a L^2 y se tiene $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$. Sin embargo prefiero hacer esto en el caso análogo, casi idéntico, en que f es una función definida sobre la recta $\mathbf{R}$ en vez del "toro" porque las fórmulas son más sencillas. Sea pues f una función medible sobre $\mathbf{R}$ tal que $(1 + |x|^2)^{-1}f$ es integrable. Su *integral de Poisson*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{y}{(x - t)^2 + y^2}dt$$

resuelve el problema de Dirichlet para el semiplano superior, es decir $u(x, y)$ es armónico para $x \in \mathbf{R}, y > 0$ y el límite de $u(x, y)$ es $f(x)$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$ cuando $y \to 0+$, como lo veremos más abajo. La función $u(x, y)$ es la convolución con respecto a la variable x de la función f y del *núcleo* de Poisson $P_y(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Ahora bien para $z = x + iy \in \mathbf{C}$ se tiene

$$\frac{i}{\pi z} = \frac{i}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{i}{\pi}\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{i}{\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Por consiguiente el *núcleo conjugado* de Poisson se define como $Q_y(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{x}{x^2 + y^2}$, y la integral conjugada de Poisson de f es

$$v(x, y) = Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{x - t}{(x - t)^2 + y^2}dt,$$

la cual tiende cuando $y \to 0+$ hacia la integral (en general divergente)

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{dt}{x - t}.$$

La *función conjugada* (o *transformada de Hilbert*) de f sé define por el valor principal

$$\tilde{f}(x) = (\mathcal{H}f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{|t - x| > \varepsilon} f(t)\frac{dt}{x - t}.$$

Marcel Riesz me explicó una vez que esta transformación lleva el nombre de **Hilbert** por la razón de que él consideró en su curso sobre ecuaciones integrales el análogo discreto: sea $a = (a_k) \in l^2$, es decir $\|a\|_2^2 = \sum |a_k|^2 < \infty$, y pongamos $b_j = \sum_k \dfrac{a_k}{j + k}$. **Hilbert** demostró que $b = (b_j) \in l^2$ y se tiene $\|b\|_2 \leq \pi\|a\|_2$ ([20, pág. 226]). Quiero demostrar el análogo del teorema de Plessner:

Teorema. *Si $f \in L^2(\mathbf{R})$ entonces $\tilde{f}$ existe en casi todas partes, pertenece a $L^2(\mathbf{R})$ y $\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$.*

Reproduciré la demostración que se encuentra en el libro de **Titchmarsh** ([96], 5.3, Theorem 91, pág. 122), la cual utilicé para generalizar el teorema a varias variables. Desgraciadamente la referencia a **Titchmarsh** se omitió accidentalmente en [28].

Lema 1. *Sea f una función medible sobre $\mathbf{R}$ tal que $(1+|x|^2)^{-1}f(x)$ es integrable. Entonces para casi todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene $u(x,y) = P_y * f(x) \to f(x)$ cuando $y \to 0+$.*

Demostración. Observemos ante todo que según un teorema de Lebesgue ([106, II.(11.1), pág. 65]) para casi todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene

$$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{y}\int_{|x-t|\le y} |f(x)-f(t)|dt = 0. \tag{2}$$

Ya que

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{\pi}\arctan s\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1\,,$$

podemos escribir

$$f(x) - u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

Partimos la integral en tres: I_1, I_2, I_3 correspondientes a los conjuntos de integración $|x-t|\le y$, $y<|x-t|\le 1$, $|x-t|>1$ y suponemos que para x se cumple la condición (2) de Lebesgue.

Se tiene

$$|I_1| \le \frac{1}{\pi y}\int_{|x-t|\le y}|f(x)-f(t)|dt,$$

y esta expresión en virtud de (2) tiende a cero cuando $y \to 0+$.

Para tratar I_2 introduzcamos la función

$$\varphi(\rho) = \varphi(\rho;x) = \int_{|x-t|\le\rho}|f(x)-f(t)|dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|\frac{y}{\pi}\int_{y<|x-t|\le 1}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt\right| \\ &\le \frac{y}{\pi}\int_{y<|x-t|\le 1}\frac{|f(x)-f(t)|}{(x-t)^2}dt = \frac{y}{\pi}\int_y^1\frac{1}{\rho^2}d\varphi(\rho) \\ &= \frac{y}{\pi}\left(\left[\frac{\varphi(\rho)}{\rho^2}\right]_y^1 + 2\int_y^1\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho\right).\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{y}{\pi}\left(\varphi(1)-\frac{\varphi(y)}{y^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(y\varphi(1)-\frac{\varphi(y)}{y}\right)\to 0$$

cuando $y\to 0+$. Por otra parte

$$y\int_y^1\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho = y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho + y\int_{\sqrt{y}}^1\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho.$$

Puesto que $\dfrac{\varphi(\rho)}{\rho}\le\varepsilon$ si ρ es suficientemente pequeño, se tiene

$$\begin{aligned}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho &\le \varepsilon y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{d\rho}{\rho^2} = \varepsilon y\left[-\frac{1}{\rho}\right]_y^{\sqrt{y}} \\ &= \varepsilon(1-\sqrt{y})\le\varepsilon.\end{aligned}$$

Sea $\dfrac{\varphi(\rho)}{\rho}\le M$. Entonces

$$\begin{aligned}y\int_{\sqrt{y}}^1\frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}d\rho &\le My\int_{\sqrt{y}}^1\frac{d\rho}{\rho^2} \\ &= My\left[-\frac{1}{\rho}\right]_{\sqrt{y}}^1 = M(\sqrt{y}-y)\to 0\,.\end{aligned}$$

Luego $I_2\to 0$ cuando $y\to 0+$. Finalmente

$$|I_3|\le\frac{y}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{|f(x)-f(t)|}{(x-t)^2}dt\to 0$$

cuando $y\to 0+$, con lo cual el lema queda demostrado.

Lema 2 ([96, Theorem 92, pág. 124]). *Sea f una función medible sobre $\mathbf{R}$ tal que $(1+|x|^2)^{-1}f(x)$ sea integrable. Entonces para casi todo $x\in\mathbf{R}$ se tiene*

$$v(x,y) - \frac{1}{\pi}\int_{|t-x|\ge y} f(t)\frac{dt}{x-t}\to 0$$

cuando $y\to 0+$.

Demostración. Descompongamos la diferencia en dos integrales

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt - \int_{|t-x|\geq y} f(t)\frac{dt}{x-t} = \int_{|t-x|<y} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt + \int_{|t-x|\geq y} f(t)\left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t}\right)dt.$$

Observemos de una vez que para $0 < a < b$ tenemos

$$\int_{a\leq|t-x|\leq b}\frac{dt}{x-t} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{a\leq|t-x|\leq b}\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt = 0$$

porque las funciones a integrar toman valores opuestos en puntos simétricos con respecto a x. Entonces

$$\left|\int_{|t-x|<y} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt\right| = \left|\int_{|t-x|<y}(f(t)-f(x))\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt\right| \leq \frac{1}{y}\int_{|t-x|<y}|f(t)-f(x)|dt \to 0$$

cuando $y \to 0+$. Por otro lado

$$\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t} = \frac{-y^2}{(x-t)((x-t)^2+y^2)}$$

y, por consiguiente,

$$\left|\int_{y\leq|t-x|<1} f(t)\left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t}\right)dt\right| \leq y^2\int_{y\leq|t-x|<1}|f(t)-f(x)|\frac{dt}{|x-t|((x-t)^2+y^2)}$$

$$\leq y^2\int_{y\leq|t-x|<1}|f(t)-f(x)|\frac{dt}{|t-x|^3} = y^2\int_y^1\frac{d\varphi(\rho)}{\rho^3},$$

donde hemos usado la notación utilizada en la demostración del Lema 1. Se ve similarmente como en aquella demostración que la última cantidad tiende a cero cuando $y \to 0+$. Finalmente tenemos que

$$\left|\int_{|x-t|\geq 1} f(t)\left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{x-t}\right)dt\right| \leq \left|y^2\int_{|t-x|\geq 1}\frac{f(t)}{|t-x|^3}dt\right| \to 0$$

cuando $y \to 0+$.

La idea de introducir la función $\varphi(\rho)$ e integrar por partes me fue sugerida por **Marcel Riesz** quien tenía gran experiencia en este tipo de cómputos por haber investigado la sumación de series de Fourier ([71]; [74, No. 25, págs. 104-113]; [106, III.5]).

4.

Para continuar la demostración del Teorema, necesito recordar algunos hechos del análisis de Fourier. Consideraré funciones definidas sobre la recta real $\mathbf{R}$, pero todo es casi lo mismo sobre $\mathbf{R}^n$, o sobre el toro $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, o más generalmente sobre un grupo conmutativo localmente compacto [40], [76], [92].

Sea p un número real, $p \geq 1$. Por $L^p = L^p(\mathbf{R})$ denotaremos el espacio vectorial de las funciones f definidas sobre $\mathbf{R}$ que son medibles (en el sentido de Lebesgue) y tales que $|f|^p$ es integrable. En verdad no son las funciones mismas los elementos de L^p, sino las clases de funciones, considerando equivalentes dos funciones cuando toman el mismo valor con la excepción posible de un conjunto de medida cero (es decir, cuando son iguales en casi todas partes). La expresión $\|f\|_p = (\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p dx)^{1/p}$ es una verdadera norma sobre L^p: si $\|f\|_p = 0$, entonces f es el elemento 0.

La primera cosa a señalar es la *desigualdad de Hölder*: Si $f \in L^p, g \in L^q$ y los exponentes satisfacen a $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$. La desigualdad vale también para $p = 1$ y $q = \infty$, donde L^∞ denota el espacio de las (clases de) funciones acotadas y medibles y $\|g\|_\infty$ es el extremo inferior de los números M tales que $|g(x)| \leq M$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$. Si $p = q = 2$, la desigualdad lleva el nombre de **H. A. Schwarz** (sin la letra t). La generalización siguiente es inmediata: si $f \in L^p, g \in L^q$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} \leq 1$, entonces $fg \in L^r$ y $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$. En efecto

$$\int|f|^r|g|^r dx \leq (\int(|f|^r)^{p/r}dx)^{r/p}(\int(|g|^r)^{q/r}dx)^{r/q}.$$

La *transformada* (o integral) *de Fourier* $\mathcal{F}f = \hat{f}$ de una función $f \in L^1(\mathbf{R})$ se define por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Obviamente $\hat{f} \in L^\infty(\mathbf{R})$ y $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Además $\hat{f}$ es continua por una aplicación directa del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. De hecho, si $\xi \to \alpha$, entonces $f(x)e^{-2\pi ix\xi} \to f(x)e^{-2\pi ix\alpha}$ y $|f(x)e^{-2\pi ix\xi}| \leq |f(x)|$, luego $\hat{f}(\xi) \to \hat{f}(\alpha)$. Análogamente al Lema de Riemann en la teoría de las series de Fourier, $\hat{f}(\xi)$ tiende a cero cuando $|\xi| \to \infty$.

La transformada conjugada de Fourier se define por

$$\overline{\mathcal{F}}g(\xi) = \int_{\mathbf{R}} g(x)e^{2\pi ix\xi}dx.$$

Si $\hat{f}$ pertenece también a L^1, entonces vale la relación de reciprocidad

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi = f(x).$$

En general $\hat{f}$ no es integrable, de manera que para obtener f a partir de $\hat{f}$ se necesita algún método de sumación, por ejemplo el de Cesàro:

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

([40, VI,1.11, pág. 125]).

Sea ahora $1 < p \leq 2$ y p' el exponente conjugado, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Para definir la transformada de Fourier de un elemento $f \in L^p$ se utiliza el hecho de que $L^1 \cap L^p$ es denso en L^p. Dado $f \in L^p$ se considera por ejemplo la sucesión (f_k) definida de la manera siguiente: $f_k(x) = f(x)$ si $|x| \leq k$ y $f_k(x) = 0$ si $|x| > k$. Entonces los elementos $\mathcal{F}f_k$ pertenecen a $L^{p'}$ y cuando $k \to \infty$ tienden hacia un elemento de $L^{p'}$ en el sentido de la norma, este elemento es por definición $\mathcal{F}f = \hat{f} \in L^{p'}$. Se tiene $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$: *desigualdad de Hausdorff–Young* ([40, pág. 142]; [92, V, §1, pág. 178]; [96, Chap.IV, pág. 96]). En particular para $p = p' = 2$ la aplicación $f \to \mathcal{F}f$ es un isomorfismo isométrico de L^2 sobre sí mismo, es decir $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (Teorema de Parseval-Plancherel).

La *convolución* de dos funciones integrables f y g se define por

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} |f * g(x)|dx &\leq \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)g(y)|dydx \\ &= \int_{\mathbf{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|dx,\end{aligned}$$

se tiene $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Más generalmente, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, f \in L^p, g \in L^q$, entonces se puede definir $f*g$ que pertenecerá a L^r con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ y satisface a $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$ (*desigualdad de Young*, [92, pág. 178]).

Formalmente se tiene

$$\int f(x-y)g(y)e^{-2\pi ix\xi}dydx = \int f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi}dx \int g(y)e^{-2\pi iy\xi}dy,$$

es decir

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}g$$

([96, pág. 51]). Esta fórmula vale por ejemplo cuando $f \in L^p, g \in L^q, p \leq 2, q \leq 2$ ([96, 4.7, Th.77, pág. 106]).

