

SOBRE LAS RELACIONES DE RECURRENCIA, LAS FRACCIONES CONTINUAS Y LA DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS SISTEMAS ORTOGONALES DE POLINOMIOS

por

Jairo A. Charris¹, Bernarda H. Aldana² & Germán Preciado³

Resumen

Charris, J. B. Aldana & G. Preciado-López: Sobre las relaciones de recurrencia, las fracciones continuas y la determinación de las propiedades espectrales de los sistemas ortogonales de polinomios, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **27** (104): 381–421, 2003. ISSN 0370-3908.

El objeto de este artículo, semi investigativo, semi divulgativo, es el de explorar las propiedades espectrales de los sistemas de polinomios ortogonales a partir de su relación de recurrencia o, más precisamente, de su fracción continua. Estos aspectos de la teoría han sido un tema recurrente de las investigaciones de los autores (y de muchas otras personas) pero el artículo explora esta vez, en mucho detalle, los fundamentos de la teoría.

Palabras Clave. Polinomios ortogonales, espectro y propiedades espectrales de los polinomios ortogonales relaciones de recurrencia y fracciones continuas.

Abstract

This half research half expository paper addresses the problem of determining the spectrum & spectral properties of systems of orthogonal polynomials that can be derived from their recurrence relation or, more precisely, from the continued fraction of the polynomials. The content has been the subject of recent research of the authors (& of many others as well) but this time the paper explores widely the foundational basis of the subject.

Key Words and Phrases. Orthogonal polynomials, spectrum & spectral properties of systems of orthogonal polynomials, recurrence relations, continued fractions.

¹Universidad Sergio Arboleda y Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá D.C.

²Escuela Colombiana de Ingeniería

³Universidad Nacional de Colombia y Universidad de los Andes, Bogotá, D.C.

AMS Subject Classification: Primary 33A65. Secondary 33A40.

Introducción

El presente documento contiene la intervención de los autores en un seminario avanzado sobre tópicos de análisis que tuvo lugar en la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá durante el segundo semestre de 2001, promovido por el Dr. Reinaldo Nuñez, director de la Escuela de Matemáticas.

En el seminario se trataron básicamente dos temas. El primero, la teoría de los sistemas dinámicos. El segundo, al que está dedicado el presente texto, tuvo que ver con la teoría de los sistemas ortogonales de polinomios y fué orientado por los profesores Jairo A. Charris, Bernarda H. Aldana y Germán Preciado L. Naturalmente, sólo aspectos limitados de una teoría tan extensa, diversa y compleja como la de los polinomios ortogonales pueden ser objeto de un seminario. En nuestro caso, éste se centró en la relación de recurrencia de tres términos que tales sistemas deben satisfacer, y en explorar las posibilidades de determinar, a partir de esta misma relación, las propiedades espectrales de los polinomios: medidas de ortogonalidad y descripción de sus soportes (espectros). La descripción de las técnicas a nuestro alcance para tal fin fue escogida como el tópico de las intervenciones, pues en una forma u otra ha constituido un objetivo común de algunas de nuestras investigaciones más recientes, y porque dichas técnicas han tenido éxito en el tratamiento de sistemas relativamente complejos: polinomios cribados, sistemas ortogonales resultantes de la teoría de las aplicaciones polinómicas y, aún, otros de la teoría general de bloques de relaciones de recurrencia, incluyendo primeros asociados de estos sistemas, un tópico generalmente considerado difícil. De hecho, los ejemplos incluidos en la Sección 7 son primeros asociados de polinomios cribados de Jacobi, y su investigación constituyó el material de la tesis de maestría de Germán Preciado. Todo esto requiere fuertes dosis de esfuerzo manipulativo, pero según pensamos no muchas más ideas esenciales que las discutidas en las exposiciones del seminario. Esperamos que el documento contenga la mayor parte de estas ideas y proporcione así un panorama claro del estado del asunto.

En la redacción de las notas hemos usado libremente material de diversas fuentes. Aunque citado en las referencias al final, algunas veces este material ha sido transcrito casi literalmente, aún en el caso de artículos originales de investigación. Esperamos que esto no implique plagio ni, mucho menos, canibalismo. Al representar también un compromiso entre un documento de

investigación y uno expositivo, esperamos que haya quedado razonablemente libre de la esterilidad que como híbridos, tales documentos suelen presentar.

Lamentamos que una sección introductoria, planeada como motivación para algunos de los temas y en el cual se intentaría una descripción de las ideas de diversos autores (Board, Bank e Ismail, Heller, Yamani, Reinhardt y otros) sobre las conexiones de la teoría de los polinomios ortogonales con la teoría de los operadores en los espacios de Hilbert, la teoría de Hamilton–Jacobi y la mecánica cuántica, aunque discutidos en sesiones de la Academia, en Coloquios Distritales y en diversos encuentros sobre topología y geometría, hubo de quedarse dentro del tintero, debido a circunstancias extenuantes. El tercer autor agradece a Guillermo Rodríguez Blanco, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, el haberle dirigido su tesis de maestría. Los autores agradecen a los profesores de la Universidad Sergio Arboleda la asistencia masiva y permanente a las sesiones del seminario. Esperamos que este documento constituya una modesta recompensa a su interés por el tema.

1. Sistemas ortogonales y funcionales de momento

Definición 1.1. *Un funcional de momentos (FM) (Ahlfiezer [1], Charris & Gómez [10], Chihara [19], Krall [23]) es una aplicación \mathbb{C} -lineal*

$$\mathcal{L} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(1) = 1,$$

donde $\mathbb{C}[x]$ es el sistema de los polinomios en x con coeficientes complejos.

Se tiene entonces que

$$\mathcal{L}(ap(x) + bq(x)) = a\mathcal{L}(p(x)) + b\mathcal{L}(q(x)), \quad (1.0)$$

$$a, b \in \mathbb{C}; \quad p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Definición 1.2. *Un sistema mónico ortogonal de polinomios (SMOP) (Chihara [19]) es un sistema $\{P_n(x) \mid n \geq 0\}$ de polinomios mónicos complejos (es decir, de polinomios de la forma*

$$P_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,0}, \quad P_0(x) = 1$$

donde $a_{n,0}, \dots, a_{n,n-1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$) para el cual existe un FM tal que

$$\mathcal{L}(P_m(x)P_n(x)) = \lambda_n \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad \lambda_n \neq 0. \quad (1.1)$$

Entonces, $\mathcal{L}(P_m(x)P_n(x)) = 0$ si $m \neq n$, $\mathcal{L}(P_n^2(x)) = \lambda_n \neq 0$, $n \geq 0$. Nótese que $\mathcal{L}(P_0^2(x)) = \mathcal{L}(1) = \lambda_0 = 1$. Diremos también que $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} .

Teorema 1.1. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , $\{P_n(x)\}$ es una base algebraica de $\mathbb{C}[x]$. Si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ tiene grado $m \geq 0$ entonces

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x), \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

donde

$$a_k = \frac{\mathcal{L}(P(x)P_k(x))}{\lambda_k}, \quad 0 \leq k \leq m. \quad (1.3)$$

Además, $P(x) = A_m x^m + \dots + A_0$ con $A_m = a_m$.

Demostración. La primera afirmación es cierta de todo sistema $\{P_n(x)\}$, $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$, tal que $\text{grado}(P_n(x)) = n$, $n \geq 0$, pues si $\mathbb{C}_m[x]$ es el espacio de los polinomios de grado $\leq m$, $m \geq 0$, $\{P_0(x), \dots, P_m(x)\}$ es un sistema linealmente independiente de $\mathbb{C}_m[x]$ (si $\sum_{k=0}^m a_k P_k(x) = 0$, necesariamente $a_k = 0$, $0 \leq k \leq m$).

Este es un resultado bien conocido de la teoría de polinomios sobre \mathbb{C} , consecuencia del hecho de que un tal polinomio $P(x)$ se anula en todo punto de \mathbb{C} o, de hecho, en más de $n = \text{grad}(P(x))$ puntos, si y sólo si sus coeficientes son idénticamente nulos, y como $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ es una base sobre \mathbb{C} de $\mathbb{C}_m[x]$, así que $\text{Dim}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_m[x]) = m + 1$, también $\{P_0(x), \dots, P_m(x)\}$ es una base de $\mathbb{C}_m[x]$. Obsérvese también que si $\text{grado}(P(x)) = m$ y

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x),$$

entonces $n \geq m$ y $a_k = 0$, $m < k \leq n$. Ahora, si $\{P_k(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_n(x)) &= \sum_{k=0}^m a_k \mathcal{L}(P_k(x)P_n(x)) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \lambda_k \delta_{nk} = \lambda_n a_n \end{aligned}$$

para todo $0 \leq n \leq m$. Nótese finalmente que al ser $P_m(x)$ mónico, necesariamente $A_m = a_m$. \square

Corolario 1.1. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} y $P(x) = A_m x^m + \dots + A_0$, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) = 0, \quad n > m, \quad (1.4)$$

y

$$\mathcal{L}(P(x)P_m(x)) = A_m \lambda_m. \quad (1.5)$$

En particular,

$$\mathcal{L}(x^m P_n(x)) = 0, \quad n > m; \quad \mathcal{L}(x^m P_m(x)) = \lambda_m. \quad (1.6)$$

Demostración. Claramente $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x)$, así que para $n > m$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_n(x)) &= \sum_{k=0}^m a_k \mathcal{L}(P_k(x)P_n(x)) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, de lo anterior, $\mathcal{L}(x^n P_m(x)) = 0$ si $n < m$, de lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(x)P_m(x)) &= \mathcal{L}(A_m x^m P_m(x)) \\ &= A_m \mathcal{L}(x^m P_m(x)) \\ &= A_m \mathcal{L}(P_m^2(x)) = A_m \lambda_m. \end{aligned}$$

Esto demuestra el corolario. \square

Teorema 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} , para todo $n \geq 0$ existen $B_n, C_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad (1.7)$$

$$n \geq 0,$$

donde $P_{-1}(x) = 0$ y C_0 es arbitrario. Además B_0 y $B_n, C_n, n \geq 1$, están unívocamente determinados por $\{P_n(x)\}$, $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$,

$$B_n = \frac{\mathcal{L}(xP_n^2(x))}{\lambda_n}, \quad n \geq 0; \quad (1.8)$$

$$C_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}, \quad \lambda_n = C_1 \cdots C_n, \quad n \geq 1,$$

y $\{P_n(x)\}$ está también unívocamente determinado por (1.7).

Demostración Claramente

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} P_k(x), \\ a_{nk} &\in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} a_{nk} &= \mathcal{L}(xP_n(x)P_k(x)) \\ &= \mathcal{L}(xP_k(x)P_n(x)), \quad 0 \leq k \leq n+1. \end{aligned}$$

Del corolario anterior se deduce que $a_{nk} = 0$ si $k+1 < n$, o sea, si $k < n-1$. Es claro además que $a_{nn+1} = 1$. Sean entonces $B_n = a_{nn}$, $n \geq 0$, $C_n = a_{nn-1}$, $n \geq 1$. La unicidad de $B_n, n \geq 0$, y $C_n, n \geq 1$, es consecuencia de la independencia lineal de $\{P_n(x)\}$ y, como $P_{-1}(x) = 0$, la arbitrariedad de C_0 es también clara. Por otra parte $\mathcal{L}(xP_n(x)P_n(x)) = B_n \mathcal{L}(P_n^2(x)) = B_n \lambda_n$, $n \geq 0$, y $\mathcal{L}(xP_n(x)P_{n-1}(x)) = \mathcal{L}(xP_{n-1}(x)P_n(x)) = \mathcal{L}(x^n P_n(x)) = \mathcal{L}(P_n^2(x)) = \lambda_n = C_n \mathcal{L}(P_{n-1}^2(x)) = C_n \lambda_{n-1}$, $n \geq 1$. Esto implica en particular que $C_n \neq 0$ y

$\lambda_n = C_1 \cdots C_n$ para $n \geq 1$. Ahora, si también $x\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+1}(x) + B_n\tilde{P}_n(x) + C_n\tilde{P}_{n-1}(x)$, $n \geq 0$, y $\tilde{P}_{-1}(x) = 0$, $\tilde{P}_0(x) = 1$, entonces $\tilde{P}_n(x)$ es mónico de grado n para $n \geq 1$, y al suponer que $\tilde{P}_n(x) = P_n(x)$ para $n \leq m$, de $xP_m(x) = \tilde{P}_{m+1}(x) + B_mP_m(x) + C_mP_{m-1}(x)$ se deduce que también $\tilde{P}_{m+1}(x) = P_{m+1}(x)$. \square

Nota 1.1. Puede suceder que $B_n = 0$ para algún $n \geq 0$ o, aún, para todos los $n \geq 0$. En este último caso $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo $n \geq 0$, como se deduce inmediatamente de (1.7). Se dice entonces que $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP simétrico*.

Nota 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para \mathcal{L} entonces

$$\mathcal{L}(P_0(x)) = \mathcal{L}(1) = 1; \mathcal{L}(P_n(x)) = 0, n \geq 1. \quad (1.9)$$

Esto resulta de observar que $P_n(x)P_0(x) = P_n(x)$, $n \geq 0$.

El siguiente teorema, recíproco del anterior, es fundamental. Chihara [19] lo atribuye a J. Favard, pero parece ser más antiguo.

Teorema 1.3. [Favard] Sea $\{P_n(x), n \geq 0\}$ un sistema de polinomios mónicos tales que $\text{grado}(P_n(x)) = n$, $n \geq 0$, y supóngase que existen números complejos $B_n, C_n, n \geq 0$, tales que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), \quad (1.10)$$

$$n \geq 0; P_{-1}(x) = 0.$$

Supóngase además que $C_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y sea $\mathcal{L}: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\mathcal{L}(P_0(x)) = 1; \mathcal{L}(P_n(x)) = 0, n \geq 1, \quad (1.11)$$

y extensión lineal (es decir, $\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^m a_k P_k(x)\right) = a_0$ para todo $m \geq 0$). Entonces $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para \mathcal{L} . Además,

$$\lambda_n := \mathcal{L}(P_n^2(x)) = C_1 C_2 \cdots C_n, n \geq 1. \quad (1.12)$$

Demostración. Es suficiente demostrar que para todo $m \geq 1$,

$$\mathcal{L}(x^m P_n(x)) = 0, n > m; \mathcal{L}(x^m P_m(x)) = C_1 C_2 \cdots C_m.$$

Obsérvese que $\mathcal{L}(x^0 P_n(x)) = \mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ si $n > 0$. Ahora, $\mathcal{L}(xP_n(x)) = \mathcal{L}(P_{n+1}(x)) + B_n \mathcal{L}(P_n(x)) + C_n \mathcal{L}(P_{n-1}(x)) = 0$ si $n > 1$, mientras que $\mathcal{L}(P_1(x)) = C_1 \mathcal{L}(P_0(x)) = C_1$. Supongamos entonces que la afirmación es válida para m . Se tiene que $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = \mathcal{L}(x^m P_{n+1}(x)) + B_n \mathcal{L}(x^m P_n(x)) + C_n \mathcal{L}(x^m P_{n-1}(x))$. Por lo tanto, si $n \geq m+1$, en cuyo caso $n > m$, $n+1 > m$ y $n-1 \geq m$, entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = C_n \mathcal{L}(x^m P_{n-1}(x))$. Si $n > m+1$ entonces $n-1 >$

m y $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = 0$. Si $n = m+1$ entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_{m+1}(x)) = C_{m+1} \mathcal{L}(x^m P_m(x))$, y la hipótesis de inducción asegura que $\mathcal{L}(x^m P_m(x)) = C_1 C_2 \cdots C_m$. Entonces $\mathcal{L}(x^{m+1} P_n(x)) = 0$ si $n \geq m+1$ y $\mathcal{L}(x^{m+1} P_{m+1}(x)) = C_1 C_2 \cdots C_{m+1}$. \square

Nota 1.3. Si \mathcal{L} para $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.11), se dice que \mathcal{L} es un *FM* para $\{P_n(x)\}$. Claramente \mathcal{L} está unívocamente determinado por $\{P_n(x)\}$.

Nota 1.4. Sea $\{Q_n(x) | n \geq 0\}$ un sistema de polinomios en $\mathbb{C}[x]$, y supóngase que existen $A_n, B_n, C_n, n \geq 0$, en \mathbb{C} , tales que $A_{n-1} C_n \neq 0, n \geq 1$, y que

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x), n \geq 0, \quad (1.13)$$

donde $Q_{-1}(x) = 0$ y $\text{grado}(Q_0(x)) = 0$. Se dice que $\{Q_n(x)\}$ es un *sistema ortogonal de polinomios (SOP)* (Chihara [19]). La razón es la siguiente. Evidentemente $\text{grado}(Q_n(x)) = n, n \geq 0$, y si k_n es el coeficiente de x^n en $Q_n(x)$ entonces $P_n(x) = k_n^{-1} Q_n(x)$ es un polinomio mónico. De (1.13), con $Q_n(x) = k_n P_n(x)$, se deduce inmediatamente que $k_n = k_{n+1} A_n, n \geq 0$, lo cual implica que

$$k_n = \frac{k_0}{A_0 \cdots A_{n-1}}, n \geq 1, \quad (1.14)$$

y, con A_{-1} arbitrario, que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_{n-1} C_n P_{n-1}(x), n \geq 0. \quad (1.15)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es un *SMOP* para el funcional definido por $\mathcal{L}(1) = 1, \mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ para $n \geq 1$, así que

$$\mathcal{L}(Q_n(x) Q_m(x)) = k_n k_m \delta_{mn} \lambda_n, n \geq 0, \quad (1.16)$$

donde $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)), n \geq 0$. O sea, $\mathcal{L}(Q_0^2(x)) = k_0^2, \mathcal{L}(Q_n(x) Q_m(x)) = 0$ si $m \neq n$, y

$$\mathcal{L}(Q_n^2(x)) = k_0^2 \frac{C_1 \cdots C_n}{A_0 \cdots A_{n-1}}, n \geq 1. \quad (1.17)$$

Generalmente se toma $Q_0(x) = 1$ (o sea $k_0 = 1$). Si $A_m \neq 1$ para algún m , los $Q_n(x)$ pueden no ser mónicos, aun si $k_0 = 1$. Esto resulta de (1.13).

Nota 1.5. En (1.7) o en (1.13) podríamos tomar $C_0 = 0$. Por razones prácticas es mejor dejarlo arbitrario y tomarlo convenientemente en cada caso particular. Lo mismo es cierto de A_{-1} en la nota anterior.

Nota 1.6. Supóngase ahora que $\{R_n(x) | n \geq 0\}$ satisface una relación de recurrencia

$$R_{n+1}(x) = (A_n x - B_n) R_n(x) - C_n R_{n-1}(x), \quad (1.18)$$

$$n \geq 0, R_{-1}(x) = 0,$$

donde $A_n, C_{n+1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, son no nulos y donde $\text{grado}(R_0(x)) = 0$. Como se verifica inmediatamente, $\text{grado}(R_n(x)) = n$ para todo $n \geq 0$, y si k_n es el coeficiente de x^n en $R_n(x)$ y $P_n(x) = k_n^{-1}R_n(x)$, entonces $A_n k_n = k_{n+1}$, $n \geq 0$, así que

$$k_n = k_0 A_0 \dots A_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (1.19)$$

y $\{P_n(x)\}$ es un sistema mónico tal que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \frac{B_n}{A_n}P_n(x) + \frac{C_n}{A_{n-1}A_n}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.20)$$

con $P_{-1}(x) = 0$. Entonces, si $\mathcal{L} : C[x] \rightarrow \mathbb{C}$ está dado por $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$, $n \geq 1$, y extensión lineal, necesariamente

$$\mathcal{L}(R_m(x)R_n(x)) = k_m k_n \lambda_n \delta_{mn} \lambda_n, \quad m, n \geq 0, \quad (1.21)$$

donde $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x))$, $n \geq 0$, así que $\mathcal{L}(R_0^2(x)) = k_0^2$ y

$$\mathcal{L}(R_n^2(x)) = k_0^2 \frac{A_0}{A_n} C_1 \dots C_n, \quad n \geq 1. \quad (1.22)$$

En virtud de (1.21), se dice también que $\{R_n(x)\}$ es un sistema ortogonal de polinomios (SOP). Generalmente se toma $k_0 = 1$, o sea, $R_0(x) = 1$. Si $A_m \neq 1$ para algún m , los $R_n(x)$ pueden no ser mónicos, aun si $R_0(x) = 1$.

Un funcional de momentos \mathcal{L} es positivo (Chihara [19]) si $\mathcal{L}(P(x)) > 0$ para todo polinomio $P(x) \neq 0$ tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (así que $P(x) \in \mathbb{R}[x]$). Esto implica que $\langle P(x), Q(x) \rangle := \mathcal{L}(P(x)Q(x))$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$ (Nota 1.7, abajo) y si $\{p_n(x)\}$ se obtiene de $\{1, x, x^2, \dots\}$ por medio del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (Nota 1.10, abajo), entonces $p_0(x) = 1$, $\text{grado}(p_n(x)) = n$, $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ y

$$\mathcal{L}(p_m(x)p_n(x)) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad (1.23)$$

así que $\{p_n(x)\}$ es un SOP para \mathcal{L} y existirán $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad p_{-1}(x) = 0, \quad (1.24)$$

donde a_n, b_n, c_n son de hecho reales (Nota 1.8 abajo). Además $c_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$ (y c_0 puede tomarse arbitrariamente).