La relación entre el producto y la convolución aclara por qué $f * g$ pertenece a L^r. Si $f \in L^p, g \in L^q$, entonces $\hat{f} \in L^{p'}, \hat{g} \in L^{q'}$ y por la desigualdad de Hölder $\hat{f}\hat{g} \in L^s$, donde $\frac{1}{s} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Desde luego $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\hat{f}\hat{g}) \in L^r$ con $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

5.

Ahora podemos seguir con la demostración del Teorema. Nuestra primera tarea es encontrar la transformada de Fourier del núcleo de Poisson P_y y del núcleo conjugado Q_y. Una aplicación sencilla del teorema del residuo muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx = \pi e^{-|a|}. \tag{3}$$

En efecto

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right).$$

Si $a > 0$, integramos a lo largo de un semicírculo C_R^+ en el semiplano superior cuyo diámetro es el intervalo $[-R, R]$ del eje real. Si $R > 1$ entonces el polo $z = i$ está en el interior de C_R^+, desde luego

$$\oint_{C_R^+} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=i} \frac{e^{iaz}}{z^2+1} = -2\pi i\frac{i}{2}e^{iai} = \pi e^{-a}.$$

Puesto que $|e^{iaz}| = |e^{iax}.e^{-ay}| = e^{-ay} < 1$, la integral sobre la parte curva de C_R^+ tiende a cero cuando $R \to \infty$ y se obtiene (3).

En el caso $a < 0$ se integra sobre el semicírculo C_R^- en el semiplano $y < 0$. Si $R > 1$, entonces C_R^- contiene el polo $z = -i$ en su interior. Ahora también $ay > 0$, luego $|e^{iaz}| < 1$ y la integral sobre la parte curva $\to 0$. Puesto que $a = -|a|$ y la dirección de la integración sobre el diámetro es opuesto a aquella en la cual integramos sobre $\mathbf{R}$, obtenemos otra vez (3).

Un cambio de variables nos da ahora la transformada de Fourier de P_y. En primer lugar con $y > 0$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iay(x/y)}}{(\frac{x}{y})^2+1}d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\pi e^{-|a|y},$$

por consiguiente

$$(\mathcal{F}P_y)(\xi) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x^2+y^2}dx = e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Para calcular la transformada de Fourier de $Q_y(x) = \frac{x}{y}P_y(x)$ utilizaremos la fórmula

$$\mathcal{F}(xf(x)) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{f}(\xi) \tag{4}$$

la cual se obtiene derivando bajo el signo integral cuando $xf(x)$ es integrable, y cuya validez general resultará de las consideraciones de la sección 10. Se tiene

$$\mathcal{F}(Q_y)(\xi) = \frac{1}{y}\mathcal{F}(xP_y(x)) = \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)(\mathcal{F}P_y)(\xi) =$$

$$= \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e^{-2\pi y|\xi|} = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\cdot e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Pongamos $G(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi\hat{f}(\xi)$ y sea $g(x) = (\overline{\mathcal{F}}G)(x)$. Se tiene

$$(f*Q_y)(x) = (g*P_y)(x) \tag{5}$$

ya que las transformadas de Fourier de ambos lados son iguales a

$$-i\,\mathrm{sgn}\,\xi\, e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi).$$

Por el Lema 1, $g*P_y$ converge hacia $g \in L^2$ cuando $y \to 0+$. Del Lema 2 y de (5) resulta que

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t-x|\geq y} f(t)\frac{dt}{x-t} \to g(x)$$

para casi todo $x \in \mathbf{R}$ cuando $y \to 0+$, es decir $\tilde{f}$ existe y pertenece a L^2. Además

$$\|\tilde{f}\|_2 = \|g\|_2 = \|G\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

con lo cual el Teorema queda completamente demostrado.

6.

La generalización de la transformada de Hilbert que **Marcel Riesz** me propuso en febrero de 1951 está definida por

$$(\mathcal{H}f)(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\text{v.p.}\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\frac{x-t}{|x-t|^{n+1}}dt. \tag{6}$$

La función $g = \mathcal{H}f$ toma sus valores en $\mathbf{R}^n$, es decir es una función vectorial $g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x))$. **Riesz** conjeturó que si $f \in L^2(\mathbf{R}^n) = L^2$, entonces $(\mathcal{H}f)(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbf{R}^n$, que $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n) = \mathbf{L}^2$, donde sobre $\mathbf{L}^2$ se considera la norma $\|g\|_2 = (\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{j=1}^n |g_j(x)|^2dx)^{1/2}$, que $\|g\|_2 = \|f\|_2$, y finalmente que $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{H}f) = -f$, donde para definir $\tilde{\mathcal{H}}$ se considera el producto escalar $g(x)\cdot(x-t) = \sum_{j=1}^n g_j(t)(x_j-t_j)$ bajo la integral (6). Fue sólo algunos días más tarde que nos pusimos de acuerdo sobre la manera de definir el valor principal: se debe integrar fuera de una bola $|x| < \rho$ y tomar el límite cuando $\rho \to 0$.

El argumento heurístico con el cual **Riesz** llegó a su conjetura está basado sobre su generalización de la integral de Riemann-Liouville, llamado también potencial de orden α, que para una función f apropiada sobre $\mathbf{R}^n$ se define por

$$(\mathcal{R}_\alpha f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{n/2}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\mathbf{R}^n} f(t)|x-t|^{\alpha-n}dt.$$

Si f decrece muy rápidamente al infinito, la integral tiene sentido para $0 < \Re\alpha < n$, y por prolongación analítica para los otros valores de $\alpha \in \mathbf{C}$, como lo veremos muy detalladamente más abajo ([73], [74, No.47, págs. 571–793]). Las propiedades esenciales del operador $\mathcal{R}_\alpha$ son: $\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{R}_\beta f) = \mathcal{R}_{\alpha+\beta}f, \mathcal{R}_0 f = f$ y $\mathcal{R}_{-2}f = -\Delta f$.

Si $n \neq 1$, entonces para el valor $\alpha = 1$ obtenemos

$$\mathcal{R}_1 f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(t)}{|x-t|^{n-1}}dt.$$

Esto es lo que **Pierre Humbert** [39] llama un *prepotencial*: Si consideramos el espacio $(n+1)$-dimensional y notamos por $(x,y) = (x_1, ..., x_n, y)$ los vectores de $\mathbf{R}^{n+1}$, entonces

$$\Phi(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2\pi^{(n+1)/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(t)}{(|x-t|^2+y^2)^{(n-1)/2}}dt$$

es el valor en (x,y) del potencial newtoniano de una masa o carga repartida sobre el hiperplano $y = 0$ con densidad f. El límite de $\Phi(x,y)$ cuando $y \to 0$ es $\mathcal{R}_1 f(x)$. Llamando ahora

$$\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{y} \quad \nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

los gradientes parciales, $-\nabla_x \mathcal{R}_1 f$ es la expresión (6) que desde el artículo [9, pág. 906] de **Calderón** y **Zygmund** se llama la *transformada de Riesz*. El cálculo formal $\nabla_x \mathcal{R}_1 * \nabla_x \mathcal{R}_1 = \Delta \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_1 = \Delta \mathcal{R}_2 = -\mathcal{R}_0$ rinde verosímil la reciprocidad conjeturada por **Riesz**.

Es razonable suponer que

$$\begin{aligned} V(x,y) &= -\nabla_x \Phi(x,y) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) \frac{x-t}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}} dt \end{aligned}$$

tiende hacia $\mathcal{H}f(x)$ cuando $y \to 0+$, es decir

$$Q_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{x}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$$

es ahora nuestro *núcleo conjugado de Poisson*. La integral de Poisson

$$\begin{aligned} U(x,y) &= -\nabla_y \Phi(x,y) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) \frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}} dt \end{aligned}$$

resuelve el problema de Dirichlet para el semi-espacio $y > 0$, es decir $\Delta U = 0$ y $U(x,y) \to f(x)$ cuando $y \to 0+$. El *núcleo de Poisson* es pues

$$P_y(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}.$$

Cuando $n = 1$, debemos considerar en vez del potencial newtoniano el potencial logarítmico en el plano, que corresponde al prepotencial

$$\mathcal{R}_1 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \log|x-t| dt.$$

Entonces la expresión para la función conjugada es

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \log|x-t|\, dt$$

y es bajo esta forma que **Titchmarsh** la introduce al principio de su discusión ([96, 5.2, Theorem 90, pág. 121]).

7.

La demostración dada en [28] a las conjeturas de **Marcel Riesz** sigue paso por paso la demostración dada arriba en el caso $n = 1$. En primer lugar, hay que averiguar si el coeficiente que figura en la definición de $P_y(x)$ es correcto, es decir si es cierto que $\int_{\mathbf{R}^n} P_y(x)dx = 1$. Con el cambio de variables $t = x/y$ e introduciendo coordenadas polares se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}} dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{dt}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \\ &= \int_0^\infty \int_{S(r)} \frac{d\omega dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}, \end{aligned}$$

donde $d\omega$ es el elemento de superficie sobre la esfera $S(r)$ con radio r. Con el cambio de variable $s = \frac{1}{r}$ se ve que la última expresión es igual a

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s^2)^{(n+1)/2}}.$$

Todavía en París, calculé esta última integral separadamente para n par y para n impar, reduciendo el exponente integrando por partes. Una vez llegado a Bogotá en el verano de 1951, enseñé el curso de Análisis de tercer semestre en la Universidad de los Andes utilizando el texto de **Reddick** y **Miller**, de donde aprendí que la integral vale

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Entonces nuestra integral original es igual a

$$\frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

que es efectivamente el recíproco del coeficiente en $P_y(x)$.

Los análogos $n-$dimensionales de los Lemas 1 y 2 se demuestran casi palabra por palabra como en el caso de una dimensión.

Las transformadas de Fourier de los núcleos de Poisson son

$$\mathcal{F}(P_y)(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(Q_y)(\xi) = -i\frac{\xi}{|\xi|} e^{-2\pi y|\xi|}.$$

La primera se encuentra en el libro de **S. Bochner** ([3, (21), pág. 189]). Pero como él utiliza la función de Bessel, di una nueva deducción empleando una fórmula debida a Leray concerniente a la transformada de Fourier de una función radial, que aprendí el año anterior en su curso sobre ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico ([47, No. 13, págs. 29–30]). Para la transformada de Q_y utilicé también la fórmula de Leray, pero no directamente ya que Q_y no es radial. En el curso de la computación me topé con una integral que me parecía imposible de calcular. Por pura casualidad encontré en el libro de **Magnus** y **Oberhettinger** [49] que la integral se puede expresar mediante la función modificada de Hankel, que después se elimina del resultado final. Fue sólo treinta años más tarde, al leer el libro de **George O. Okikiolu** ([59, Chap. 5.2, pág. 328]), que me dí cuenta que mis esfuerzos eran inútiles ya que $\mathcal{F}(Q_y)$ se deduce en una manera muy sencilla de $\mathcal{F}(P_y)$ utilizando el análogo $n-$dimensional de (4).

La demostración se termina como en el caso $n = 1$. Se define $G(\xi) = -i\dfrac{\xi}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, es decir, $G = (G_1, \ldots, G_n)$ es una función vectorial, con componentes $G_j(\xi) = -i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, que satisface a

$$\|G\|_2^2 = \int \sum_{j=1}^{n} \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

Sea $g = (g_1, ..., g_n) \in \mathbf{L}^2$ tal que $\hat{g}_j = G_j (1 \leq j \leq n)$. Entonces $\|g\|_2 = \|G\|_2 = \|f\|_2$. Por otro lado

$$f * Q_y = g * P_y$$

ya que la transformada de Fourier de cualquier lado es $-i\dfrac{\xi}{|\xi|}e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi)$. Para casi todo $x \in \mathbf{R}^n$ el miembro a la izquierda tiende hacia $\mathcal{H}f$, el de la derecha hacia $g \in \mathbf{L}^2$. Luego $\mathcal{H}f(x)$ existe, $\mathcal{H}f$ pertenece a $\mathbf{L}^2$ y su norma es igual a $\|f\|_2$. La reciprocidad sigue de que

$$-i\frac{\xi}{|\xi|} \cdot -i\frac{\xi}{|\xi|} = -1\,.$$

8.

En 1924 **Marcel Riesz** ([72]; [74, No.29, págs. 360–362; No. 33, págs. 410–436]) generalizó el resultado de **Plessner**. Ya **Plessner** demostró que si $1 < p < \infty$ y $f \in L^p$, entonces $\tilde{f}(x)$ existe en casi todo $x \in \mathbf{R}$. **Riesz** demuestra que $\tilde{f}$ también pertenece a L^p y que $\|\tilde{f}\|_p \leq M_p\|f\|_p$, donde la constante M_p depende sólo de p. Dame **Mary Lucy Cartwright** [10] publicó la correspondencia entre **G. H. Hardy** y **Marcel Riesz** acerca del teorema. **Hardy** quiso ver la demostración ya que él y su alumno **Titchmarsh** habían ensayado demostrar el resultado sin éxito. **Marcel Riesz** le envió la demostración detallada con el cuento muy divertido de la manera en que la había encontrado: "el paso más importante es olvidar el teorema de Parseval". Relata que en un examen dió a un alumno con poco talento el problema mucho más fácil que corresponde al caso $p = 2$. Empezó a reflexionar como podría éste demostrarlo si no conocía el teorema de Parseval, y esto le dió la idea de la marcha a seguir. **Hardy** le contestó el 5 de enero de 1924 que la vida del alumno no será sin valor (pero nunca entenderá por qué). El gran matemático argentino **Alberto P. Calderón** dió una nueva demostración del teorema de Marcel Riesz [5] con la cual empezó su brillante carrera, como lo relata **Robert Fefferman** en la introducción de la tercera edición del libro de **Zygmund** [106].