Nota 1.7. Para establecer que $\langle P(x), Q(x) \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$, obsérvese en primer lugar que $\mathcal{L}(P^2(x)) = \langle P(x), P(x) \rangle > 0$ para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \neq 0$. Por otra parte, $\mathcal{L}(P(x)) \in \mathbb{R}$ para todo $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Esto es claro si $a \in \mathbb{R}$, pues

$\mathcal{L}(a) = a\mathcal{L}(1) = a$, y como $(t^n + 1)^2 \geq 0$, $1 + t^{2n} \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x^n = \frac{1}{2}(x^n + 1)^2 - \frac{1}{2}(1 + x^{2n})$, también $\mathcal{L}(x^n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$.

Nota 1.8. Lo establecido en la nota anterior asegura que a_n, b_n, c_n en (1.24) son números reales, ya que, de hecho,

$$a_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_{n+1}(x)), \quad b_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_n(x)), \\ c_n = \mathcal{L}(xp_n(x)p_{n-1}(x)),$$

$n \geq 0$, y éstos son todos números reales, pues $\{p_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Nótese que, en efecto, $c_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$. (Más aún, de (1.24) y (1.27), abajo, se deduce que $a_n = \frac{k_{nn}}{k_{n+1, n+1}}$, $k_{nn} = \frac{1}{\|q_n(x)\|}$, así que $a_n > 0$ para $n \geq 1$).

Es claro que si $\{p_n(x)\}$ para \mathcal{L} está dado por (1.24) y definimos $P_0(x) = p_0(x) = 1$; $P_n(x) = a_0 \dots a_{n-1} p_n(x)$, $n \geq 1$, entonces $\{P_n(x)\}$ es un SMOP para \mathcal{L} con

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)) = (a_0 \dots a_{n-1})^2 > 0, \quad n \geq 1. \quad (1.25)$$

Esto resulta de las relaciones (1.11) y (1.24), teniendo en cuenta (Nota 1.4) que $k_0 = 1$ y que $\{P_n(x)\}$ satisface (1.7) con $B_n = b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, $C_n = a_{n-1}^2 > 0$, $n \geq 1$.

Supóngase recíprocamente que $\{P_n(x)\}$ es un sistema mónico dado por (1.7) con $B_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Sea $\mathcal{L} : C[x] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mathcal{L}(1) = 1$, $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$, $n \geq 1$, y extensión lineal, el FM para \mathcal{L} .

Teorema 1.4. Bajo las anteriores hipótesis, \mathcal{L} es positivo, y si $\lambda_n = C_1 C_2 \dots C_n$ y $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$ entonces

$$\mathcal{L}(p_m(x)p_n(x)) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \quad (1.26)$$

y $\{p_n(x)\}$ satisface (1.24) con $a_0 = 1$; $c_n = a_{n-1} = \sqrt{C_n}$, $n \geq 1$; $b_n = B_n$, $n \geq 0$.

Demostración. Como $P_0(x) = 1$ y $B_n, C_n \in \mathbb{R}$, es claro que $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $n \geq 0$. Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $P(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x)$ entonces $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, y

$$\mathcal{L}(P^2(x)) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^2 \lambda_k,$$

así que si $P(x) \neq 0$ entonces $\mathcal{L}(P^2(x)) > 0$. Ahora, si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, necesariamente $P(x) = \sum_{k=0}^n Q_k^2(x)$, $n \geq 1$,

donde $Q_k(x) \in \mathbb{R}[x]$. En efecto, como toda raíz real t^* de $P(x)$ debe ser de multiplicidad par (si no, $P(t)$ cambiaría de signo en la vecindad de t^*), entonces $P(x) = S^2(x)T(x)$ donde $S(x), T(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $T(x)$ es una constante (necesariamente positiva) o un polinomio (necesariamente de grado par ≥ 2) cuyas raíces son todas complejas no reales (y se presentan entonces por pares conjugados). Entonces $T(x) = \sum_{k=0}^n R_k^2(x)$, $n \geq 1$, donde $R_k(x) \in \mathbb{R}[x]$. Esto último es obvio si $\text{grado}(T(x)) = 2$, y resulta de aquí por inducción. Entonces, si $P(x) \neq 0$, $Q_k(x) \neq 0$ para algún $1 \leq k \leq n$, y $\mathcal{L}(P(x)) = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}(Q_k^2(x)) > 0$. Las demás afirmaciones se verifican en forma rutinaria. \square

Corolario 1.2. Si $\{P_n(x)\}$ es un SMOP que satisface (1.7) con $B_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para $n \geq 1$, todo $P_n(x)$ es un polinomio real, y si $n \geq 1$, sus raíces son todas reales y simples (de orden o multiplicidad 1).

Demostración. Que $P_n(x)$ es real para todo n es claro. Sea \mathcal{L} el FM para $\{P_n(x)\}$, el cual es positivo. Como $\mathcal{L}(P_n(x)) = 0$ para $n \geq 1$, necesariamente $P_n(x)$ tiene al menos una raíz real de orden (multiplicidad) impar (si no, $\mathcal{L}(P_n(x)) > 0$). Sean $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $m \leq n$, las raíces reales de $P_n(x)$ de orden impar, y sea $P(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_m)$. Si $m < n$, $\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) = 0$ (Corolario 1.1, Relación (1.4)). Pero esto es absurdo, pues toda raíz real de $P(x)P_n(x)$ es de orden par, de lo cual $P(t)P_n(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que $\mathcal{L}(P(x)P_n(x)) > 0$. Entonces $m = n$, y el corolario queda demostrado. \square

Nota 1.9. Es claro que $\{Q_n(x)\}$, dado por (1.13), es un SOP para un FM positivo si y sólo si $B_n, n \geq 0$, es real, y $A_{n-1}C_n > 0$ para todo $n \geq 1$. A su vez, $\{R_n(x)\}$, dado por (1.18), es ortogonal para un FM positivo si y sólo si $\frac{B_n}{A_n}$ es real y $\frac{C_{n+1}}{A_n A_{n+1}} > 0$ para todo $n \geq 0$.

Nota 1.10. Si \mathcal{L} es un FM positivo y $\langle P(x), Q(x) \rangle := \mathcal{L}(P(x)Q(x))$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}[x]$ (el cual es un espacio vectorial sobre \mathbb{R}). Definiendo, para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\|P(x)\| := \sqrt{\langle P(x), P(x) \rangle} = \sqrt{\mathcal{L}(P^2(x))}$, el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt (Yosida [32]) permite construir, a partir de la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ de $\mathbb{R}[x]$, una base ortogonal $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ de $\mathbb{R}[x]$ con respecto

a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por

$$p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = \frac{q_{n+1}(x)}{\|q_{n+1}(x)\|}, \quad (1.27)$$

$$q_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle x^{n+1}, p_k(x) \rangle p_k(x),$$

para $n \geq 0$. En efecto, como $\langle x^{n+1}, p_k(x) \rangle = \mathcal{L}(x^{n+1}p_k(x)) \in \mathbb{R}$ si $p_k(x) \in \mathbb{R}[x]$, $k \leq n$ (Nota 1.7), un argumento inductivo establece sin más que $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ para todo $n \geq 0$. Como obviamente $\text{grado}(p_n(x)) = n$, $n \geq 0$, $\{p_n(x)\}$ es también una base de $\mathbb{R}[x]$, para la cual $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle = \frac{\langle q_n(x), q_n(x) \rangle}{\|q_n(x)\|^2} = 1$ y

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \frac{1}{\|q_n(x)\|} [\mathcal{L}(x^n p_m(x)) - \langle x^n, p_m(x) \rangle \mathcal{L}(p_m^2(x))] = 0,$$

$m < n$, $n \geq 0$. Se dice usualmente que $\{p_n(x)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}[x]$ para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 1.3. Una función de distribución (FD) es una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- 1) φ es creciente: $\varphi(t) \leq \varphi(t')$ si $t < t'$.
- 2) φ es acotada. Es decir, existe $M > 0$ tal que $-M \leq \varphi(t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- 3) φ es continua por la derecha:

$$\varphi(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \varphi(t) =: \varphi(a+)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Como φ es creciente y acotada, $\varphi(a-) := \lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$. También existen $\varphi(-\infty+) := \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$ y $\varphi(\infty-) := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$. Como es claro,

$$-M \leq \varphi(-\infty+) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\infty-) \leq M$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+) = 1$, se dice que φ está normalizada o que es una función de distribución normalizada (FDN).

Si φ es una función de distribución, $-\infty < a < b < \infty$ y f es continua en $[a, b]$ y toma valores reales, $\int_a^b f d\varphi$ denotará la integral de Riemann-Stieltjes de f (Apostol [3], Chap. 7), la cual existe según las hipótesis. Como es claro, $\int_a^b d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$. Si f es continua de $[a, \infty)$ en \mathbb{R} , definimos

$$\int_a^\infty f d\varphi := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f d\varphi \quad (1.28)$$

cuando el límite existe y es un número real. Se dice entonces que $\int_a^\infty f d\varphi$ converge o que es *convergente*. Si $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, \infty)$, el límite en (1.28) siempre existe, finito ó infinito. Por lo tanto, $\int_a^\infty f d\varphi$ es convergente si y sólo si $\int_a^\infty f d\varphi < \infty$, lo cual ocurre si y sólo si existe $C > 0$ tal que $\int_a^b f d\varphi \leq C$ para todo $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. En tal caso

$$\int_a^\infty f d\varphi = \sup \left\{ \int_a^b f d\varphi \mid b \in \mathbb{R}, b > a \right\} \leq C. \quad (1.29)$$

De manera análoga se define

$$\int_{-\infty}^a f d\varphi := \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f d\varphi \quad (1.30)$$

cuando f es continua en $(-\infty, a]$ y el límite existe en \mathbb{R} . Se dice también que $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ converge o es *convergente*. Si $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\int_a^\infty |f| d\varphi < \infty$, también $\int_a^\infty f d\varphi$ es convergente. Esto resulta de $0 \leq f(t) + |f(t)| \leq 2|f(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un resultado análogo vale para $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} y $\int_a^\infty f d\varphi$, $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ son ambas convergentes para algún $a \in \mathbb{R}$, se define también

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \int_{-\infty}^a f d\varphi + \int_a^\infty f d\varphi, \quad (1.31)$$

y se dice que $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ es *convergente*. Como es claro, si

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $\int_{-\infty}^a f d\varphi$ y $\int_a^\infty f d\varphi$ convergen para todo $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si esto ocurre cuando $a = 0$, así que es suficiente tomar $a = 0$ en (1.31). Es claro también que si $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ converge entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f d\varphi. \quad (1.32)$$

Recíprocamente, si el límite de la derecha en (1.32) existe, $\int_{-\infty}^\infty f d\varphi$ converge.

Sea $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\int_{-\infty}^\infty |f| d\varphi < \infty$. Nótese que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada ($|f(t)| \leq M$ para algún $M > 0$ y todo $t \in \mathbb{R}$) entonces $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pues $\int_a^b |f| d\varphi \leq M(\varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+))$ cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Obsérvese que $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = C_\psi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si φ y ψ son funciones de distribución y $\psi - \varphi$ es constante. De hecho, es suficiente que exista $C \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) - \varphi(t) = C$ en todo punto común de continuidad t de ψ y φ .

Denotaremos con $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ al conjunto de las aplicaciones continuas f de \mathbb{R} en \mathbb{C} tales que $|f| \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $u = \text{Re}(f)$, $v = \text{Im}(f)$, $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si y sólo si $u, v \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f d\varphi = \int_{-\infty}^\infty u d\varphi + i \int_{-\infty}^\infty v d\varphi. \quad (1.33)$$

Además,

$$\left| \int_{-\infty}^\infty f d\varphi \right| \leq \int_{-\infty}^\infty |f| d\varphi. \quad (1.34)$$

Definición 1.4. Se dice que una función de distribución φ es una *distribución de momentos (FDM)* si está normalizada y $\mathbb{C}[x] \subseteq C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Nota 1.11. Para asegurar que $\mathbb{C}[x] \subseteq C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es suficiente demostrar que $\int_{-\infty}^\infty P(t) d\varphi(t)$ converge para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, para lo cual basta demostrar evidentemente que esto es cierto de todo polinomio x^n , $n \geq 0$. Ahora, esto es cierto de $P(x)$ si $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (y, en particular, de x^{2n} , $n \geq 0$), pues

$$\int_{-\infty}^\infty |P(t)| d\varphi(t) = \int_{-\infty}^\infty P(t) d\varphi(t)$$

y, como $x^n = \frac{1}{2}(x^n + 1)^2 - \frac{1}{2}x^{2n} - \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |t^n| d\varphi(t) &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (t^n + 1)^2 d\varphi(t) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty t^{2n} d\varphi(t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\varphi(t), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la afirmación. Pueden existir, sin embargo, funciones continuas f tales que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t)$ converge pero que $f \notin C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es decir, que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| d\varphi(t) = \infty$. Por ejemplo, si $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-s^2} ds$ es la llamada *función de distribución normal de Gauss* entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} dt,$$

y es fácil ver que si $f(t) = e^{t^2} \frac{\text{sent}}{t}$ ($f(0) = 1$) entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sent}}{t} dt = \pi.$$

Sin embargo, $|f| \notin C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (Véase Apostol [3] Chap X).

Si φ es una función de distribución, denotaremos con $\mathcal{G}(\varphi)$ el conjunto de los *puntos de crecimiento de φ* , es decir, el conjunto

$$\mathcal{G}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x + \delta) - \varphi(x - \delta) > 0, \forall \delta > 0\}. \quad (1.35)$$

Se dice que $\mathcal{G}(\varphi)$ es el *espectro* de φ .

Sea φ una distribución de momentos, así que $\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi(t) = 1$, y sea

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\varphi(t). \quad (1.36)$$

Supóngase que $\mathcal{G}(\varphi)$ es infinito. Entonces, \mathcal{L} es positivo. En efecto, si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \neq 0$, es tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $a < b$ en \mathbb{R} son tales que $\mathcal{G}(\varphi) \cap [a, b] \neq \emptyset$ y que ninguna raíz de $P(x)$ esté en $[a, b]$, entonces $\text{Inf}_{t \in [a, b]} P(t) = c > 0$ y $\varphi(b) > \varphi(a)$, así que

$$\mathcal{L}(P(x)) \geq c \int_a^b d\varphi(t) = c(\varphi(b) - \varphi(a)) > 0.$$

Se dice \mathcal{L} es el *funcional de momentos definido por φ* .

Nota 1.12. Si $\mathcal{G}(\varphi)$ es finito y $P(x)$ es un polinomio, puede no ser posible encontrar un intervalo $[a, b]$ libre de raíces de $P(x)$ y tal que $[a, b] \cap \mathcal{G}(\varphi) \neq \emptyset$. Véase la Nota 1.15.

Teorema 1.5. Si φ es una distribución de momentos con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito, si \mathcal{L} es el FM definido por φ , si $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq [a, b]$ donde $a < b$, y si $\{P_n(x)\}$ es el SMOP para \mathcal{L} , entonces $\{P_n(x)\}$ está acotado y las raíces de todos los $P_n(x)$ están en (a, b) .

Demostración. Supóngase que $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.7). Como \mathcal{L} es positivo, B_n y C_{n+1} son reales con $C_{n+1} > 0$, $n \geq 0$. Sea $C = \max\{1, a^2, b^2\}$. Obsérvese que como φ es constante en $(-\infty, a)$ entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = (\varphi(a-) - \varphi(a)) f(a) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t)$$

para toda función continua en $C_{\varphi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, así que si $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$ (lo cual ocurre si $a < \inf(\mathcal{G}(\varphi))$), entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t),$$

pues, de hecho, φ es constante en $(-\infty, a]$, de lo cual $\varphi(a-) = \varphi(a)$. En tal caso

$$\begin{aligned} \int_a^b t^2 P_n^2(t) d\varphi(t) &\leq C \int_a^b P_n^2(t) d\varphi(t) = C\lambda_n, \\ \lambda_n &= \int_{-\infty}^{\infty} P_n^2(t) d\varphi(t). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_a^b t^2 P_n^2(t) d\varphi(t) &= \lambda_{n+1} + B_n^2 \lambda_n + C_n^2 \lambda_{n-1} \\ &= \lambda_n (C_{n+1} + B_n^2 + C_n) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Esto se deduce de (1.1), (1.7) y (1.8), e implica que $C_{n+1} + B_n^2 + C_n \leq C$ para todo $n \geq 0$, lo cual asegura la acotación de $\{P_n(x)\}$.

Supongamos ahora $n \geq 1$ y que $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$ o $P_n(a) = 0$. En tal caso

$$\int_a^b P_n(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t) d\varphi(t) = \mathcal{L}(P_n(x)) = 0.$$

así que $P_n(t)$ debe cambiar de signo en (a, b) ; es decir, debe existir $t \in (a, b)$ tal que $P_n(t) = 0$. Sean $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$ las raíces de $P_n(x)$ en (a, b) y sea $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$. Claramente $m \leq n$ y todas las raíces de $P(x) P_n(x)$ en

(a, b) son de orden par, así que $P(t)P_n(t)$ no cambia de signo en $[a, b]$. Esto implica que

$$\int_a^b P(t)P_n(t) d\varphi(t) = \mathcal{L}(P(t)P_n(t)) \neq 0,$$

lo cual es absurdo si $m < n$. Entonces $m = n$, y todas las raíces de $P_n(x)$ están en (a, b) . Ahora, si $P_n(a) \neq 0$, las raíces de $P_n(x)$ están en (a', b) para todo $a' < a$, de lo cual en $[a, b)$, y entonces en (a, b) . \square

Nota 1.13. Obsérvese que $\mathcal{G}(\varphi)$ es cerrado en \mathbb{R} . En efecto, si $a \notin \mathcal{G}(\varphi)$, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(a - \delta) = \varphi(a + \delta)$, lo cual implica, puesto que φ es creciente, que $\varphi(t) = \varphi(t')$ si $a - \delta < t < t' < a + \delta$, así que $(a - \delta, a + \delta) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$. Obsérvese también que de la demostración del teorema anterior se deduce que ni $a = \text{Inf} \mathcal{G}(\varphi)$ ni $b = \text{sup} \mathcal{G}(\varphi)$, los cuales están en $\mathcal{G}(\varphi)$, pueden ser raíces de alguno de los $P_n(x)$.

Nota 1.14. En la Sección 3 demostraremos que todo funcional positivo acotado \mathcal{L} admite una representación de la forma

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\varphi(t), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

para alguna distribución de momentos φ con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito.

Nota 1.15. Si φ es una distribución de momentos con $\mathcal{G}(\varphi)$ finito, digamos $\mathcal{G}(\varphi) = \{t_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, \mathcal{L} definido por (1.36), no es positivo. En efecto, es claro que si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$,

$$\mathcal{L}(P(x)) = \sum_{k=1}^n P(t_k) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-}))$$

y si $P(x) = (x - t_1)^2(x - t_2)^2 \cdots (x - t_n)^2$ entonces $P(x) \neq 0$ y $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$; sin embargo, $\mathcal{L}(P(x)) = 0$. Nótese además que $\mathcal{G}(\varphi) = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$, $n \geq 1$, si y sólo si φ es una función escalonada creciente, constante ($=\varphi(t_k)$) en $[t_k, t_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, en $(-\infty, t_1)$ ($=\varphi(-\infty+)$) y en $[t_n, \infty)$ ($=\varphi(\infty-)$). Naturalmente, $\mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$ si y sólo si φ es constante en \mathbb{R} .

Nota 1.16. Sea φ una función de distribución. Se definen

$$\begin{aligned} \mu((a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a+), \\ -\infty &< a \leq b < \infty, \\ \mu((a, b)) &= \varphi(b-) - \varphi(a+), \\ -\infty &< a < b \leq \infty. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Teniendo en cuenta que $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ y $[a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$, las anteriores definiciones fuerzan las dos siguientes:

$$\begin{aligned} \mu([a, b)) &= \varphi(b-) - \varphi(a-), \\ -\infty &< a \leq b \leq \infty, \\ \mu([a, b]) &= \varphi(b) - \varphi(a-), \\ -\infty &< a \leq b < \infty. \end{aligned} \quad (1.38)$$

En particular $\mu((a, b)) = \varphi(b) - \varphi(a)$ si $-\infty < a \leq b < \infty$, $\mu((-\infty, b]) = \varphi(b) - \varphi(-\infty+)$ si $-\infty < b < \infty$, $\mu(\mathbb{R}) = \mu((-\infty, \infty)) = \varphi(\infty-) - \varphi(-\infty+)$, $\mu([a, \infty)) = \varphi(\infty-) - \varphi(a-)$ si $-\infty < a < \infty$. Obsérvese que

$$\mu(\{a\}) = \varphi(a) - \varphi(a-), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

Sea $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, $n \geq 1$, donde los I_k son intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a \leq b < +\infty$. Entonces A es también reunión disyunta de finitos intervalos de esta forma. Esto es claro si $n = 1$. También es cierto si $n = 2$, pues $I_1 \cup I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup I_2$ e $I_1 \setminus I_2$ es evidentemente un tal intervalo o la unión disyunta de dos de tales intervalos. La afirmación resulta entonces de un argumento por inducción, observando que $\bigcup_{k=1}^n I_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} I_k \right) \cup I_n$ y que si los I_k , $1 \leq k \leq n-1$, son ya disyuntos, entonces $I = \bigcup_{k=1}^{n-1} (I_k \setminus I_n)$ es reunión de intervalos disyuntos de la forma exigida e $I \cap I_n = \emptyset$. Suponiendo entonces que los I_k son disyuntos, definimos

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(I_k). \quad (1.40)$$

Con esta definición es fácil ver que si A está dado como arriba y también $A = \bigcup_{k=1}^n I'_k$ con los I'_k disyuntos (y de la forma $(a_k, b_k]$) entonces (Bartle [8], Chap. IX)

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(I'_k), \quad (1.41)$$

para lo cual basta evidentemente establecer la anterior igualdad cuando A es de hecho un intervalo $(a, b]$, y muestra en particular que $\mu(A)$ dada por (1.40) es independiente de la representación de A como reunión de intervalos disyuntos.