En un trabajo histórico, dedicado a **Marcel Riesz** con la ocasión de su sexagésimo quinto cumpleaños, el susodicho **Calderón** y **Antoni Zygmund** [6] demostraron el análogo $n-$dimensional del teorema de Riesz. Yo me encontré con **Zygmund** en 1951 en París y él me habló del artículo que estaba por aparecer, de manera que no lo había visto cuando redacté mi nota [28]. Así no sabía que como motivación ellos también se refieren (en el caso $n = 2$) al comportamiento de la función notada $V(x, y)$ más arriba, cuando $y \to 0+$.

Calderón y Zygmund toman una función Ω definida sobre la esfera unidad S_{n-1} de $\mathbf{R}^n$ que satisface

$$\int_{S_{n-1}} \Omega(\omega) d\omega = 0,$$

condición que figura ya en obras anteriores([50,Chap II, Th.1, pág. 156]) y cuyo verdadero significado se entiende sólo a base de la teoría de las funciones holomorfas con valores distribuciones. Suponen además que Ω satisface una cierta condición de tipo de Lipschitz y consideran para $\varepsilon > 0$ las integrales

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-t|\geq\varepsilon} \Omega\left(\frac{x-t}{|x-t|}\right) \frac{f(t)}{|x-t|^n} dt.$$

Demuestran el siguiente resultado:

Si $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, entonces $\tilde{f}_\varepsilon$ tiende, cuando $\varepsilon \to 0+$, en el sentido de la norma de $L^p(\mathbf{R}^n)$ y en casi todo $x \in \mathbf{R}^n$ hacia una función $\tilde{f}$ que pertenece a L^p. Además, $\|\tilde{f}\|_p \leq C\|f\|_p$, donde $C > 0$ depende sólo de n, p y Ω.

El caso de la transformada de Riesz corresponde a $\Omega(\omega) = \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in S_{n-1}$. **Calderón** y **Zygmund** volvieron en otro artículo [8] a integrales singulares, en el cual presentan demostraciones simplificadas de algunos resultados usando la transformada de Riesz. Desde entonces el número de los trabajos dedicados a las integrales singulares ha llegado seguramente a más de mil. Gran parte de su teoría se puede estudiar en los libros de **E. M. Stein** [88], [89], **Stein** y **Weiss** [92], **Christ** [11] y los apuntes de **Alejandro Ortiz F.** [60].

Puesto que conocía el teorema de Calderón–Zygmund, traté de demostrar en [28] que la reciprocidad $\vec{\mathcal{H}}(\mathcal{H}f) = -f$ vale también para f en L^p, $1 < p < \infty$.**G. O. Thorin**, quien dió una famosa demostración de una generalización del teorema de convexidad de **Marcel Riesz** ([94], [95]), que según **J. E. Littlewood** ([48, pág. 20]) se basa sobre la idea más impudente en matemáticas, encontró un error en mi demostración. A pesar de no tener puesto académico (trabajaba para una compañia de seguros), **Thorin** mantenía contacto con la vida matemática, y **Riesz** le prestó mi manuscrito. Quisiera dar ahora una demostración correcta, basada sobre la sugestión de **Thorin** en su carta a **Riesz** del 2 de febrero de 1953.

Sea pues $f \in L^p$ con $1 < p < \infty$. Consideremos una sucesión (f_ν) de elementos de $L^p \cap L^2$ que converge hacia f cuando $\nu \to \infty$ en el sentido de L^p y en casi todo punto $x \in \mathbf{R}^n$. Pongamos $g = \mathcal{H}f, g_\nu = \mathcal{H}f_\nu$. Entonces por el teorema de Calderón–Zygmund g pertenece a $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$ y $\|g\|_p \leq M_p\|f\|_p$. Por otro lado $g_\nu \in \mathbf{L}^p \cap \mathbf{L}^2$ y $\|g - g_\nu\|_p \leq M_p\|f - f_\nu\|_p$, así que $g_\nu \to g$ en $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Por el resultado que vale para $p = 2$ se tiene $\mathcal{H}g_\nu = -f_\nu$. Por el teorema de Calderón–Zygmund

$$\mathcal{H}g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{|x-t|\geq\varepsilon} g(t)\cdot(x-t)\frac{dt}{|x-t|^{n+1}}$$

existe, pertenece a L^p y se tiene

$$\|\mathcal{H}g + f_\nu\|_p = \|\mathcal{H}g - \mathcal{H}g_\nu\|_p \leq M_p\|g - g_\nu\|_p \to 0$$

cuando $\nu \to \infty$. Finalmente

$$\|\mathcal{H}g + f\|_p \leq \|\mathcal{H}g + f_\nu\|_p + \|f_\nu - f\|_p \to 0,$$

es decir $\mathcal{H}g = -f$.

9.

En nuestra conversación de febrero de 1951, **Marcel Riesz** insistió sobre el hecho de que la función

$$\begin{aligned} W(x,y) &= U(x,y) + V(x,y) \\ &= U(x,y)e_0 + V_1(x,y)e_1 + \cdots + V_n(x,y)e_n \end{aligned}$$

de la sección 6 satisface a un sistema de ecuaciones diferenciales que generaliza el de Cauchy–Riemann y que fue introducido por el matemático suizo **R. Fueter** [17] y sus discípulos [79], [87] para definir funciones regulares en álgebras:

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j},$$

es decir div$W = 0$, rot$W = 0$. **E. M. Stein** y **Guido Weiss** [90], [91], [101] construyeron una gran teoría de espacios H^p en el semi-espacio superior $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ y en su borde $\mathbf{R}^n$ que generaliza los espacios de Hardy introducidos por **Frigyes Riesz** [70], hermano de **Marcel**, y que tiene una enorme importancia en análisis armónico. Más tarde **Stein** escribió un artículo en colaboración con **Charles Fefferman** [15] quien demostró que el dual de H^1 es el espacio BMO de funciones cuyo promedio tiene una oscilación acotada, introducido poco antes por **John** y **Nirenberg**, lo que le valdría la Medalla Fields a **Fefferman**. La teoría está expuesta de manera muy clara y detallada en los libros de **Stein** [88], [89] y de **Stein–Weiss** [92]. Con un desliz curioso de terminología, **Stein** y **Weiss** dan al sistema de Fueter el nombre "sistema de Riesz"([92, pág. 234]) y **Ch. Fefferman** en su elogio de la obra de **E. M. Stein** ([16, pág. 10]) lo llama "ecuaciones de Stein–Weiss".

10.

En los años 1952 y 1956 el matemático francés **Laurent Schwartz** (con la letra t) visitó Bogotá y enseñó varios cursos en los cuales se sirvió de la teoría de las distribuciones que él inventó [80], y por la cual recibió la *Medalla Fields* en 1950. Este contacto me hizo caer en cuenta que la mejor manera de tratar las transformadas de Riesz era considerarlas como la convolución de la distribución v.p.$\dfrac{x}{|x|^{n+1}}$ con una función f (o, mejor, con una distribución).

Daré cuenta de los resultados obtenidos relativos a integrales singulares e hipersingulares empezando con un breve bosquejo de la teoría de las distribuciones (fuera del libro de **Schwartz** citado arriba, recomiendo [26]). Notamos por $\mathcal{D}$ (o por $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ si es necesario) el espacio vectorial de las funciones φ definidas sobre $\mathbf{R}^n$, con valores en $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y cuyo soporte

$$\operatorname{Supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$$

es compacto. Una *distribución* (de Schwartz) T sobre $\mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal $\varphi \mapsto < T, \varphi >$ de $\mathcal{D}$ en $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ que satisface la condición siguiente: para todo conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ existe una constante $M > 0$ y un número entero $m \geq 0$ tal que

$$|< T, \varphi >| \leq M \text{máx}_{|\rho|\leq m} \text{máx}_x |\partial^\rho \varphi(x)| \qquad (7)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{Supp}\varphi \subset K$. Aquí nos servimos de una notación hoy generalmente utilizada: $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) \in \mathbf{N}^n$ es un multi-índice, es decir una $n-$tupla de números enteros $\rho_j \geq 0$, y $|\rho| = \rho_1 + \cdots + \rho_n$ es su orden; $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ y $\partial^\rho = \partial_1^{\rho_1} \cdots \partial_n^{\rho_n}$.

La desigualdad (7) expresa el hecho de que T es una forma lineal *continua* sobre $\mathcal{D}$ para una cierta topología localmente convexa. Una sucesión (φ_ν) en $\mathcal{D}$ converge a cero para esta topología si existe un conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ tal que $\operatorname{Supp}\varphi_\nu \subset K$ para todo ν, y si para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión $(\partial^\rho \varphi_\nu(x))$ converge uniformemente hacia cero. Desde luego el espacio $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ de las distribuciones es el dual topológico de $\mathcal{D}$.

Ejemplo 1. Sea f una función localmente integrable sobre $\mathbf{R}^n$, es decir integrable sobre cada conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$. Entonces

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_K |f(x)|dx \cdot \text{máx}_x |\varphi(x)|$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{Supp}\varphi \subset K$. De esta manera f define una distribución que podemos notar T_f o simplemente f si no hay peligro de confusión.

Ejemplo 2. La distribución de Dirac δ se define por $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$.

Inspirado por los casos cuando $T = T_f$ para una función f apropiada, **Laurent Schwartz** introdujo las operaciones siguientes para distribuciones.

Diferenciación. Si $T \in \mathcal{D}'$ y $\rho \in \mathbf{N}^n$, entonces

$$< \partial^\rho T, \varphi >= (-1)^{|\rho|} < T, \partial^\rho \varphi >$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Así por ejemplo $< \partial^\rho \delta, \varphi >= (-1)^{|\rho|}\partial^\rho \varphi(0)$.

Multiplicación. Se nota por $\mathcal{E}$ o $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ el espacio de todas las funciones definidas en $\mathbf{R}^n$, con valores en $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Una sucesión (f_ν) de elementos de $\mathcal{E}$ tiende hacia $f \in \mathcal{E}$ si para todo conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ y para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión $(\partial^\rho f_\nu)$ converge hacia $\partial^\rho f$ uniformemente sobre K.

Si $T \in \mathcal{D}'$ y $f \in \mathcal{E}$, entonces la distribución fT se define por $< fT, \varphi >=< T, f\varphi >$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Está claro que $f\varphi \in \mathcal{D}$, y la regla de Leibniz muestra que fT es en efecto una distribución.

Las últimas dos operaciones, y mayoría de las operaciones con distribuciones en general, se pueden definir igualmente por continuidad aprovechando el hecho de que por ejemplo $\mathcal{D}$ o $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{D}'$.

Soporte. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, se dice que $T \in \mathcal{D}'$ es cero en Ω si $< T, \varphi >= 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega$. El soporte $\operatorname{Supp} T$ de T es el complemento de la reunión de todos los conjuntos abiertos en los cuales T vale cero. Obviamente $\operatorname{Supp} T$ es un conjunto cerrado. Por ejemplo $\operatorname{Supp}\delta = \{0\}$.

Las distribuciones con soporte compacto forman el espacio $\mathcal{E}'$, dual topológico de $\mathcal{E}$.

Producto tensorial. El producto tensorial de dos funciones f y g definidas en $\mathbf{R}^n$ es la función definida en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ por $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y)$. Desde luego el producto tensorial de las distribuciones $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ es la distribución $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ definida por

$$< S \otimes T, \varphi \otimes \psi >=< S, \varphi >< T, \psi >$$

para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Para averiguar que la definición tiene sentido, es menester probar que las sumas finitas $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x)\psi_j(y)$ forman un conjunto denso en $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n})$.

La definición de la *convolución*, que para nosotros tiene mayor importancia, es más delicada. Si f y g son dos funciones integrables sobre $\mathbf{R}^n$, entonces de la definición de su convolución (véase sección 4) resulta que

$$< f * g, \varphi >= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x - y)g(y)\varphi(x)dydx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x + y)dxdy.$$

Esto sugiere definir la convolución de $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ por

$$< S * T, \varphi >=< S \otimes T, \varphi^\triangle >$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, donde $\varphi^\triangle$ es la función $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ sobre $\mathbf{R}^{2n}$. El problema con esta definición es que $\varphi^\triangle$ tiene soporte compacto únicamente cuando φ es idénticamente cero.

Laurent Schwartz en su seminario sobre la tesis doctoral de **Alexander Grothendieck** ([81, Exposé 22]) propuso una definición muy general de la convolución de dos distribuciones.

Notemos por $\mathcal{B}$ el espacio de las funciones φ cuyas derivadas de todos los órdenes existen, son continuas y acotadas. Una sucesión (φ_ν) en $\mathcal{B}$ tiende a cero en el sentido de la topología de $\mathcal{B}$ si para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión $(\partial^\rho \varphi_\nu(x))$ tiende uniformemente a cero sobre $\mathbf{R}^n$ cuando $\nu \to \infty$.

Designamos por $\mathcal{B}_0$ el subespacio cerrado de $\mathcal{B}$ que consiste de las funciones φ tales que para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la derivada $\partial^\rho\varphi$ tiende a cero al infinito, es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|\partial^\rho\varphi(x)| \leq \varepsilon$ cuando $|x| \geq R$. Obviamente $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_0$, además $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{B}_0$ y la inyección $\mathcal{D} \to \mathcal{B}_0$ es continua, por lo tanto el dual topológico $\mathcal{B}'_0$ de $\mathcal{B}_0$ se puede considerar como un subespacio de $\mathcal{D}'$, es decir sus elementos son distribuciones.

Sea $T \in \mathcal{B}'_0$ y $\varphi \in \mathcal{B}$. Si (φ_ν) es una sucesión en $\mathcal{B}_0$ tal que para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión $(\partial^\rho\varphi_\nu)$ converge hacia $\partial^\rho\varphi$, uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$, entonces la sucesión $(< T, \varphi_\nu >)$ converge hacia un valor que por definición es igual a $< T, \varphi >$.

En particular si notamos por $\mathbf{1}$ la función que vale uno en todo punto $x \in \mathbf{R}^n$, entonces tiene sentido la expresión $< T, \mathbf{1} >$ que se llama la *integral* de T y se nota también $\int T$. Por consiguiente la distribuciones en $\mathcal{B}'_0$ se dicen *integrables*. (**Laurent Schwartz** escribe $\mathcal{D}'_{L^1}$ en vez de $\mathcal{B}'_0$).

Dos distribuciones $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ son *convolubles* si para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ la distribución $\varphi^\triangle S \otimes T$ es integrable. Su convolución se define entonces por

$$< S * T, \varphi >=< \varphi^\triangle S \otimes T, \mathbf{1} >= \int \varphi^\triangle S \otimes T.$$

Por ejemplo S y T son convolubles siempre cuando para todo conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ la faja $K^\triangle = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2n} : x + y \in K\}$ intersecta $\operatorname{Supp} S \times \operatorname{Supp} T$ en un conjunto compacto.

Norbert Ortner observó que equivale decir que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ la distribución $\varphi^\triangle S \otimes T$ tiene soporte compacto. Puesto que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{B}'_0$, la condición implica efectivamente aquella de la definición. En particular S y T son convolubles si uno de ellos tiene soporte compacto.

Durante el año escolar 1950/51 **Claude Chevalley**, el gran algebrista francés, enseñó un curso sobre las distribuciones de **Laurent Schwartz** en la Columbia University de Nueva York, en la cual introdujo otra definición de la convolución. Si f es una función definida sobre $\mathbf{R}^n$, entonces se suele escribir $\check{f}(x) = f(-x)$ y $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$. La *regularizada* $T*\varphi$ de $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ por $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ es la función infinitamente diferenciable dada por

$$(T * \varphi)(x) =< T, \tau_x\check{\varphi} > .$$

Chevalley dice que S y T son convolubles si para todo φ y ψ en $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ la función $(S * \varphi) \cdot (\check{T} * \psi)$ es integrable sobre $\mathbf{R}^n$, donde $< \check{T}, \varphi >=< T, \check{\varphi} >$. Entonces $S * T$ es la distribución determinada por

$$< (S * T)\varphi, \psi >= \int (S * \varphi) \cdot (\check{T} * \psi) dx.$$

Del curso de **Chevalley** se publicaron apuntes que yo nunca tuve la oportunidad de consultar, pero que llegaron al Japón, donde un grupo de matemáticos: **Y. Hirata, M. Itano, H. Ogata, R. Shiraishi** y **K. Yoshinaga** escribieron una serie de trabajos sobre convolución y multiplicación de distribuciones [21], [22], [85], [103]. En particular, introdujeron nuevas maneras de definir la convolución de distribuciones y demostraron que las definiciones son equivalentes. **Hirata** y **Ogata** anticiparon un resultado del que hablaré más abajo, a saber que $\operatorname{Pf}|x|^\alpha$ y $\operatorname{Pf}|x|^\beta$ son convolubles cuando $\Re(\alpha + \beta) < -n$ ([22, pág. 148, ejemplo 2]).

Mientras tanto **Laurent Schwartz** publicó su gran trabajo sobre distribuciones con valores vectoriales [82], [83]. En la primera de las dos entregas introduce el concepto de distribución parcialmente integrable y a base de esto da otra definición de la convolución. El matemático ruso **W. S. Wladimirow** ha dado todavía otra definición de dicha operación. En un bellísimo trabajo [13], **P. Dierolf** y **J. Voigt** demuestran de manera sencilla que todas las definiciones son equivalentes.

A pesar de haber estudiado el seminario [81] de **Schwartz** en los años cincuenta, presenté en 1974 la definición general de $S * T$ como si fuera nueva [35]. En esta nota demostré que las definiciones usuales de la convolución (por ejemplo cuando $f \in L^p, g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$) son casos particulares de la definición general. **Bernhard Roider** en una nota [75] que complementa [35], demuestra de manera sencilla el hecho ya demostrado por **Shiraishi** [85] que las dos definiciones dadas por **Laurent Schwartz** son equivalentes. Los dos presentamos propiedades de la convolución, de los cuales quiero enumerar algunas:

Si las distribuciones S y T son convolubles, entonces T y S son convolubles y se tiene $S * T = T * S$.

$\delta * T = T$ para todo $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Definición. Se dice que la tripla (R, S, T) de distribuciones en $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ es convoluble si $\varphi^{3\triangle} R \otimes S \otimes T \in \mathcal{B}'_0(\mathbf{R}^{3n})$, donde $\varphi^{3\triangle}(x, y, z) = \varphi(x + y + z)$, y entonces $< R*S*T, \varphi >=< \varphi^{3\triangle} R \otimes S \otimes T, \mathbf{1} >$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Si la tripla (R, S, T) es convoluble, entonces son convolubles R y S, S y T, $R * S$ y T, R y $S * T$, y se tiene

$$R * S * T = R * (S * T) = (R * S) * T.$$

Esto es interesante porque el famoso ejemplo de **Laurent Schwartz**:

$$Y * (\partial\delta * \mathbf{1}) = 0, \quad (Y * \partial\delta) * \mathbf{1} = \delta * \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

donde Y es la función de Heaviside: $Y(x) = 1$ para $x \geq 0$, $Y(x) = 0$ para $x < 0$, muestra que si la tripla no es convoluble, la convolución no es necesariamente asociativa.

Si S y T son convolubles, entonces para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ las distribuciones $\partial^\rho S$ y T son convolubles y se tiene $\partial^\rho(S * T) = \partial^\rho S * T$.

Teorema de N. Ortner [62], [63]. *Sean S y T dos distribuciones sobre $\mathbf{R}^n$ de los cuales* **no** *suponemos que son convolubles. Sea j un índice $(1 \leq j \leq n)$ y supongamos que se cumplen las condiciones siguientes:*

(a) *$\partial_j S$ y T son convolubles;*
(b) *S y $\partial_j T$ son convolubles;*
(c) *$(\varphi * \check{S}) \cdot T$ pertenece a la cerradura de $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.*

Entonces $\partial_j S * T = S * \partial_j T$.

Laurent Schwartz descubrió una teoría muy satisfactoria de la *transformación de Fourier* definiendo $\mathcal{F}$ no para todas las distribuciones sino sólo para aquellas que pertenecen a un cierto subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Notemos $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, o sencillamente $\mathcal{S}$ si no hay posibilidad de confusión, el espacio vectorial de todas las funciones φ definidas en $\mathbf{R}^n$ que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y que son tales que

$$(1 + |x|^2)^m |\partial^\rho \varphi(x)|$$

es acotado para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ y $m \in \mathbf{N}$. Una sucesión (φ_ν) tiende a cero en $\mathcal{S}$ si para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ y $m \in \mathbf{N}$ la sucesión $((1 + |x|^2)^m \partial^\rho \varphi_\nu(x))$ tiende a cero uniformemente sobre $\mathbf{R}^n$ cuando $\nu \to \infty$. Los elementos del dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) = \mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ se llaman *distribuciones temperadas*. Puesto que el espacio $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$ y la inclusión $\mathcal{D} \to \mathcal{S}$ es continua, los elementos de $\mathcal{S}'$ pueden efectivamente considerarse como distribuciones. Una distribución T es temperada si para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ y $m \in \mathbf{N}$ existe $M > 0$ tal que

$$| < T, \varphi > | \leq M \operatorname{máx}_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\rho \varphi(x)|$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ (o todo $\varphi \in \mathcal{S}$).

La *transformada de Fourier* de una función $\varphi \in \mathcal{S}$ se define naturalmente por

$$\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi . x} dx,$$

donde $\xi . x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ es el producto escalar. La función $\mathcal{F}\varphi$ también pertenece a $\mathcal{S}$ y de hecho la aplicación $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$ es un isomorfismo lineal y continuo en ambas direcciones, cuyo inverso es la transformada de Fourier conjugada

$$\overline{\mathcal{F}}\psi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\xi) e^{2\pi i x . \xi} d\xi,$$

es decir $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}$ es la aplicación identidad.

Si $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ define una distribución tal que para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}f, \varphi > &= \int \int f(x) e^{-2\pi i \xi . x} dx \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int f(x) \int \varphi(\xi) e^{-2\pi i \xi . x} d\xi dx \\ &= < f, \mathcal{F}\varphi > . \end{aligned}$$

Esta identidad es la motivación para definir la transformada de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ por transposición:

$$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}\varphi >$$

para $\varphi \in \mathcal{S}$. La transformada conjugada se define por una relación semejante. De manera equivalente se puede definir $\mathcal{F}T$ por continuidad ya que hay una inclusión continua $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{S}'$. Esta definición de la transformada de Fourier abarca aquella dada para L^p $(1 < p \leq 2)$ en la sección 4.

$\mathcal{F}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}'$ sobre sí mismo cuyo inverso es $\overline{\mathcal{F}}$. Cuando T tiene soporte compacto, su transformada de Fourier es la función infinitamente diferenciable $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi) = < T, \exp 2\pi i \xi \cdot >$, donde $\exp 2\pi i \xi \cdot$ es la función $x \mapsto \exp 2\pi i \xi \cdot x$ de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

Un ejemplo importante es $\mathcal{F}(\delta) = \mathbf{1}$. La transformada de Fourier intercambia la multiplicación por un monomio $\xi^\rho = \xi_1^{\rho_1} ... \xi_n^{\rho_n}$ y la diferenciación. Si ponemos $D_j = \frac{1}{2\pi i} \partial_j$, entonces

$$\mathcal{F}(D^\rho T)(\xi) = \xi^\rho \mathcal{F}T,$$

lo que muestra la validez general de la fórmula (4). Más generalmente, si $P(D) = \sum_{|\rho| \leq m} a_\rho D^\rho$ es un operador diferencial parcial con coeficientes constantes y $P(\xi) = \sum_{|\rho| \leq m} a_\rho \xi^\rho$ es el polinomio que le corresponde, entonces

$$\mathcal{F}(P(D)T) = P(\xi) . \mathcal{F}(T).$$

Sea $\mathcal{O}_M$ el espacio vectorial de las funciones f sobre $\mathbf{R}^n$ cuyas derivadas de todos los órdenes son continuas y tales que para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ existe un número $m = m(\rho) \in \mathbf{Z}$ tal que

$$(1 + |x|^2)^m |\partial^\rho f(x)| \tag{8}$$

es acotada. Este es el espacio de multiplicadores de $\mathcal{S}'$, es decir si $f \in \mathcal{O}_M$ y $T \in \mathcal{S}'$, entonces $fT \in \mathcal{S}'$ y $\mathcal{O}_M$ es el subespacio más grande de $\mathcal{E}$ que tiene esta propiedad.

Por otro lado, sea $\mathcal{O}_C$ el espacio vectorial de las funciones f que tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y para los cuales existe un $m \in \mathbf{Z}$ tal que la función (8) es acotada para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$. Obviamente $\mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_M$, y el ejemplo de la función $e^{i|x|^2}$ muestra que la inclusión es estricta. Una sucesión (f_ν) tiende a cero en $\mathcal{O}_C$ si existe $m \in \mathbf{Z}$ tal que para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión $((1+|x|^2)^m \partial^\rho f_\nu(x))$tiende a 0 uniformemente sobre $\mathbf{R}^n$ cuando $\nu \to \infty$.

Hirata y **Ogata** ([22, pág. 148]) introdujeron la definición siguiente: las distribuciones temperadas S y T son *$\mathcal{S}'$-convolubles* si para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ la distribución $\varphi^\triangle S \otimes T$ is integrable. En este caso también se define $S * T$ por la misma fórmula que antes:

$$< S * T, \varphi >=< \varphi^\triangle (S \otimes T), \mathbf{1} >,$$

pero se puede afirmar además que $S * T$ es temperada. **Dierolf** y **Voigt** [13] contestaron una pregunta de **Shiraishi** ([85, pág. 20]) exhibiendo un ejemplo bastante complicado de dos distribuciones temperadas convolubles S y T tales que $S * T$ no es temperada, es decir S y T no son $\mathcal{S}'$-convolubles. Un poco más tarde, **N. Ortner** y **P. Wagner** observaron que en $\mathbf{R}^2$ las distribuciones

$$S = \arctan\left(\frac{\exp(2x^2)}{y^2}\right) \quad \text{y} \quad T = \delta_x \otimes \mathbf{1}_y$$

son convolubles pero $S * T$ no es temperada.

Una distribución $T \in \mathcal{S}'$ es $\mathcal{S}'$-convoluble con toda distribución S que pertenece al dual topológico $\mathcal{O}'_C$ de $\mathcal{O}_C$. Inversamente $\mathcal{O}'_C$ es el subespacio de $\mathcal{D}'$ más grande cuyos elementos son $\mathcal{S}'$-convolubles con toda distribución temperada.