Ahora, el conjunto \mathcal{A} de las reuniones finitas de intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a \leq b < +\infty$, es un álgebra de conjuntos (R. Bartle [8], Chap. IX), es decir,

si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ y $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Además, μ es una *medida positiva sobre \mathcal{A}* , es decir,

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad (1.42)$$

siempre y cuando $A_k \in \mathcal{A}$ para todo k , $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$. Esto resulta fácilmente de las anteriores consideraciones. Si $[\mathcal{A}]$ denota entonces la σ -álgebra generada por \mathcal{A} (Bartle [8], Chap. II), $[\mathcal{A}]$ contiene la σ -álgebra \mathcal{B} generada por los subconjuntos abiertos de \mathbb{R} (la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}), y μ se extiende a una medida positiva μ^* sobre $[\mathcal{A}]$ (la *medida exterior definida* por μ . Bartle [8], Chap. IX). Escribiremos aún $\mu^* = \mu$. Si $f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, se tiene que f es μ -integrable; o sea, $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mu)$. Además,

$$\int f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\varphi(t), \quad f \in C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \quad (1.43)$$

Nótese que $\mathcal{G}(\varphi) = \text{Supp } \mu$ el *soporte de la medida μ* , es decir, el menor subconjunto cerrado F de \mathbb{R} tal que $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$. En efecto, $\mathbb{R} \setminus \mathcal{G}(\varphi)$ es reunión enumerable de intervalos abiertos disjuntos, y si (a, b) con $a < b$ es uno de tales intervalos, $\mu((a, b)) = \varphi(b-) - \varphi(a+) = 0$, pues $\varphi(t) = \varphi(t')$ si $a < t \leq t' < b$. Por otra parte, si F es cerrado y $\mu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$ entonces $\mu((a, b)) = 0$ para todo intervalo abierto tal que $(a, b) \cap F = \emptyset$, lo cual implica que $(a, b) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \emptyset$. Entonces, $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq F$. En particular,

$$\mu(\mathcal{G}(\varphi)) = \mu(\mathbb{R}). \quad (1.44)$$

Si además

$$\psi(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.45)$$

entonces ψ es creciente, continua por la derecha y $0 \leq \psi(x) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$, siendo entonces una función de distribución tal que

$$\mu(x) = \psi(x) + \varphi(-\infty+) \quad (1.46)$$

y $\psi(-\infty+) = 0$.

Nota 1.17. Si \mathcal{M} es una σ -álgebra de subconjuntos de un conjunto X (Bartle [8], Chap II), $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ converge si $(A_k) \subseteq \mathcal{M}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ y $A_k \cap A_j = \emptyset$ cuando $k \neq j$, y si además

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \quad (1.47)$$

se dice aún que μ es una *medida sobre X para la σ -álgebra \mathcal{M}* , aunque no necesariamente una medida positiva (una carga, para [8]). Es aún posible permitir que μ tome valores complejos ($\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$), en cuyo caso se dice que μ es una *medida compleja* (Rudin [26]). Las cargas y medidas complejas sobre la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} no dejan de tener interés e importancia en la teoría de los polinomios ortogonales sobre la recta.

2. La fracción continua

Sea $\{P_n(x)\}$ un *SMOP*, el cual satisface la relación de recurrencia

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad (2.1) \\ n \geq 0, \quad P_{-1}(x) = 0,$$

Evidentemente $\{P_n(x)\}$ queda unívocamente determinado por la relación (2.1) anterior para $n \geq 1$ y por las condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - B_0. \quad (2.2)$$

Las condiciones (2.2) aseguran que $P_n(x)$ es mónico y de grado n para todo $n \geq 0$ (naturalmente, $C_n \neq 0$ para $n \geq 1$ y C_0 es arbitrario).

Definición 2.1. Se dice que un sistema

$$\{Q_n(x) \mid n \geq 0\}$$

de polinomios en $\mathbb{C}[x]$ es *correcursivo* con $\{P_n(x)\}$ (Chihara [18]) si

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x), \quad (2.3) \\ n \geq 1.$$

No se imponen condiciones sobre *grado*($Q_n(x)$), pero de (2.3) se deduce que

$$\text{grado}(Q_{n+1}(x)) = \text{grado}(Q_n(x)) + 1$$

para todo $n \geq 0$. Es claro además que si $\{Q_n(x)\}$ satisface (2.3) para $n \geq 0$ y $Q_{-1}(x) = 0$, necesariamente $Q_n(x) = Q_0(x) P_n(x)$, $n \geq 0$, así que si $Q_0(x) \neq 0$, $\text{grado}(Q_n(x)) = n + \text{grado}(Q_0(x))$, $n \geq 0$. Como es claro, $\{Q(x) P_n(x)\}$ es correcursivo con $\{P_n(x)\}$ cualquiera que sea el polinomio $Q(x)$.

Si $\{Q_n(x)\}$ satisface (2.3) para $n \geq 1$, es decir, si es correcursivo con $\{P_n(x)\}$, no es posible, en general, expresar $Q_n(x)$ en términos únicamente de $P_n(x)$. Esto siempre es posible, sin embargo, en términos de $\{P_n(x)\}$ y de sus *primeros polinomios asociados*.

Definición 2.2. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) e $i = 0, 1, 2, \dots$, el sistema $\{P_n^{(i)}(x)\}$ de los i -ésimos asociados de $\{P_n(x)\}$ está dado por

$$xP_n^{(i)}(x) = P_{n+1}^{(i)}(x) + B_{n+i}P_n^{(i)}(x) + C_{n+i}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 0, \quad P_{-1}^{(i)}(x) = 0. \quad (2.4)$$

Se supone, naturalmente, que $P_0^{(i)}(x) = 1$. Claramente $\{P_n^{(i)}(x)\}$ es un SMOP para el funcional de momentos $\mathcal{L}^{(i)}$ dado por

$$\mathcal{L}^{(i)}\left(\sum_{n=0}^m a_n P_n^{(i)}(x)\right) = a_0, \quad m \geq 0, \quad (2.5)$$

donde $a_n \in \mathbb{C}, n \geq 0$. Obviamente $\{P_n^{(i)}(x)\}$ está también dado por (2.4) para $n \geq 1$ y por las condiciones iniciales

$$P_0^{(i)}(x) = 1, P_{-1}^{(i)}(x) = x - B_i. \quad (2.6)$$

El sistema $\{P_n^{(1)}(x)\}$ es el sistema de los primeros asociados de $\{P_n(x)\}$. La relación (2.4) se escribe también en la forma, a veces conveniente,

$$xP_n^{(i)}(x) = P_{n+1}^{(i)}(x) + B_n^{(i)}P_n^{(i)}(x) + C_n^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 0, \quad P_{-1}^{(i)}(x) = 0, \quad (2.7)$$

donde $B_n^{(i)} = B_{n+i}, C_n^{(i)} = C_{n+i}, n \geq 0$. Obviamente $P_n(x) = P_n^{(0)}(x), n \geq 0$.

Evidentemente $Q_n(x) = Q(x)P_{n-1}^{(1)}(x), n \geq 1$, donde $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ es arbitrario, es correcurso con $\{P_n(x)\}$. Es también claro que si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$, es el único sistema $\{q_n(x)\}$ correcurso con $\{P_n(x)\}$ tal que $q_0(x) = Q_0(x), q_1(x) = Q_1(x)$. Es decir, $Q_0(x), Q_1(x)$ determinan unívocamente a $\{Q_n(x)\}$.

Teorema 2.1. Si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$ entonces

$$Q_n(x) = Q_0(x)P_n(x) + (Q_1(x) - (x - B_0)Q_0(x))P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \geq 0. \quad (2.8)$$

Demostración. Si $q_n(x)$ denota el término de la derecha en (2.8), es claro de lo dicho anteriormente que $\{q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$. Como además $q_0(x) = Q_0(x)$ y $q_1(x) = Q_1(x)$, necesariamente $q_n(x) = Q_n(x), n \geq 0$. \square

Corolario 2.1. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) entonces

$$P_n(x) = (x - B_0)P_{n-1}^{(1)}(x) - C_1P_{n-2}^{(2)}(x), \quad n \geq 1. \quad (2.9)$$

Demostración. Si $Q_n(x) = P_{n+1}(x), n \geq 0$, es claro que $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n^{(1)}(x)\}$ y $Q_0(x) = P_1(x) = x - B_0, Q_1(x) = P_2(x) = (x - B_1)P_1(x) - C_1$, así que $Q_1(x) - (x - B_1)Q_0(x) = -C_1$. Entonces, según el teorema, $Q_n(x) = (x - B_0)P_n^{(1)}(x) - C_1P_{n-1}^{(2)}(x), n \geq 0$, de lo cual (2.9) resulta inmediatamente. \square

Nota 2.1. Si $\{Q_n(x)\}$ es correcurso con $\{P_n(x)\}$ y $Q_0(x) = 0$, no necesariamente $Q_n(x) = 0$ para todo $n \geq 0$. Por ejemplo, $Q_n(x) = P_{n-1}^{(1)}(x), n \geq 0$, es correcurso con $\{P_n(x)\}$ y $Q_0(x) = 0$. Nótese que (2.8) es aún válida en este caso. El siguiente resultado, debido a Abel, es frecuentemente útil, y será fundamental en lo que sigue.

Teorema 2.2. [Abel] Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1), entonces

$$P_n^{(1)}(x)P_n(x) - P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n+1}(x) = \lambda_n, \quad n \geq 0, \quad (2.10)$$

donde, siendo \mathcal{L} el FM de $\{P_n(x)\}$, $\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)), n \geq 0$.

Demostración. Obsérvese que $\lambda_n = C_1 \dots C_n$ para $n \geq 1$. La afirmación es clara si $n = 0$, pues $\lambda_0 = 1$. Supongámosla entonces válida para $n - 1, n \geq 1$, y demostrémosla para n . Se tiene, en efecto, que

$$\begin{aligned} &P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n+1}(x) \\ &= P_{n-1}^{(1)}(x)[(x - B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)] \\ &= (x - B_n)P_{n-1}^{(1)}(x)P_n(x) - C_nP_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) \\ &= [P_n^{(1)}(x) + C_nP_{n-2}^{(1)}(x)]P_n(x) \\ &\quad - C_nP_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) \\ &= P_n^{(1)}(x)P_n(x) \\ &\quad - C_n[P_{n-1}^{(1)}(x)P_{n-1}(x) - P_{n-2}^{(1)}(x)P_n(x)] \end{aligned}$$

y la afirmación para n resulta inmediatamente de esto. \square

Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1), la fracción continua

$$\frac{1}{|x - B_0|} - \frac{C_1}{|x - B_1|} - \frac{C_2}{|x - B_2|} - \dots, \quad (2.11)$$

es decir,

$$\frac{1}{x - B_0 - \frac{C_1}{x - B_1 - \frac{C_2}{x - B_2 - \dots}}},$$

se denomina la *fracción continua de Stieltjes* de $\{P_n(x)\}$;

$$X_n(x) := \frac{1}{|x - B_0|} - \frac{C_1}{|x - B_1|} - \dots - \frac{C_{n-1}}{|x - B_{n-1}|}, \tag{2.12}$$

para $n \geq 2$, se denomina el *n-convergente* de dicha fracción (Chihara [19], Wall [30]). Es usual convenir en que $X_1(x) = \frac{1}{x - B_0}$. Si $z \in \mathbb{C}$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 1$ suficientemente grande y $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z)$ existe en \mathbb{C} , se dice que la *fracción continua* (2.11) *converge en z*. Si $X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z)$, es corriente escribir

$$X(z) = \frac{1}{|z - B_0|} - \frac{C_1}{|z - B_1|} - \frac{C_2}{|z - B_2|} - \dots. \tag{2.13}$$

La función $X(z)$, definida en todos los puntos donde (2.11) converge, se denomina aún la *fracción continua* de $\{P_n(x)\}$.

Teorema 2.3. *Si $X_n(x)$ es el n-convergente de la fracción continua de $\{P_n(x)\}$, entonces*

$$X_n(x) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n^{(1)}(x)}, \quad n \geq 1. \tag{2.14}$$

Demostración. La afirmación es clara para $n = 1$, pues $P_0^{(1)}(x) = 1$ y $P_1(x) = x - B_0$. Supongámosla para n y demostrémosla para $n + 1$. Entonces, por hipótesis,

$$\begin{aligned} X_n^{(1)}(x) &:= \frac{1}{|x - B_0^{(1)}|} - \frac{C_1^{(1)}}{|x - B_1^{(1)}|} - \dots - \frac{C_{n-1}^{(1)}}{|x - B_{n-1}^{(1)}|} \\ &= \frac{P_{n-1}^{(2)}(x)}{P_n^{(1)}(x)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

y como

$$\begin{aligned} X_{n+1}(x) &= \frac{1}{x - B_0 - C_1 \left[\frac{1}{|x - B_1|} - \frac{C_2}{|x - B_2|} - \dots - \frac{C_n}{|x - B_n|} \right]} \\ &= \frac{P_n^{(1)}(x)}{(x - B_0) P_n^{(1)}(x) - C_1 P_{n-1}^{(2)}(x)}, \end{aligned}$$

la afirmación para $n + 1$ resulta de (2.8). \square

Nota 2.2. Definiendo $X_n^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, de la manera obvia, se tendrá que

$$X_n^{(i)}(x) = \frac{P_{n-1}^{(i+1)}(x)}{P_n^{(i)}(x)}, \quad n \geq 1. \tag{2.16}$$

Nota 2.3. Se deduce que si $z \in \mathbb{C}$ y no es raíz de ninguno de los $P_n(x)$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 1$. En particular, si el FM de $\{P_n(x)\}$ es positivo o, lo que es lo mismo, si B_n y C_n son reales para $n \geq 0$ y $C_n > 0$ para $n \geq 1$, $X_n(z)$ está definido para todo $n \geq 0$ si $z \notin \mathbb{R}$.

Si para todo $n \geq 1$, $e_k^n = (\delta_{0k}, \delta_{1k}, \dots, \delta_{n-1k})$, $0 \leq k \leq n - 1$, es la base canónica de \mathbb{C}^n (la cual es un sistema ortonormal con respecto al producto interno $\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_k^n, \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k e_k^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \overline{\beta_k}$), un FM, cuyo SMOP $\{P_n(x)\}$ satisface (2.1), define para $i = 0, 1, 2, \dots$ un operador lineal $L_n^{(i)} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, por (recordamos que $B_k^{(i)} = B_{k+i}$, $C_k^{(i)} = C_{k+i}$):

$$L_n^{(i)} e_k^n = e_{k+1}^n + B_k^{(i)} e_k^n + C_k^{(i)} e_{k-1}^n, \quad 0 \leq k < n, \tag{1.17}$$

$$L_n^{(i)} (e_{n-1}^n) = B_{n-1}^{(i)} e_{n-1}^n + C_{n-1}^{(i)} e_{n-2}^n,$$

donde suponemos que $e_{-1}^n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Nótese que la matriz de $L_n^{(i)}$ con respecto a la base $\{e_k^n\}$, la cual denotamos aún con $L_n^{(i)}$, es

$$L_n^{(i)} = \begin{pmatrix} B_0^{(i)} & C_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & B_1^{(i)} & C_2^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B_2^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{n-2}^{(i)} & C_{n-1}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & B_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

para $n \geq 1$.

Si I_n es la matriz idéntica de orden n , es evidente que

$$P_1^{(i)}(x) = x - B_0^{(i)} = \text{Det}(xI_1 - L_1^{(i)}) \quad (2.19)$$

y desarrollando el determinante $\text{Det}(xI_{n+1} - L_{n+1}^{(i)})$ con respecto a la última columna, se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{Det}(xI_{n+1} - L_{n+1}^{(i)}) &= (x - B_n^{(i)}) \text{Det}(xI_n - L_n^{(i)}) \\ &\quad - C_n^{(i)} \text{Det}(xI_{n-1} - L_{n-1}^{(i)}), \end{aligned}$$

donde convenimos en que $\text{Det}(xI_0 - L_0^{(i)}) = 1$. Entonces,

$$P_n^{(i)}(x) = \text{Det}(xI_n - L_n^{(i)}), \quad n \geq 0. \quad (2.20)$$

Por otra parte, la regla de Cramer muestra que

$$(xI_n - L_n^{(i)})^{-1} = \frac{1}{P_n^{(i)}(x)} A_n^{(i)}, \quad n \geq 1, \quad (2.21)$$

donde $A_n^{(i)} = [a_{hk}^{(i)}]_{n \times n}$ es una matriz tal que

$$a_{11}^{(i)} = \text{Det}(xI_{n-1} - L_{n-1}^{(i)}), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

así que

$$\left\langle (xI_n - L_n^{(i)})^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle = \frac{P_{n-1}^{(i+1)}(x)}{P_n^{(i)}(x)}, \quad n \geq 0. \quad (2.23)$$

En particular, con $L_n = L_n^{(0)}$,

$$\left\langle (xI_n - L_n)^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle = X_n(x) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n(x)}, \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

Teorema 2.4. Si $n \geq 1$,

$$M_n = \sup \{1 + |B_k| + |C_k|, 0 \leq k \leq n-1\}$$

y

$$\|L_n\| = \sup \{|L_n(u)| \mid u \in \mathbb{C}^n, \|u\| \leq 1\}, \quad (2.25)$$

entonces $\|L_n\| \leq 3M_n$, y los valores propios de L_n son las raíces de $P_n(x)$, las cuales quedan todas contenidas en el disco $\overline{D}(0, 3M_n) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3M_n\}$.

Demostración. Supongamos que $u = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_k^n$, así que

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2. \quad \text{Nótese que}$$

$$L_n(u) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1}^n + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \alpha_k e_k^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \alpha_k e_{k-1}^n,$$

de lo cual se deduce sin más que si $\|u\| \leq 1$ entonces

$$\|L_n(u)\| \leq (1 + 2M_n) \|u\| \leq 3M_n, \quad \|L_n\| \leq 3M_n,$$

y si λ es un valor propio de L_n , es decir, una raíz de $\text{Det}(xI_n - L_n) = P_n(x)$, y v es un vector propio de L_n para λ , entonces

$$|\lambda| = \frac{\|L_n(v)\|}{\|v\|} \leq \|L_n\| \leq 3M_n.$$

Esto demuestra el teorema. \square

Definición 2.3. Si $\{P_n(x)\}$ está dado por (2.1) y existe $M > 0$ tal que

$$\sup \{1 + |B_k| + |C_k|, k \geq 0\} \leq \frac{M}{3}, \quad (2.26)$$

se dice que $\{P_n(x)\}$ está acotado por M .

Si M_n para $\{P_n(x)\}$ es como en el Teorema 2.4 y $\{P_n(x)\}$ está acotado por M entonces $M_n \leq \frac{M}{3}$ para todo $n \geq 1$, así que las raíces de $P_n(x)$ están contenidas en $\overline{D}(0, M)$ para todo $n \geq 1$, y en $[-M, M]$ si B_n, C_n son reales y $C_n > 0$ para $n \geq 1$. Es decir, si el funcional de momentos de $\{P_n(x)\}$ es positivo y acotado por M , las raíces de $P_n(x)$ están en $[-M, M]$ para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.5. Si $\{P_n(x)\}$ está acotado por M , la fracción continua de $\{P_n(x)\}$ converge en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\}$ hacia una función analítica $X(z)$ en este dominio. De hecho, la convergencia es uniforme en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq M'\}$ para todo M

Demostración. Si para todo $n \geq 1$, $L_n = L_n^{(0)}$ está definido por (2.17) (con $i = 0$), es claro que $\|L_n\| \leq M$ y $\|L_n^k\| \leq M^k$ para todo $k \geq 0$. En efecto,

$$\left\| I_n - (zI_n - L_n) \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| = \left\| \frac{L_n^{m+1}}{z^{m+1}} \right\| \leq \frac{M^{m+1}}{|z|^{m+1}},$$

lo cual implica que

$$\left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| \leq \left\| (zI_n - L_n)^{-1} \right\| \frac{M^{m+1}}{|z|^{m+1}},$$

así que si $|z| > M$, con lo cual $\left(\frac{M}{|z|}\right)^{m+1} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| = 0.$$

Como además

$$\begin{aligned} &\left| \left\langle (zI_n - L_n)^{-1} e_0^n, e_0^n \right\rangle - \sum_{k=0}^m \frac{\langle L_n^k e_0^n, e_0^n \rangle}{z^{k+1}} \right| \\ &\leq \left\| (zI_n - L_n)^{-1} - \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{z^{k+1}} \right\| \end{aligned}$$

se concluye, con $\mu_{nk} = \langle L_n^k e_0^n, e_0^n \rangle$, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} - \sum_{k=0}^m \frac{\mu_{nk}}{z^{k+1}} \right| = 0, \quad |z| > M.$$

Esto implica, en particular, que $\sum_{k=0}^m \frac{\mu_{nk}}{z^{k+1}}$ es la serie de

Laurent de $\frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$ en $|z| > M$. Es importante observar que

$$|\mu_{nk}| \leq \|L_n\|^k \leq M^k, \quad n \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Obsérvese además que

$$\frac{P_n^{(1)}(z)}{P_{n+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \frac{\lambda_n}{P_{n+1}(z)P_n(z)}, \quad (2.27)$$

$$n \geq 1, \quad |z| > M,$$

como resulta de (2.10). Esto implica, en vista de que es obviamente así (por división larga, por ejemplo) para el término de la derecha, que el desarrollo de Laurent en $|z| > M$ del término de la izquierda sólo contiene potencias de z^{-k} con $k \geq 2n + 1$, y esto también será cierto del desarrollo de Laurent de $\frac{P_m^{(1)}(z)}{P_{m+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$

para $m \geq n$, el cual es necesariamente $\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\mu_{mk} - \mu_{nk}}{z^{k+1}}$.