La transformación de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{O}'_C$ sobre $\mathcal{O}_M$. Para $S \in \mathcal{O}'_C$ y $T \in \mathcal{S}'$ se tiene la fórmula de canje de **Laurent Schwartz**:

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T. \tag{9}$$

Para generalizar esta fórmula, **Hirata** y **Ogata** ([22, pág. 150]) introdujeron una multiplicación para ciertas distribuciones. Una sucesión (ψ_ν) en $\mathcal{D}$ es una *regularización* si $\psi_\nu \geq 0, \int \psi_\nu(x)dx = 1$ y $\operatorname{Supp} \psi_\nu \to \{0\}$ cuando $\nu \to \infty$. Si para dos regularizaciones (ψ_ν), (χ_ν) las sucesiones $((\psi_\nu * S).T)$ y $(S \cdot (\chi_\nu * T))$ convergen en $\mathcal{D}'$ hacia el mismo límite P cuando $\nu \to \infty$, entonces se dice que el producto de $S, T \in \mathcal{D}'$ existe y se pone $S \cdot T = P$. Shiraishi e Itano han demostrado que $S \cdot T$ existe si y sólo si para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ existe una vecindad V de 0 en $\mathbf{R}^n$ tal que $\varphi S * T$ es una función acotada en V, continua en el punto 0. En este caso $< S \cdot T, \varphi >= (\varphi S * T)(0)$. Vale entonces la siguiente generalización del teorema de canje: Si S y T son $\mathcal{S}'$-convolubles, $\mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T$ existe y se tiene (9) ([22, pág. 151]).

Sea p un número real, $1 < p < \infty$. **Schwartz** nota $\mathcal{D}_{L^p}$ el espacio vectorial de las funciones f definidas sobre $\mathbf{R}^n$ que tienen derivadas continuas de todos los órdenes pertenecientes a $L^p(\mathbf{R}^n)$. Una sucesión (f_ν) de elementos de $\mathcal{D}_{L^p}$ tiende a cero en $\mathcal{D}_{L^p}$ si para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la sucesión de los $\|\partial^\rho f_\nu\|_p = (\int_{\mathbf{R}^n} |\partial^\rho f_\nu(x)|^p dx)^{1/p}$ tiende a 0 cuando $\nu \to \infty$.

Las funciones que pertenecen a $\mathcal{D}_{L^p}$ son acotadas, de donde sigue que $p \leq q$ implica $\mathcal{D}_{L^p} \subset \mathcal{D}_{L^q}$.

El dual topológico de $\mathcal{D}_{L^q}$ se nota $\mathcal{D}'_{L^p}$ cuando $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, es decir $(\mathcal{D}_{L^{p'}})' = \mathcal{D}'_{L^p}$ donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. (Nota: es por eso que no me gusta designar el espacio $\mathcal{B}'_0$ de las distribuciones integrables por $\mathcal{D}'_{L^1}$ como lo hace **Schwartz**: no es el dual de $\mathcal{B} = \mathcal{D}_{L^\infty}$ sino de $\mathcal{B}_0$.) Una aplicación lineal $T : \mathcal{D}_{L^q} \to \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ pertenece a $\mathcal{D}'_{L^p}$ si existen una constante $C > 0$ y un número entero $m > 0$ tales que $| < T, \varphi > | \leq C \sum_{|\rho| \leq m} \|\partial^\rho \varphi\|_q$. Los elementos de $\mathcal{D}'_{L^p}$ son distribuciones y se tiene $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{L^p} \subset L^p \subset \mathcal{D}'_{L^p} \subset \mathcal{D}'$, las inclusiones son continuas y $\mathcal{D}$ es denso en cada uno de los espacios. Si $p \leq q$, entonces $q' \leq p'$, es decir $\mathcal{D}_{L^{q'}} \subset \mathcal{D}_{L^{p'}}$ y por lo tanto $\mathcal{D}'_{L^p} \subset \mathcal{D}'_{L^q}$.

Una distribución $T \in \mathcal{D}'$ pertenece a $\mathcal{D}'_{L^p}$ si y sólo si se cumple cualquiera de las dos condiciones:

(a) Para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ la distribución $\varphi * T$ pertenece a L^p;
(b) T es una suma finita de derivadas (en el sentido de distribuciones) de funciones que pertenecen a L^p.

Si $f \in \mathcal{D}_{L^p}$ y $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$, entonces $f.T$ pertenece a $\mathcal{D}'_{L^r}$, donde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ (véase la sección 4), y por lo tanto a todos los espacios $\mathcal{D}'_{L^s}$ con $s \geq r$.

Ya que obviamente $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{L^p}$ para todo p y la inclusión es continua, se tiene $\mathcal{D}'_{L^p} \subset \mathcal{S}'$ y las dos propiedades siguientes tienen sentido.

Si $S \in \mathcal{D}'_{L^p}$ y $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$, entonces S y T son $\mathcal{S}'$-convolubles y $S * T \in \mathcal{D}'_{L^r}$ para $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

Si $S \in \mathcal{D}'_{L^p}$ y $T \in \mathcal{D}'_{L^q}$ con $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$, entonces $\mathcal{F}(S * T)$ es una función igual a $\mathcal{F}(S).\mathcal{F}(T)$.

11.

En 1954 llegué finalmente a estudiar la obra de **Georges Giraud**, no sólo a través de sus propias publicaciones, sino sobre todo en la presentación de **S. G. Mihlin** [50] sobre la cual **Zygmund** me llamó la atención.

Giraud considera una función continua $\Omega(x, \omega)$ definida sobre $\mathbf{R}^n \times S_{n-1}$ tal que

$$\int_{S_{n-1}} \Omega(x, \omega) d\omega = 0$$

para todo $x \in \mathbf{R}^n$ ([50, pág. 156]) y define el operador "con integral principal"

$$(\mathcal{K}f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|t-x| \geq \varepsilon} \Omega\left(x, \frac{x-t}{|x-t|}\right) \frac{f(t)}{|x-t|^n} dt.$$

Desarrollando Ω en una serie de polinomios armónicos $\Omega(x, \omega) = \sum_k a_k Y_k(\omega)$, donde k es el grado de Y_k, se tiene formalmente

$$(\mathcal{K}f)(x) = \sum_k a_k(x) \int \frac{Y_k(x-t)}{|x-t|^{n+k}} f(t) dt.$$

Sin dar alguna indicación, **Giraud** [18], [19] define el *símbolo* de $\mathcal{K}$ por

$$\sigma(\mathcal{K})(x, \xi) = \sum_k a_k(x) \frac{i^k \pi^{n/2} \Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma\left(\frac{n+k}{k}\right)} Y_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

R. S. Seeley ([84, pág. 311]) dice lo siguiente: "la naturaleza misteriosa del símbolo no fue eliminada hasta dieciseis años más tarde por la obra de **Calderón** y **Zygmund** [6], [7], [9], de **Horváth** [28], [29], [31] y de **Kohn** [42]. En efecto por el teorema de canje $S * T = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}S \cdot \mathcal{F}T)$ podemos escribir

$$(\mathcal{K}f)(x) = \sum_k a_k(x) \int \mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k}}\right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x.\xi} d\xi,$$

y en [29] demostré que

$$\mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k}}\right) = \frac{i^k \pi^{n/2} \Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2})} Y_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right). \qquad (10)$$

Substituyendo en la integral y escribiendo a en vez de $\sigma(\mathcal{K})$ obtenemos

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x.\xi} d\xi.$$

La expresión a la derecha es un operador *pseudodiferencial* con *símbolo* a. Estos operadores fueron introducidos alrededor de 1965 por **A. Unterberger** y **J. Bokobza** [98], por **J. J. Kohn** y **L. Nirenberg** [43] y por **Lars Hörmander** [23], [24], [25], y tienen una enorme importancia en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales lineales. Sus propiedades se pueden estudiar por ejemplo en las monografías de **Eskin** [14], **Hörmander** [27], **Kumano-Go** [44], **Simanca** [86], **Taylor** [93], **Treves** [97] y **Zaidman** [104], [105].

Consideraré sólo el caso cuando Ω no depende de x. La distribución $K = \text{v.p.}\dfrac{\Omega(\omega)}{|x|^n}$ se define por

$$< K, \varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(x) dx,$$

donde $\omega = x/|x|$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Poniendo $\psi(t) = \varphi(tx)$, de $\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$ resulta que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx) x_k dt.$$

Sea $\varphi_k(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(tx) dt$ y $\varphi(x) = 0$ para $|x| > R$. Puesto que

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(0) dx = 0,$$

utilizando coordenadas polares $x = r\omega$ podemos escribir:

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(\omega)}{|x|^n} \varphi(x) dx = \int_\varepsilon^R \int_{S_{n-1}} \Omega(\omega) \sum_{k=1}^n \varphi_k(r\omega) \omega_k d\omega dr,$$

de donde se ve que el límite existe cuando $\varepsilon \to 0+$ y que

$$| < K, \varphi > | \leq R \int_{S_{n-1}} |\Omega(\omega)| d\omega . \sum_{k=1}^n \text{máx}_x \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right|,$$

es decir K es una distribución.

Supongamos adicionalmente que Ω pertenece a un espacio $L^s(S_{n-1})$ para un índice s con $1 < s < \infty$. En este caso K pertenece a todos los espacios $\mathcal{D}'_{L^p}$ con $1 < p < \infty$, y en particular a $\mathcal{S}'$, desde luego es lícito hablar de $\mathcal{F}(K)$. Del teorema de Calderón- Zygmund resulta que $T \mapsto K * T$ es una aplicación continua de $\mathcal{D}'_{L^p}$ en $\mathcal{D}'_{L^p}$. En la página 55 de [29] me refiero al teorema de la gráfica cerrada relativa a espacios metrizables. Ahora bien, los espacios $\mathcal{D}'_{L^p}$ no son metrizables, pero el teorema vale igualmente para límites inductivos de espacios metrizables.

Para obtener (10) introduje un álgebra conmutativa Q sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales engendrada por n elementos $e_1, ..., e_n$ que satisfacen a

$$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = 0.$$

Q es un álgebra graduada, es decir la suma directa de subespacios Q_j engendrados por los productos

$$e^K = e_1^{k_1} e_2^{k_2} ... e_n^{k_n}$$

donde $|K| = k_1 + \cdots + k_n = j$ y k_n es igual a cero o a uno. Si ponemos

$$x^j = (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^j = \sum_{|K|=j} Y_K(x) e^K,$$

entonces los polinomios $Y_K(x)$ son armónicos ya que

$$\Delta x^j = j(j-1)x^{j-2}(e_1^2 + \cdots + e_n^2) = 0.$$

Además los Y_K son linealmente independientes por la manera de haber escogido la base de Q_j y su número es exactamente el número de un sistema maximal linealmente independiente de polinomios armónicos de grado j.

Basta pues calcular la transformada de Fourier de $x^k|x|^{-n-k}$. **Laurent Schwartz** encontró que $\mathcal{F}(|x|^{-n-k})$ es igual a

$$\pi^{(n/2)+k} \frac{\Gamma(-k/2)}{\Gamma((n+k)/2)} |\xi|^k$$

si k es impar ([80, VII.7.13, pág. 257]) y a

$$\frac{2(-1)^{k/2}\pi^{(n/2)+k}}{\Gamma(\frac{n+k}{2})\Gamma(\frac{k+2}{2})} |\xi|^k \left[\log \frac{1}{\pi|\xi|} + C(n,k)\right]$$

si k es par ([80, VII.7.14, pág. 258]), donde $C(n,k)$ es una constante. **Schwartz** dice que para $k > 0$ hay que meter Pf delante de la integral que define $|x|^{-n-k}$; explicaré más abajo el significado de esta notación.

De la fórmula

$$\mathcal{F}(x^j T) = \frac{(-1)^j}{(2\pi i)^j} \mathbf{D}^j \mathcal{F}(T)$$

con

$$\mathbf{D} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \cdots + e_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

resulta (10) considerando componentes.

Con el mismo método **S. G. Samko** ([77],[78, pág. 111]) demostró que

$$\mathcal{F}\left(\frac{Y_k(x)}{|x|^{n+k-\alpha}}\right) = \frac{i^k 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{k+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right)} \frac{Y_k(\xi)}{|\xi|^{k+\alpha}}$$

cuando $\alpha \neq -k-2l$ y $\alpha \neq n+k+2l$ ($l \in \mathbf{N}$), y encontró también las fórmulas en los casos excepcionales. Ya en 1951 **S. Bochner** [4] demostró estas fórmulas utilizando relaciones modulares sin conexión con integrales singulares.

Quiero aprovechar de esta oportunidad para señalar tres errores de imprenta en [29]:
– pág. 57, línea 4: tachar la palabra "orthogonal";
– pág. 58, línea 5: tachar "(13)z meter al final: "which satisfy (13)";
– pág. 60, línea 7: reemplazar "$\sigma\mu$" por "σ_μ".

12.

El método que nos sirvió para encontrar un sistema total de polinomios armónicos en n variables sirve también para construir un sistema total de soluciones polinomiales de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea con coeficientes constantes.

Sea m un número entero ≥ 1 y

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Para simplificar supondremos que $a_M = 1$, donde $M = (m, 0, .., 0)$. Por consiguiente $\alpha_1 < m$ para todo $\alpha \neq M$. Sea como antes $Q = \cup Q_j$ el álgebra sobre $\mathbf{R}$ engendrada por los elementos $e_1, ..., e_n$ que satisfacen a $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha e^\alpha = 0$. Ponemos $Q_0 = \mathbf{R}$ y para $j \geq 1$ el subespacio vectorial Q_j engendrado por los e^J con $|J| = j_1 + \cdots + j_n = j$ tiene por base los productos

$$e^J = e_1^{j_1} e_2^{j_2} ... e_n^{j_n}$$

con $|J| = j$ y $0 \leq j_1 < m$. Estos vectores son obviamente linealmente independientes y en virtud de la relación

$$e_1^m = -\sum_{\alpha_1 < m} a_\alpha e^\alpha$$

cada producto e^J con $j_1 \geq m$ se puede expresar como combinación lineal de tales productos con $\alpha_1 < m$. Para todo $j \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} &P(\partial)(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^j \\ &= j(j-1)\cdots(j-m+1)(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^{j-m} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha e^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Entonces poniendo

$$(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^j = \sum_{j_1 < m} Y_J(x) e^J,$$

los polinomios $Y_J(x)$ de grado $|J| = j$ satisfacen a $P(\partial) Y_J(x) = 0$.

Los polinomios $Y_J(x)$, $|J| = j$, forman un sistema maximal linealmente independiente de soluciones polinomias de grado j de la ecuación $P(\partial)Y = 0$.

Daré la demostración detallada de este resultado ya que aquella que se encuentra en [30] es demasiado sucinta y además contiene un error descubierto por **Walter Strodt** (véase [32, pág. 45, nota]).

El número de todos los monomios $e_1^{\alpha_1}...e_n^{\alpha_n}$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = j$ es

$$\binom{n+j-1}{j}. \tag{11}$$

Efectivamente, si ponemos

$$j_1 = \alpha_1 \leq j_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \leq \cdots \leq j_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = j,$$

entonces $(j_1, ..., j_{n-1})$ es una combinación con repeticiones tomando $n-1$ elementos entre los $j+1$ elementos $0, 1, ..., j$. Si ahora consideramos $(j_1, j_2+1, ..., j_{n-1}+n-2)$, vemos que el número de estas combinaciones **con** repeticiones es el mismo que el número de combinaciones **sin** repeticiones de $n-1$ elementos escogidos entre los $j+n-1$ elementos $(0, 1, ..., j+n-2)$, o sea

$$\binom{n+j-1}{n-1}$$

es decir (11).

Para averiguar la dimensión de Q_j se necesita calcular el número de soluciones de

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = j \tag{12}$$

con $\alpha_1 < m$. Ahora bien, si $j < m$, la ecuación (12) no tiene ninguna solución con $j_1 \geq m$. Si $j \geq m$, entonces (12) tiene tantas soluciones con $\alpha_1 \geq m$ como

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = j - m$$

tiene soluciones en total, es decir

$$\binom{n+j-m-1}{j-m} \tag{13}$$

Desde luego la dimension de Q_j es la diferencia entre (11) y (13).

Por la primera computación de arriba, el número de los términos en el polinomio general homogéneo en n variables

$$Y_j(x) = \sum_{|J|=j} \beta_J x^J$$

es igual a (11). Consideremos los coeficientes indeterminados como un punto (β_J) del espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de dimensión (11). La relación

$$P(\partial)Y_j(x) = \sum_{|K|=j-m} \gamma_K x^K = 0$$

da relaciones lineales $\gamma_K = 0$ entre los coeficientes cuyo número es igual a (13). Miremos cuáles son los β_J que entran en un término

$$\gamma_K x^K = \gamma_{k_1...k_n} x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

dado.

En primer lugar, el término ∂_1^m de $P(\partial)$ produce un término que proviene de

$$\beta_{k_1+m,k_2,...,k_n} x^{k_1+m} x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

en $Y_j(x)$. Después los términos de la forma

$$\beta_{k_1+\alpha_1,k_2+\alpha_2,...,k_n+\alpha_n} x_1^{k_1+\alpha_1} x_2^{k_2+\alpha_2}...x_n^{k_n+\alpha_n}$$

contribuirán el término

$$a_{\alpha_1...\alpha_n} \beta_{k_1+\alpha_1,...,k_n+\alpha_n} \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n} x_1^{k_1+\alpha_1}...x_n^{k_n+\alpha_n}$$

a la combinación lineal γ_K de los β_J. En γ_K un solo β_J tiene el primer índice $j_1 = k_1 + m$. Para los otros $k_1 + \alpha_1 < k_1 + m$ ya que $\alpha_1 < m$. Llamemos este β_J el término conductor. Los términos conductores de dos relaciones $\gamma_K = 0$ y $\gamma_L = 0$ son distintos. En efecto, si

$$\beta_{k_1+m,k_2,...,k_n} = \beta_{l_1+m,l_2,...,l_n},$$

entonces $(k_1+m, k_2, ..., k_n) = (l_1+m, l_2, ..., l_n)$, es decir $K = L$.

Desde luego, las relaciones lineales $\gamma_K = 0$ son linealmente independientes, en consecuencia el número que da las soluciones linealmente independientes de $P(\partial)Y_J = 0$ con $|J| = j$ es exactamente $\dim Q_j$.

Un poco antes, **E. P. Miles, jr.** y **E. Williams** ([53], [54]) encontraron el mismo sistema básico de polinomios armónicos que yo, sin servirse del álgebra Q. **E. P. Miles jr.** encontró soluciones polinomiales de otros operadores diferenciales, aún con coeficientes variables, y aplicaciones de estas soluciones, solo [51], [52], en colaboración con **E. Williams** [55], [56], [57], y con **Eutiquio C. Young** [58]. En los años cincuenta varios otros autores presentaron sistemas de soluciones polinomias de ecuaciones diferenciales: **Joaquín B. Díaz** [12], **E. Lammel** [45], [46], **M.H. Protter** [68], [69] y **M. C. Wicht** [102]. En el caso $n = 3$ ya en 1929 **Ketchum** [41] obtuvo $2j + 1$ soluciones polinomiales linealmente independientes de grado j de la ecuación $\Delta Y = 0$ considerando potencias w^j de una hipervariable w.

13.

Formalmente, el potencial $\mathcal{R}_\alpha f$ de orden α de **Marcel Riesz** es –dejando de lado por el momento el factor numérico– la convolución $|x|^{\alpha-n} * f$. Es entonces natural considerar más generalmente la convolución de $|x|^{\alpha-n}$ con una distribución. Para $\alpha > 0$ la función $x \mapsto |x|^{\alpha-n}$ es localmente integrable, pero tenemos interés en definir la distribución $|x|^{\alpha-n}$ también para $\alpha \leq 0$.

Marcel Riesz definió su operador $\mathcal{R}_\alpha$ para aquellos valores de α para los cuales la integral no converge, por prolongación analítica. De nuestro punto de vista es preferible considerar $|x|^{\alpha-n}$ como función holomorfa de la variable α cuyos valores están en $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ y considerar su prolongación analítica. Por tal motivo tengo que resumir algunos hechos de la teoría de las funciones holomorfas con valores distribuciones. Trataré de hacerlo de la manera más breve posible porque ya publiqué en castellano un artículo muy detallado sobre el asunto en la *Revista Colombiana de Matemáticas* [34]. Un resumen del artículo salió anteriormente [33].

Notemos por E uno cualquiera de los espacios de "funciones de prueba" $\mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$, y por E' su dual topológico, es decir el espacio correspondiente de distribuciones $\mathcal{D}', \mathcal{S}'$ o $\mathcal{E}'$. Sea Λ un subconjunto abierto y conexo del plano complejo $\mathbf{C}$. Una función $\lambda \mapsto T_\lambda$ definida en Λ y con valores $T_\lambda \in E'$ es *holomorfa* en Λ si para todo $\lambda_0 \in \Lambda$ el límite

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{T_\lambda - T_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0}$$

existe; en tal caso el límite se nota $\dfrac{dT}{d\lambda}(\lambda_0)$ o $\left.\dfrac{dT_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$.

Las propiedades de las funciones holomorfas con valores distribuciones se deducen del *principio fuerte-débil* de Grothendieck ([34,(1.1.4)]): La función $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$ es holomorfa en Λ si y sólo si para todo $\varphi \in E$ la función $\lambda \mapsto < T_\lambda, \varphi > \in \mathbf{C}$ es holomorfa en Λ.

Una función holomorfa es *analítica* en el sentido que tiene desarrollo en serie de potencias. Más precisamente, sea $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$ una función holomorfa en Λ. Para $\lambda_0 \in \Lambda$ sea ρ el radio de un disco abierto con centro λ_0 contenido en Λ. Para cualquier $\sigma < \rho$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k T_\lambda}{d\lambda^k}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k$$

converge en E' hacia T_λ, uniformemente para $|\lambda - \lambda_0| \leq \sigma$.

Sea ahora Λ_1 otro subconjunto abierto y conexo de $\mathbf{C}$ tal que $\Lambda_1 \supset \Lambda$, y sea $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$ una función holomorfa definida en Λ. Para $\lambda \in \Lambda$ y $\varphi \in E$ pongamos $g(\lambda; \varphi) =< T_\lambda, \varphi >$. Si para todo $\varphi \in E$ existe una función holomorfa $\lambda \mapsto h(\lambda; \varphi)$ en Λ_1 que coincide con $g(\lambda; \varphi)$ en Λ (es decir, si $h(\cdot; \varphi)$ es prolongación analítica de $g(\cdot; \varphi)$), entonces existe una función holomorfa $\lambda \mapsto S_\lambda$ en Λ_1 con valores en E' tal que $S_\lambda = T_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda$ y $< S_\lambda, \varphi >= h(\lambda; \varphi)$ para $\lambda \in \Lambda_1$ y $\varphi \in E$. Se dice que S_λ es la *prolongación analítica* de T_λ en Λ.

Supongamos que $\lambda_0 \in \Lambda$ y que $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$ es holomorfa en $\Lambda \setminus \{\lambda_0\}$. Si para $\lambda \neq \lambda_0$ en un disco con centro λ_0 se tiene

$$T_\lambda = \frac{S_{-m}}{(\lambda - \lambda)^m} + \cdots + \frac{S_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\lambda - \lambda_0)^k,$$

donde $m \in \mathbf{N}$, las $S_k, (k \geq -m)$ son distribuciones en E' y $S_{-m} \neq 0$, entonces si $m > 0$, se dice que T_λ tiene un *polo* de orden m en λ_0, en particular si $m = 1$ se dice que el polo λ_0 es *simple*. La distribución S_{-1} es el *residuo* de T_λ en λ_0 y S_0 su *parte finita*:

$$S_0 = \mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0} T_\lambda = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(T_\lambda - \sum_{k=1}^{m} \frac{S_{-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} \right).$$

que se nota también $\mathrm{Pf}T_{\lambda_0}$. Cuando en el desarrollo arriba los términos que contienen S_k con $k < 0$ faltan, se dice que T_λ es *regular* en λ_0. Obviamente T_{λ_0} es entonces S_0.

El caso más frecuente es cuando en Λ la distribución T_λ está dada por una familia (f_λ) de funciones localmente integrables tal que $< T_\lambda, \varphi >= \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx$ y $\lambda \mapsto \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx$ es una función holomorfa en Λ para todo $\varphi \in E$. La prolongación analítica S_λ en $\Lambda_1 \supset \Lambda$ de T_λ ya no está dada en general por funciones localmente integrables. Se dice que S_λ es una *pseudofunción*. Si S_λ es regular en λ_0, se escribe $S_{\lambda_0} = \mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0} f_\lambda$ donde Pf tiene el significado "pseudofunción". Si S_λ tiene polo en λ_0, se escribe $\mathrm{Pf}S_{\lambda_0} = \mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0} f_\lambda$ y ahora Pf es abreviatura para "parte finita". A **Schwartz** le ha gustado mucho este juego de palabras.

Si $\lambda \mapsto T_\lambda \in E'$ es holomorfa en Λ, entonces para todo $\rho \in \mathbf{N}^n$ la función $\lambda \mapsto \partial^\rho T_\lambda$ es holomorfa en Λ. Si T_λ tiene una prolongación analítica S_λ en $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces para cualquier $\rho \in \mathbf{N}^n$ la función $\lambda \mapsto \partial^\rho T_\lambda$ tiene prolongación analítica en Λ_1 la cual es igual a $\partial^\rho S_\lambda$. Si T_λ tiene polo en λ_0, entonces $\partial^\rho T_\lambda$ también lo tiene y $\mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0} \partial^\rho T_\lambda = \partial^\rho \mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0} T_\lambda$.

Sea $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ una función holomorfa en Λ. Entonces $\lambda \mapsto \mathcal{F}T_\lambda$ es también holomorfa en Λ.

Si T_λ tiene prolongación analítica S_λ en $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces $\mathcal{F}T_\lambda$ también tiene prolongación analítica R_λ en Λ_1 y $R_\lambda = \mathcal{F}S_\lambda$. Si T_λ tiene polo en λ_0, entonces $\mathcal{F}(\mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0}T_\lambda) = \mathrm{Pf}_{\lambda=\lambda_0}(\mathcal{F}T_\lambda)$.

Sea $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones que pertenecen a $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Supongamos que $\lambda \mapsto \alpha_\lambda \in \mathcal{E}$ es holomorfa en Λ en un sentido análogo a la definición dada arriba. Si $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'$ es holomorfa en Λ, también $\lambda \mapsto \alpha_\lambda.T_\lambda \in \mathcal{D}'$ lo es.

Si $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ y $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ son funciones holomorfas en Λ, entonces $\lambda \mapsto S_\lambda \otimes T_\lambda = R_\lambda$ es holomorfa con valores en $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$. Si S_λ y T_λ tienen prolongacióm analítica en $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces R_λ también tiene y sigue siendo $R_\lambda = S_\lambda \otimes T_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda_1$.