Entonces, para $|z| \geq M' > M$,

$$\left| \frac{P_m^{(1)}(z)}{P_{m+1}(z)} - \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right| \leq \frac{2}{M'} \sum_{k=2n}^{\infty} \left(\frac{M}{M'} \right)^k, \quad n \geq 1,$$

lo cual asegura que $\left\{ \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} \right\}$ es uniformemente de

Cauchy en $|z| \geq M'$ para todo $M' > M$. Por lo tanto

$$X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}$$

existe para $|z| > M$ y es uniforme en $|z| \geq M'$ para todo $M' > M$, de lo cual, en todo subconjunto compacto de $\{z \mid |z| > M\}$. Como $X_n(z)$ es analítica en $|z| > M$, también lo será entonces $X(z)$. \square

Nota 2.3. Es claro que si f es analítica en un subconjunto abierto Ω de \mathbb{C} tal que $\Omega' = \Omega \cap \{z \mid |z| > M\} \neq \emptyset$ y $f(z) = X(z)$ para todo $z \in \Omega'$, entonces $f(z)$ y $X(z)$ pueden prolongarse analíticamente a $\Omega'' = \{z \mid |z| > M\} \cup \Omega$, y las prolongaciones coinciden en este conjunto. Por ejemplo, si $\Omega \supseteq \{z \mid |z| > M\}$, $X(z)$ puede automáticamente considerarse analítica en Ω .

El siguiente teorema, último de la presente sección, tiene importantes implicaciones, como veremos. Suponemos aún que $1 + |B_n| + |C_n| \leq \frac{M}{3}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Teorema 2.6. *El desarrollo de Laurent de $X(z)$ en $|z| > M$ es de la forma*

$$X(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{-k}}{z^k}. \quad (2.28)$$

En particular,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 1. \quad (2.29)$$

Demostración. Supongamos

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k z^k, \quad |z| > M,$$

y sea C un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ que contiene a $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Como

$$X_n(z) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{nk} z^k, \quad |z| > M,$$

donde $b_{nk} = 0, k \geq 0, b_{n,-1} = 1, b_{n,-k} = \mu_{n,k-1}, k \geq 2$, y $X_n(z)$ converge uniformemente a $X(z)$ sobre C cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} b_{nk} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C X_n(z) z^{-k-1} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) z^{-k-1} dz \\ &= b_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, así que $b_k = 0, k \geq 0$, y $b_{-1} = 1$. Esto demuestra el teorema. \square

3. Representación de los funcionales de momentos

Establecemos en esta sección dos teoremas de representación de funcionales de momentos. El primero, válido para funcionales no necesariamente positivos pero cuyo *SMOP* está acotado, involucra la fracción continua de éstos y se expresa mediante integrales de contorno (véanse [6], [14], [15] y [21]). El segundo, válido para funcionales positivos, acotados o no, recurre a funciones de distribución de momentos sobre la recta y, por lo tanto, a medidas de Borel positivas. Sólo demostraremos este último en el caso acotado, pues éste es el único que usaremos, refiriendo al lector a Chihara [19] para la demostración en el caso no acotado (y también para otra demostración del caso acotado).

Teorema 3.1. *Sea \mathcal{L} un funcional de momentos cuyo SMOP $\{P_n(x)\}$ está acotado por M . Sean $X(z)$ la fracción continua de $\{P_n(x)\}$ y C un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ el cual contiene a $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Entonces, \mathcal{L} admite la representación*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) P(z) dz, \quad (3.1)$$

válida para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Demostración. Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) dz = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{n-1}^{(1)}(z) dz = 0, n \geq 1, \quad (3.2)$$

y, recurriendo a (2.10),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_{n+m-1}^{(1)}(z)}{P_{n+m}(z)} P_n(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_C \left[\frac{P_{n+k-1}^{(1)}(z)}{P_{n+k}(z)} - \frac{P_{n+k-2}^{(1)}(z)}{P_{n+k-1}(z)} \right] P_n(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{n-1}^{(1)}(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \int_C \frac{\lambda_{n+k-1} P_n(z)}{P_{n+k}(z) P_{n+k-1}(z)} dz = 0, m, n \geq 1, \end{aligned}$$

se deduce, haciendo $m \rightarrow \infty$, que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) P_n(z) dz = 0, n \geq 1. \quad (3.3)$$

Como $\mathcal{L}'(P(x))$ definido por el término de la derecha en (3.1) es obviamente \mathbb{C} -lineal, (3.2) y (3.3) garantizan, en virtud de (1.9) o (1.11), que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. \square

El siguiente teorema simple (véanse [14], [15], [16]) tiene, sin embargo, consecuencias útiles.

Teorema 3.2. *Supóngase que el funcional \mathcal{L} de $\{P_n(x)\}$, acotado por M , admite también la representación*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz \quad (3.4)$$

donde C es como en el Teorema 3.1 y donde $F(z)$ es analítica en $|z| > M$ con $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$. Entonces, $F(z) = X(z)$, $|z| > M$.

Demostración. Supóngase que

$$X(z) - F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

$|z| > M$. Como en virtud de (3.1) y (3.4),

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C (X(z) - F(z)) z^{n-1} dz = 0, n \geq 1,$$

se deduce que $X(z) - F(z)$ admite una prolongación analítica a todo \mathbb{C} . Como además $\lim_{z \rightarrow \infty} (X(z) - F(z)) = 0$ entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$ (Apostol, Teorema

116.21), así que $X(z) = F(z)$, $|z| > M$. \square

Nota 3.1. De hecho, si $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existe, finito o infinito, $X(z) - F(z)$ es un polinomio (obsérvese que si $P(x)$ es un polinomio y $F(z) = X(z) + P(z)$, $|z| > M$, (3.4) es aún válida).

El siguiente teorema puede ser útil para determinar las fracciones continuas (Ejemplo 5.2 más adelante) y para muchos otros propósitos

Teorema 3.3. [Markov] *Si \mathcal{L} está representado por una distribución de momentos φ con $\mathcal{G}(\varphi)$ infinito y $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, y si $X(z)$ es la fracción continua del SMOP de \mathcal{L} , entonces*

$$X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{z-t} = \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} \quad (3.6)$$

y es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Demostración. La segunda igualdad en (3.6) resulta del hecho de que φ es constante en $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ y del hecho de que $a, b \notin \mathcal{G}(\varphi)$. Sea $M > \max\{|a|, |b|\}$ tal que si $\{P_n(x)\}$, dado por (1.7), es el SMOP de \mathcal{L} , entonces $1 + |B_n| + C_n \leq \frac{M}{3}$ para todo $n \geq 0$. La existencia de M resulta del Teorema 1.5. Demostraremos que si $F(z)$ está dada por los términos de la derecha en (3.6)

entonces F es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, $\lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = 1$ y

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz, P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

donde C es cualquier contorno positivamente orientado de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, M)$ con $\overline{D}(0, M)$ en su interior. Obsérvese que $[a, b] \subseteq [-M, M]$.

Ahora, si $c \notin [a, b]$ y $\varepsilon > 0$ es tal que $D(c, \varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$, entonces

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{[(z-c) - (t-c)]} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(t-c)^{n+1}}$$

en tanto que $z \in D(c, \varepsilon)$ y $t \in [a, b]$. Como $\varepsilon \leq \text{dist}([a, b], c)$, así que

$$\frac{|z-c|}{|t-c|} \leq r < 1, r = \frac{|z-c|}{\varepsilon},$$

para todo $t \in [a, b]$, la convergencia de la serie es uniforme en $[a, b]$, y podemos integrarla término a término con respecto a $d\varphi(t)$ sobre $[a, b]$, para obtener que

$$\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{(t-c)^{n+1}} \right] (z-c)^n, z \in D(c, \varepsilon).$$

Esto demuestra la analiticidad de F en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Por otra parte,

$$zF(z) = \int_a^b \frac{d\varphi(t)}{1-t/z} \rightarrow \int_a^b d\varphi(t) = 1$$

cuando $z \rightarrow \infty$. Finalmente, $[a, b]$ está contenido en el interior de C y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) P(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{z-t} \right] P(z) dz \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P(z)}{z-t} dz \right] d\varphi(t) \\ &= \int_a^b P(t) d\varphi(t) \\ &= \mathcal{L}(P(x)), \end{aligned}$$

como resulta de intercambiar el orden de integración y de la fórmula de Cauchy. Esto demuestra, en virtud del Teorema 3.2, que $F(z) = X(z)$, $|z| > M$, o sea, que $X(z)$ puede prolongarse analíticamente a $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ y está dada por (3.6). \square

Nota 3.2. Bajo las hipótesis del teorema anterior, $X(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. El teorema integral de Cauchy asegura entonces que si C es un contorno cerrado y positivamente orientado de $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ con $[a, b]$ en su interior, (3.1) es aún válida para C .

Nota 3.3. Si μ es la medida de Borel asociada con la distribución de momentos φ del Teorema 3.3 (véase Sección 1), entonces

$$X(z) = \int_{\mathcal{G}(\varphi)} \frac{d\mu(t)}{z-t}, z \notin \mathcal{G}(\varphi), \quad (3.7)$$

y, teniendo en cuenta que $\mathcal{G}(\varphi)$ es, bajo las hipótesis de tal teorema, un subconjunto compacto de \mathbb{R} , se verifica, tal como en la demostración arriba, que $X(z)$ es, de hecho, analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(\varphi)$.