Una función $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'$ holomorfa en Λ se puede considerar como función holomorfa con valores en $\mathcal{D}'$ si la componemos con la inclusión $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$. Si S_λ tiene prolongación analítica en $\Lambda_1 \supset \Lambda$ en tanto que función con valores en $\mathcal{D}'$, entonces $S_\lambda \in \mathcal{E}'$ también para $\lambda \in \Lambda_1$ y $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'$ es holomorfa en Λ_1. Sean ahora $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ y $\lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ funciones holomorfas en Λ. Entonces $\lambda \mapsto R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$ es holomorfa. Si S_λ y T_λ tienen prolongación analítica en $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces R_λ también tiene una y $R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$ para $\lambda \in \Lambda_1$.

Quiero terminar esta sección con un resultado muy reciente de **Norbert Ortner** y **Peter Wagner**. Primero hay que notar la condición siguiente ([13, (1.3), pág. 190]): Las distribuciones S y T son convolubles si y sólo si para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ la distribución $(\varphi * \check{S})T$ es integrable y entonces se tiene $< S * T, \varphi > = < (\varphi * \check{S})T, \mathbf{1} >$. He aquí el teorema de Ortner y Wagner ([65, Prop. 9, pág. 372]):

(a) *Sea Λ un conjunto abierto, conexo en $\mathbf{C}$ y $\lambda \mapsto S_\lambda \in \mathcal{D}', \lambda \mapsto T_\lambda \in \mathcal{D}'$ dos funciones holomorfas en Λ. Si se cumple la condición:*

(Γ_Λ) *para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ la aplicación $\lambda \mapsto (\varphi * \check{S}_\lambda)T_\lambda$ de Λ en $\mathcal{B}_0'$ es débilmente continua,*

entonces la aplicación $\lambda \mapsto R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$ de λ en $\mathcal{D}'$ es holomorfa.

(b) *Sea Λ_1 un subconjunto abierto, conexo de $\mathbf{C}$ que contiene Λ. Si S_λ y T_λ tienen prolongaciones analíticas en Λ_1 y si la condicion (Γ_{Λ_1}) (es decir (Γ_Λ) con Λ reemplazado por Λ_1) se cumple, entonces R_λ tiene prolongación analítica en Λ_1 y $R_\lambda = S_\lambda * T_\lambda$ vale para $\lambda \in \Lambda_1$.*

Wagner ha dado un ejemplo (todavía no publicado) que muestra que la condición $(\varphi * \check{S}_\lambda)T_\lambda \in \mathcal{B}_0{}'$ no implica la continuidad débil contenida en (Γ_Λ) y que entonces la convolución no es holomorfa.

14.

Para $\Re\lambda > -n$ la función $x \mapsto |x|^\lambda$ es localmente integrable sobre $\mathbf{R}^n$, así define una distribución que notaremos por $|x|^\lambda$, es decir

$$< |x|^\lambda, \varphi > = \int_{\mathbf{R}^n} |x|^\lambda \varphi(x)dx.$$

En realidad $|x|^\lambda$ es temperada y la función $\lambda \mapsto |x|^\lambda \in \mathcal{S}'$ es holomorfa en el semiplano $\Re\lambda > -n$. La prolongación analítica de la función al plano $\mathbf{C}$ tiene polos simples en los puntos $\lambda = -n - 2k (k \in \mathbf{N})$, en los cuales sus residuos son

$$\mathrm{Res}_{\lambda=-n-2k}|x|^\lambda = \frac{2\pi^{n/2}}{2^{2k}k!\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}\Delta^k\delta. \qquad (14)$$

Haciendo el cambio de variables $\lambda = \alpha - n$, obtenemos la función $\alpha \mapsto |x|^{\alpha-n}$ que tiene polos simples en los puntos $\alpha = -2k (k \in \mathbf{N})$. La función $\alpha \mapsto \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ tiene polos simples en los mismos puntos, de manera que el cociente $|x|^{\alpha-n}/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ es regular en todos los puntos de $\mathbf{C}$: es una función entera. De (14) y del valor del residuo de $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ resulta que el valor de $|x|^{\alpha-n}/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ en $\alpha = -2k$ es

$$\frac{2^{-2k}\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}(-\Delta)^k\delta.$$

Por tal razón es natural considerar la pseudofunción elíptica de **Marcel Riesz**

$$R_\alpha = \mathrm{Pf}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}|x|^{\alpha-n}$$

cuyo valor en el punto $\alpha = -2k$ es $R_{-2k} = (-\Delta)^k\delta$. El factor $\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$ en el numerador causa que $\alpha \mapsto R_\alpha$ tenga polos simples en los puntos $\lambda = n + 2k$ $(k \in \mathbf{N})$.

La pseudofunción vectorial $N_\alpha = -\nabla R_{\alpha+1}$ está definida para $\Re\alpha > 0, \alpha \neq n + 2k + 1$ por la función localmente integrable

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha+1}{2}\right)}{2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\frac{x}{|x|}|x|^{\alpha-n}.$$

Obsérvese que N_0 es el núcleo de la transformada de Riesz $\mathcal{H}$ de (6).

Generalizando los dos ejemplos anteriores, sea Ω una función integrable sobre la esfera unidad S_{n-1} de $\mathbf{R}^n$. Introduzcamos los momentos

$$M_\alpha = \int_{S_{n-1}} \omega^\alpha \Omega(\omega) d\omega$$

de Ω, donde $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \ldots \omega_n^{\alpha_n}$. Ahora no suponemos que $M_0 = 0$ como en la sección 11. Para $\Re\lambda > -n$ definimos la distribución $K_\lambda^\Omega \in \mathcal{S}'$ por

$$< K_\lambda^\Omega, \varphi >= \int_{\mathbf{R}^n} \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^\lambda \varphi(x) dx.$$

La función $\lambda \mapsto K_\lambda^\Omega \in \mathcal{S}'$ tiene prolongación analítica con polos simples en los puntos $\lambda = -n - k (k \in \mathbf{N})$ donde sus residuos son

$$\mathrm{Res}_{\lambda=-n-k} K_\lambda^\Omega = (-1)^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} M_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

donde $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. En particular, para $\lambda = -n$ se tiene ([36, pág. 175])

$$< \mathrm{Pf}_{\lambda=-n} K_\lambda^\Omega, \varphi >$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{|x|\geq\varepsilon} \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^{-n} \varphi(x) dx + M_0 \varphi(0) \log \varepsilon \right\}.$$

Vemos entonces que la condición $M_0 = 0$ usada por **Giraud, Mihlin** y otros significa que K_λ^Ω es regular en el punto $\lambda = -n$ y la "parte finita.es un "valor principal" de Cauchy.

Teorema ([36, Th. 3, pág. 185]; [61, Satz 1, pág. 23]). *Sea Ω acotada y medible sobre S_{n-1} y pongamos $\mu = \Re\lambda$. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ es tal que $(1+|x|^2)^{\mu/2} T$ es integrable, entonces T y K_λ^Ω son $\mathcal{S}'$- convolubles y se tiene $\mathcal{F}(T * K_\lambda^\Omega) = \mathcal{F}(T).\mathcal{F}(K_\lambda^\Omega)$ en el sentido de* **Hirata** *y* **Ogata**.

Yo demostré solamente que son convolubles. La $\mathcal{S}'$−convolubilidad se debe a **Norbert Ortner**. **Peter Wagner** ([99, pág. 474]) mostró que la condición $\Omega \in L^1(S_{n-1})$ no es suficiente para que el teorema sea cierto.

Recíproco ([61, Satz 4, pág. 29]). *Si $T \in \mathcal{D}'$ y $Pf|x|^\lambda$ son convolubles, entonces $(1+|x|^2)^{\mu/2} \in \mathcal{B}'_0$ $(\mu = \Re\lambda)$.*

Corolario ([36, Corol. del Th.3, pág. 189]). *Sean Ω_1 y Ω_2 dos funciones acotadas y medibles sobre S_{n-1}, y $K_\lambda^{(1)}$, $K_\nu^{(2)}$ las distribuciones que les corresponden. Si $\Re(\lambda+\nu) < -n$, entonces $K_\lambda^{(1)}$ y $K_\nu^{(2)}$ son convolubles.*

En particular ([61, Satz 6, pág. 31]):

1) Si $\alpha = -2k$ o $\beta = -2k$, entonces R_α y R_β son $\mathcal{S}'$-convolubles (obvio);

2) Si $\alpha \neq -2k$ y $\beta \neq -2k$, entonces R_α y R_β son convolubles si y sólo si $\Re(\alpha+\beta) < n$.

En ambos casos se tiene $R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ ([61, Satz 9, pág. 40, pág. 44]).

La pseudofunción $N_\alpha = -\nabla R_{\alpha+1}$ corresponde a la función vectorial $\Omega(\omega) = \omega$ sobre S_{n-1}. Se tiene $N_{2k-1} = (-1)^{k+1} \nabla (\Delta^k \delta)$ para $k \in \mathbf{N}$, y en particular

$$N_{-1} = -\nabla\delta = -\frac{\partial}{\partial x_1} e_1 - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n} e_n.$$

Las N_α son $\mathcal{S}'$-convolubles en los casos siguientes [61], [63], [65]:

1) Si $\alpha = 2k-1$ o $\beta = 2k-1$, entonces N_α y N_β son $\mathcal{S}'$-convolubles;

2) Si $\alpha \neq 2k-1$ y $\beta \neq 2k-1$ entonces N_α y N_β son $\mathcal{S}'$−convolubles si y sólo si $\Re(\alpha+\beta) < n$.

En todos los casos se tiene $N_\alpha * N_\beta = -R_{\alpha+\beta}$, lo que contiene el caso particular $N_0 * N_0 = -\delta$, es decir la reciprocidad del operador $\mathcal{H}$ de Riesz. En efecto

$$\begin{aligned} N_\alpha * N_\beta &= \nabla R_{\alpha+1} * \nabla R_{\beta+1} = \Delta R_{\alpha+1} * R_{\beta+1} \\ &= -R_{\alpha-1} * R_{\beta+1} = -R_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Cuando $n-2 \leq \alpha+\beta < n$, es decir $n \leq \alpha+\beta+2 < n+2$, las distribuciones $R_{\alpha+1}$ y $R_{\beta+1}$ no son convolubles: es entonces que el Teorema de Ortner de la sección 10 sirve.

Josefina Alvarez y **Christine Carton-Lebrun** [1] dieron una demostración circular del teorema siguiente:

Sea $T \in \mathcal{S}'$. Entonces las tres condiciones que siguen son equivalentes: (a) $(1+|x|^2)^{-n/2} T \in \mathcal{B}'_0$; (b) T es $\mathcal{S}'$-convoluble con N_0; (c) $(1+|x|^2)^{-1/2} T$ es $\mathcal{S}'$− convoluble con R_1.

Ellas investigaron también la $\mathcal{S}'$-convolubilidad de $T \in \mathcal{S}'$ con una componente de la distribución vectorial N_0 ([1, Th. 15.6, pág. 246]).

En un artículo escrito en colaboración con **Norbert Ortner** y **Peter Wagner**([38]; véase también [64]) hemos considerado las distribuciones

$$K_{\lambda,j} = \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda+j}{2})}{2^\lambda \pi^{n/2} \Gamma(\frac{\lambda+j}{2})} \mathrm{Pf}\left(\frac{x}{|x|}\right)^j |x|^{\lambda-n},$$

donde la potencia x^j se entiende en el sentido del álgebra Q asociada al operador de Laplace Δ (véase la sección 12). Las componentes de esta distribución vectorial son las escalares $\mathrm{Pf}Y_j(x)|x|^{\lambda-j}$, donde las Y_j son un sistema linealmente independiente maximal de polinomios armónicos de grado j. Hemos calculado las transformadas de Fourier de estas distribuciones y demostrado la regla de convolución $K_{\lambda,j} * K_{\nu,k} = K_{\lambda+\nu,j+k}$.

Para concluir, observemos que el método de **Marcel Riesz** consiste en encontrar un semigrupo R_α que liga el operador diferencial $-\Delta = R_{-2}$ con su solución elemental (o fundamental) R_2 que satisface $-\Delta R_2 = R_0 = \delta$. Se puede decir que $R_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$. **Riesz** construyó un semigrupo análogo para el operador de ondas $\Box = \partial_1^2 - \partial_2^2 - \cdots - \partial_n^2$.

En un artículo, desgraciadamente poco conocido [100], Peter Wagner conside-ró un polinomio arbitrario P de n indeterminadas con coeficientes reales. Con la ayuda de polinomios asociados a P, debidos a **Joseph Bernstein** y **Mikio Sato** [2], se ve que P^λ, definido originalmente para $\Re\lambda > 0$, tiene prolongación analítica meromorfa a todo el plano complejo. **Wagner** llama $T_\lambda = \mathcal{F}P^\lambda$ el *grupo de convolución* (Faltungsgruppe) del operador $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)$. Se tiene $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)T_\lambda = T_{\lambda+1}$ y en particular T_{-l} es solución elemental de $P(-\frac{1}{2\pi i}\partial)^l$ para $l \in \mathbf{N}$. Si P es un polinomo homogéneo de grado m, $P(x) > 0$ para $x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$, y P no es una potencia de otro polinomio, entonces T_λ y T_ν son convolubles si y sólo si λ o ν es un número entero ≥ 0 o bien $\Re(\lambda+\nu) > -n/m$. En estos casos $T_\lambda * T_\nu = T_{\lambda+\nu}$. En un trabajo todavía no aparecido **Ortner** y **Wagner** [66] investigan el grupo de convolución para un sistema casihiperbólico de operadores diferenciales.

Referencias

[1] **Alvarez, Josefina; Carton–Lebrun, Christiane**: *Optimal spaces for the $\mathcal{S}'$-convolutions with Marcel Riesz kernels and the N-dimensional Hilbert kernel.* Analysis of divergence (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, págs. 233–248.

[2] **Björck, Jan–Erik**: *Rings of differential operators.* North-Holland, Amsterdam, 1979.

[3] **Bochner, Salomon**: *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.

[4] ——: *Theta relations with spherical harmonics.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 804–808.

[5] **Calderón, Alberto P.**: *On theorems of M. Riesz and Zygmund.* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 533–535.

[6] **Calderón, A. P; Zygmund, A.**: *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[7] ——: *On a problem of Mihlin.* Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 209–224.

[8] ——: *On singular integrals.* Amer. J. Math **78** (1956), 289–309.

[9] ——: *Singular integral operators and differential equations.* Amer. J. Math. **79** (1957), 901–921.

[10] **Cartwright, Mary Lucy**: *Manuscripts of Hardy, Littlewood, Marcel Riesz and Titchmarsh.* Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 472–532.

[11] **Christ, Michael**: *Lectures on singular integral operators.* Conf. Board of the Math. Sciences, Regional Conferences in Math., No. 77. Amer. Math. Soc., 1990.

[12] **Diaz, Joaquin B.**: *On a class of partial differential equations of even order.* Amer. J. Math. **68** (1946), 611–659.

[13] **Dierolf, Peter; Voigt, Jürgen**: *Convolution and $\mathcal{S}'$-convolution of distributions.* Collect. Math. **29** (1978), 185–196.

[14] **Eskin, G. I.**: *Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 52. Amer Math. Soc., 1981.

[15] **Fefferman, C.; Stein, E. M.**: *H^p spaces of several variables.* Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[16] **Fefferman, Charles**: *Selected theorems by Eli Stein.* Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein, ed.: Ch. Fefferman, R. Fefferman, St. Wainger. Princeton University Press, 1995, págs. 1–35.

[17] **Fueter, R.**: *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen.* Commentarii Math. Helvetici **7** (1934/35), 307–330.

[18] **Giraud, Georges**: *Sur une classe générale d'équations à intégrales principales.* C.R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 2124–2127.

[19] ——: *Complément à un résultat sur les équations à intégrales principales.* C.R. Acad. Sci. Paris **203**, 292–294.

[20] **Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.**: *Inequalities.* Cambridge University Press, 1934.

[21] **Hirata, Yukio**: *On convolutions in the theory of distributions.* J. of Science of the Hiroshima University, Ser. A, **22** (1958), 89–98.

[22] **Hirata, Y.; Ogata, Hayao**: *On the exchange formula for distributions.* Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A. **22** (1958), 147–152.

[23] **Hörmander, Lars**: *Pseudo-differential operators.* Comm. Pure Applied Math. **18** (1965), 501–517.

[24] ——: *Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems.* Ann. of Math. **83** (1966), 129–209.

[25] ——: *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations.* Singular Integrals, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 10. Amer. Math. Soc., 1967, págs. 138–183.

[26] ——: *The analysis of linear partial differential operators I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256. Springer, 1983.

[27] ——: *The analysis of linear partial differential operators III.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 274. Springer, 1985.

[28] **Horváth, J.**: *Sur les fonctions conjuguées à plusieurs variables.* Indag. Math. **15** (1953), 17–29.

[29] ——: *Singular integral operators and spherical harmonics.* Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 52–63.

[30] ——: *Basic sets of polynomial solutions for partial differential equations*. Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 569–575.

[31] ——: *On some composition formulas*. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 433–437.

[32] ——: *A generalization of the Cauchy-Riemann equations*. Contributions to Diff. Equations **1** (1961), 39–58.

[33] ——: *Finite parts of distributions*. Linear operators and approximations (Oberwolfach, August 14-22, 1971). Internat. Series Num. Math., Vol. 20. Birkhäuser, 1972, págs. 142–158.

[34] ——: *Distribuciones definidas por prolongación analítica*. Rev. Colombiana Mat. **8** (1974), 47–95.

[35] ——: *Sur la convolution des distributions*. Bull. Sci. Math. **98** (1974), 183–192.

[36] ——: *Composition of hypersingular integral operators*. Applicable Analysis **7** (1978), 171–190.

[37] ——: *Convolution des noyaux hypersinguliers*. G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint-Raimond (Eds.), Séminaire initiation à l'analyse, 19e année, 1979/80, exposé no. 8. Univ Paris VI, 1980, págs. 1–17.

[38] **Horváth, J.; Ortner, N.; Wagner, P.**: *Analytic continuation and convolution of hypersingular higher Hilbert-Riesz kernels*. J. Math. Anal. Appl. **123** (1987), 429–447.

[39] **Humbert, Pierre**: *Potentiels et prépotentiels*. Cahiers Scientifiques, fasc. 15. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

[40] **Katznelson, Yitzhak**: *An introduction to harmonic analysis*. Dover, New York, 1976.

[41] **Ketchum, P. W.**: *A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable*. Amer. J. Math. **51** (1929), 179–188.

[42] **Kohn, J. J.**: *Singular integral equations for differential forms on Riemannian manifolds*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956), 650–653.

[43] **Kohn, J. J.; Nirenberg, L.**: *An algebra of pseudo-differential operators*. Comm. Pure Applied Math. **18** (1965), 269–305.

[44] **Kumano-go, Hitoshi**: *Pseudo-differential operators*. MIT Press, Cambridge, MA, 1974.

[45] **Lammel, Ernst**: *Über eine zur Differentialgleichung* $(a_0(\partial^n/\partial x^n)+a_1(\partial^n/\partial x^{n-1}\partial y)+\cdots+a_n(\partial^n/\partial y^n))u(x,y) = 0$ *gehörige Funktionentheorie I*. Math. Ann. **122** (1950), 109–126.

[46] ——: *Generalizaciones de la teoría de las funciones de variables complejas*. Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Villavicencio-Mendoza, 1954. UNESCO, págs. 191–197.

[47] **Leray, Jean**: *Hyperbolic differential equations*. The Institute of Advanced Study, Princeton, N.J., 1953, 1955.

[48] **Littlewood, J. E.**: *A mathematicians miscellany*. Methuen, London, 1953, 1957.

[49] **Magnus, W; Oberhettinger, F.**: *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Chelsea, New York, 1949.

[50] **Mihlin, S. G.**: *Singular integral equations*. Amer. Math. Soc. Translations, Ser 1, Vol. 10, 1962, págs. 84–198.

[51] **Miles, E. P. jr.**: *Three dimensional harmonic functions generated by analytic functions of a hypervariable*. Amer. Math. Monthly **61** (1954), 694–697.

[52] ——: *The analytic Cauchy problem for the iterated wave equation*. Portugaliae Math. **18** (1959), 111–119.

[53] **Miles, E. P.; Williams, Ernest**: *A basic set of of homogeneous harmonic polynomials in k variables*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 191–194.

[54] ——: *A note on basic sets of homogeneous harmonic polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 769–770.

[55] ——: *The Cauchy problem for linear partial differential equations with restricted boundary conditions*. Canadian J. Math. **8** (1956), 426–431.

[56] ——: *A basic set of polynomial solutions for the Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations*. Amer. Math. Monthly **63** (1956), 401–404.

[57] ——: *Basic sets of polynomials for the iterated Laplace and wave equations*. Duke Math. J. **26** (1959), 35–40.

[58] **Miles, E. P.; Young, E. C.**: *Basic sets of polynomials for generalized Beltrami and Euler-Poisson-Darboux equations and their iterates*. Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 981–986.

[59] **Okikiolu, George O.**: *Special integral operators, Vol. II - Poisson operators, conjugate operators and related integrals*. Okikiolu Sci. and Industr. Org., London, 1981.

[60] **Ortiz F., Alejandro**: *Operadores integrales singulares*. Universidad Nacional de Trujillo, Depto. de Matemática, Trujillo, Perú, 1972.

[61] **Ortner, Norbert**: *Faltung hypersingulärer Integraloperatoren*. Math. Ann. **248** (1980), 19–46.

[62] ——: *Sur la convolution des distributions*. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér A–B **290** (1980), 533–536.

[63] ——: *Convolution des distributions et des noyaux euclidiens*. G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint– Raimond (Eds.), Séminaire initiation à l'analyse, 19e année, 1979/1980, exposé no. 12. Univ Paris VI, 1980, págs. 1–11.

[64] ——: *Analytic continuation and convolution of hypersingular higher Hilbert-Riesz kernels*. Alfred Haar memorial conference, Budapest, 1985, págs. 675–685.

[65] ——: *On some contributions of John Horváth to the theory of distributions*. J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 353–383.

[66] **Ortner, N.; Wagner, P.**: *Convolution groups for quasi-hyperbolic systems of differential operators*. Por aparecer.

[67] **Plessner, A.**: *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen*. Mitteilungen Math. Seminar Gießen **10** (1923), 1–36.

[68] **Protter, M. H.**:*Generalized spherical harmonics*. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 314–341.

[69] ——: *On a class of harmonic polynomials*. Portugaliae Math. **10** (1951), 11–22.

[70] **Riesz, Frigyes**: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*. Math. Zeitschrift **18** (1923), 117–124; Œuvres complètes, Budapest, 1960, D7, págs. 645–653.

[71] **Riesz, Marcel**: *Sur la sommation des séries de Fourier*. Acta Sci. Math. Szeged **1** (1923), 104–113.

[72] ——: *Sur les fonctions conjuguées* Math. Zeitschrift **27** (1927), 218–244.

[73] ——: *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*. Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[74] ——: *Collected papers*. Springer-Verlag, 1988.

[75] **Roider, Bernhard**: *Sur la convolution des distributions*. Bull. Sci. Math. **100** (1976), 193–199.

[76] **Rudin, Walter**: *Fourier analysis on groups*. Wiley, 1962, 1990.

[77] **Samko, S. G.**: *On the Fourier transform of the function* $\dfrac{Y_m(x/|x|)}{|x|^{n+\alpha}}$. Izv. Vuzov. Matematika, no.7 (1978), 73–78; Soviet Math (Izv. VUZ).

[78] ——: *Hypersingular integrals and their applications*. Taylor and Francis, London, 2002.

[79] **Schaad, Margrit**: *Über eine Klasse von rechtsregulären Funktionen mit 2n reellen Variablen*. Disertación, Zurich, 1944.

[80] **Schwartz, Laurent**: *Théorie des distributions*. Nouvelle édition. Hermann, Paris, 1966.

[81] ——: *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications*. Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1954.

[82] ——: *Distributions à valeurs vectorielles I*. Ann. Institut Fourier Grenoble **7** (1957), 1–141.

[83] ——: *Distributions à valeurs vectorielles II*. Ann. Institut Fourier Grenoble **8** (1959), 1–209.

[84] **Seeley, R. T.**: *Elliptic singular integral equations*. Singular Integrals, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 10, Amer. Math. Soc. 1967, págs. 308–315.

[85] **Shiraishi, Risai**: *On the definition of convolutions for distributions*. J. Sci. Hiroshima University, Ser. A **23** (1959), 19–32.

[86] **Simanca, S. R.**: *Pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 236. Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, UK, 1990.

[87] **Staub, Alfred**: *Integralsätze hyperkomplexer, regulärer Funktionen von 2n reellen Variablen*. Disertación, Zurich, 1946

[88] **Stein, Elias M.**: *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press, 1971.

[89] ——: *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.

[90] **Stein, E. M; Weiss, G.**: *On the theory of harmonic functions of several variables I, The theory of H^p spaces*. Acta Math. **103** (1960), 25–62.

[91] ——: *On the theory of harmonic functions of several variables II, Behavior near the boundary*. Acta Math. **106** (1961), 137–174.

[92] ——: *Introduction to Fourier analysis in Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.

[93] **Taylor, Michael E.**: *Pseudodifferential operators*. Princeton University Press, 1981.

[94] **Thorin, G. O.**: *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*. Kungl. Fysiografiska Sälskapets i Lund Förhandlinger **8** (1938), no. 14.

[95] ——: *Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard, with some applications*. Disertación Lund, Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Vol. 9 (1948).

[96] **Titchmarsh, E. C.**: *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Cambridge University Press, 1948.

[97] **Treves, François**: *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1, Pseudodifferential operators*. Plenum, New York, 1980.

[98] **Unterberger, A; Bokobza, J.**: *Les opérateurs de Calderón–Zygmund précisés*. C.R. Acad. Sci. Paris **259** (1965), 1612–1614.

[99] **Wagner, Peter**: *Zur Faltung von Distributionen*. Math. Ann. **276** (1987), 467–485.

[100] ——: *Bernstein-Sato-Polynome und Faltungsgruppen zu Differentialoperatoren*. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **8** (1989), 407–423.

[101] **Weiss, Guido**: *Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios H^p*. Cursos y seminarios matemáticos, fasc. 9, Universidad de Buenos Aires, 1960.

[102] **Wicht, M. C.**: *Recursion and interrelation for Miles–Williams biharmonics*. Amer. Math. Monthly **64** (1957), 463.

[103] **Yoshinaga, Kyôichi; Ogata, Hayao**: *On convolutions*. J. of Science of the Hiroshima University, Ser A **22** (1968), 15–24.

[104] **Zaidman, S.**: *Distributions and pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 248, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, UK, 1991.

[105] ——: *Topics in pseudo-differential operators*. Pitman Research Notes in Math. Series 359, Longman, Harlow, Essex, UK, 1996.

[106] **Zygmund, Antoni**: *Trigonometric series*, Second edition. Cambridge University Press, 1959.

Recibido el 5 de julio de 2004.

Aceptado para su publicación el 2 de mayo de 2005.