Nota 3.4. Si μ es como en la Nota 3.3 y a es un punto aislado de $\mathcal{G}(\varphi) = \text{Supp } \mu$, y si $r > 0$ es tal que $D(a, r) \cap \mathcal{G}(\varphi) = \{a\}$, entonces lo dicho en la Nota 3.3 asegura que $X(z)$ es analítica en $D^*(a, r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < |\zeta - a| < r\}$, y si $\mathcal{G}_a(\varphi) = \mathcal{G}(\varphi) - \{a\}$, entonces

$$X(z) = \frac{\mu(\{a\})}{z-a} + \int_{\mathcal{G}_a(\varphi)} \frac{d\mu(t)}{z-t}, z \in D^*(a, r), \quad (3.8)$$

así que

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a) X(z) = \mu(\{a\}). \quad (3.9)$$

Es decir,

$$\text{Res}(X(z), a) = \mu(\{a\}). \quad (3.10)$$

Nota 3.5. Obsérvese además que si $\mathcal{G}(\varphi) \subseteq [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, es decir, si $\mathcal{G}(\varphi)$ es compacto, entonces $C_\varphi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ el espacio de todas las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{C} . Mas aún, si $C([a, b], \mathbb{C})$ es el espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ y $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ se identifica con la función

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(a), & x < a \\ f(x), & a \leq x \leq b \\ f(b), & x > b \end{cases}, \quad (3.11)$$

entonces

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) d\varphi(t) = \int \hat{f} d\mu = \int f d\mu' \quad (3.12)$$

donde μ es como en la Nota 3.3 y μ' es la restricción de μ a $[a, b]$.

Demostremos ahora nuestro segundo teorema de representación, válido para funcionales positivos. Como lo hemos mencionado, nos restringiremos al caso acotado, el único que usaremos. Esto nos permitirá recurrir a un conocido teorema de F. Riesz, en lugar de a resultados sobre selección por compacidad del tipo de Helly tal como Chihara [19], lo cual, además, requiere menos consideraciones sobre cuadraturas de Gauss. De todas maneras la demostración en [19], Chap. II, que cubre aún el caso no acotado, es fácil de asimilar y difícil de mejorar.

El resultado de Riesz que necesitaremos es el siguiente:

Lema 3.1. [Teorema de Representación de Riesz] Sean $-\infty < a < b < \infty$ números reales y considérese el espacio $C([a, b])$ de las funciones reales continuas definidas en $[a, b]$. Sea $\mathcal{L} : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación \mathbb{R} -lineal tal que

$$|\mathcal{L}(f)| \leq \|f\| := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad (3.13)$$

Entonces, existe una medida de Borel μ sobre \mathbb{R} tal que

$$\mathcal{L}(f) = \int f d\mu, \quad f \in C([a, b]), \quad (3.14)$$

la cual es positiva si $\mathcal{L}(P(x)) \geq 0$ para todo polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En este último caso

$$\mathcal{L}(1) = \mu(\mathbb{R}) \quad (3.15)$$

y μ tiene soporte compacto contenido en $[a, b]$.

La demostración de la anterior forma del Lema 3.1 puede deducirse fácilmente a partir de Rudin [26], Teorema 6.19, p. 139, si se tiene en cuenta lo observado en la Nota 3.5, y no la daremos. Estableceremos, sin embargo, la positividad de μ . Pero si $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$, teniendo en cuenta que según el Teorema de Aproximación de Weierstrass ([27], p. 154) es posible escoger una sucesión $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\|p_n - f\| < \frac{1}{n}$, y si $q_n(x) = p_n(x) + \frac{1}{n}$ entonces $q_n(t) \geq f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $\|q_n - f\| < \frac{2}{n}$, la afirmación resuelta de esto, pues entonces $\mathcal{L}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(q_n(x)) \geq 0$.

Necesitaremos además el siguiente lema.

Lema 3.2. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$, y si $P(x) \neq 0$ es un polinomio que no toma valores negativos en $[-M, M]$, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)) > 0. \quad (3.16)$$

Demostración. Sea $\{P_n(x)\}$ el sistema mónico ortogonal de \mathcal{L} y sea n tal que el grado de $P(x)$ sea menor que n . Para cualquier polinomio $Q(x)$ de grado menor que $2n$ se tiene que

$$\frac{Q(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n} + R_n(x) \quad (3.17)$$

donde x_1, \dots, x_n son las raíces de $P_n(x)$, las cuales están todas en $[-M, M]$,

$$a_i = \frac{Q(x_i)}{P_n'(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.18)$$

y $R_n(x)$ es un polinomio de grado menor que n . Como, de (1.4), $\mathcal{L}(R_n(x)P_n(x)) = 0$, se concluye, de (3.17) y (3.18), que

$$\mathcal{L}(Q(x)) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(P_n(x)), \quad (3.19)$$

donde

$$A_i = \mathcal{L}\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_i)P_n'(x_i)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

Como el grado de $\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2$ es menor de $2n$, se tiene entonces que

$$\mathcal{L}\left(\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2\right) = \quad (3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_n(x_i)}{(x_i-x_j)P_n'(x_j)}\right)^2 A_i = A_j,$$

de donde se deduce que $A_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ahora bien, como $P(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, y $P(x_j) > 0$ para algún $j = 1, 2, \dots, n$ (pues $P(x)$ tiene grado menor que n), de (3.19), con $P(x)$ en vez de $Q(x)$, se concluye que $\mathcal{L}(P(x)) > 0$. Esto demuestra el lema. \square

Corolario 3.1. Bajo las hipótesis del lema anterior, si $P(x)$, $Q(x)$ son polinomios reales y $P(t) \leq Q(t)$ para todo t en $[-M, M]$, entonces $\mathcal{L}(P(x)) \leq \mathcal{L}(Q(x))$.

Nota 3.6. Las propiedades (3.19) y (3.21) de los funcionales positivos son frecuentemente útiles.

Corolario 3.2. Bajo la hipótesis del corolario anterior, \mathcal{L} es un funcional continuo sobre el espacio $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios reales para la topología de la norma

$$\|P\| = \sup_{t \in [-M, M]} |P(t)|. \quad (3.22)$$

Demostración En efecto, como $-\|P\| \leq P(t) \leq \|P\|$ para todo $t \in [-M, M]$, entonces, en virtud del Corolario 3.1,

$$|\mathcal{L}(P(x))| \leq \|P\|. \quad \square \quad (3.23)$$

Ahora podemos demostrar que

Teorema 3.4. *Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$, existe una medida de Borel positiva μ , con soporte compacto contenido en $[-M, M]$, tal que*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\mu(t), \quad P(x) \in \mathbb{C}[x]. \quad (3.24)$$

Demostración. En virtud del Teorema de Aproximación de Weierstrass [28], p. 154), $\mathbb{R}[x]$ es denso en $C([-M, M])$, el espacio de las funciones reales continuas en $[-M, M]$, cuando se da a este espacio la topología de la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [-M, M]} |f(t)|. \quad (3.25)$$

Como \mathcal{L} es lineal y continuo sobre $\mathbb{R}[x]$ para la topología de esta norma, \mathcal{L} admite una extensión continua $\widehat{\mathcal{L}}$ a $C([-M, M])$, y en virtud del Teorema de Representación de Riesz, Lema 3.1, existe una medida μ con soporte en $[-M, M]$ tal que

$$\widehat{\mathcal{L}}(f) = \int_{-M}^M f(t) d\mu(t), \quad f \in C([-M, M]). \quad (3.26)$$

Como $\mathcal{L}(P(x)) \geq 0$ si $P(t) \geq 0$ para $t \in [-M, M]$, también $\widehat{\mathcal{L}}(f) \geq 0$ para $f \geq 0$ en $C([-M, M])$. Entonces μ es una medida positiva, y es claro que

$$\mathcal{L}(P(x)) = \widehat{\mathcal{L}}(P(x)) = \int_{-M}^M P(t) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) d\mu(t) \quad (3.27)$$

para cualquier polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. \square

Nota 3.7. De lo dicho en la Nota 1.15 se deduce que $\text{Supp } \mu$ en el teorema anterior es infinito.

Nota 3.8. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por μ y \mathcal{L} está representado por dos medidas positivas con soporte compacto μ, ν , no hay pérdida de generalidad al suponer que M es lo suficiente grande para que $\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \nu \subseteq [-M, M]$, y el Teorema de Aproximación de Weierstrass, la densidad uniforme de $\mathbb{R}[x]$ en $C([-M, M])$, asegura entonces que $\mu = \nu$. Es decir, si \mathcal{L} es positivo y acotado, \mathcal{L} sólo puede ser representado por una única medida positiva con soporte compacto. Más aún, si un funcional \mathcal{L} está definido por una medida positiva con soporte compacto infinito, ésta es la única medida que representa a \mathcal{L} . Para ver esto, supóngase por el contrario que

\mathcal{L} puede representarse en la forma (3.24) mediante dos medidas positivas μ, ν , μ con soporte compacto. Sea $\varphi \geq 0$, continua y con soporte compacto, y sea $\psi = \sqrt{\varphi}$. Sea $\{p_n(x)\}$ una sucesión de polinomios reales que aproximen uniformemente a ψ en $[-M, M]$, donde $M > 0$ es tal que $\text{Supp } \mu \cup \text{Supp } \varphi \subseteq [-M, M]$. La existencia de $\{p_n(x)\}$ está garantizada por el Teorema de Aproximación de Weierstrass ([24], p.154). Evidentemente $\{p_n^2(x)\}$ converge uniformemente a φ en $[-M, M]$, así que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\mu &= \int_{-M}^M \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-M}^M p_n^2(t) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n^2(t) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_n^2(t) d\nu \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-M}^M p_n^2(t) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\nu. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Esto implica que si $\varphi = 0$ en $\text{Supp } \mu$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi d\nu = 0$, así que $\text{Supp } \nu \subseteq \text{Supp } \mu$. Esto último implica a su vez que, para $\varphi \geq 0$, la desigualdad en (3.28) es realmente una igualdad. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} f d\nu \quad (3.29)$$

para toda función continua f con soporte compacto, así que $\mu = \nu$, y la afirmación está demostrada.

Nota 3.9. Como lo hemos mencionado, es posible demostrar (véase [10], [19], [27]) que si \mathcal{L} es positivo aunque no acotado, \mathcal{L} admite aún una representación de la forma (3.28) con μ positiva. En tal caso μ no tendrá soporte compacto (Nota 3.8), y tal representación no será necesariamente única: pueden existir infinitas medidas distintas μ para las cuales (3.24) se verifique (véase [14], p.73). Cuando este último es el caso, se dice que el *problema de momentos para \mathcal{L} es indeterminado*. Cuando el problema de momentos para \mathcal{L} está determinado, es decir, cuando aun si no tiene soporte compacto la medida que representa a \mathcal{L} es única, se dice que tal medida es una *medida espectral* para \mathcal{L} . Este es el caso si \mathcal{L} es positivo y acotado.

Si \mathcal{L} es positivo, acotado por $M > 0$ y está representado por la medida positiva μ con soporte compacto

en $[-M, M]$, y si $X(z)$ es la fracción continua de su SMOP $\{P_n(x)\}$, entonces

$$X(z) = \int_{-M}^M \frac{d\mu(s)}{z-s}, \quad z \notin [-M, M] \quad (3.30)$$

como se deduce del Teorema de Markov (Teorema 3.3). La integral con respecto a μ es sobre $[-M, M]$.

En vista de que $\{P_n(x)\}$ y $\{P_n^{(1)}(x)\}$ son polinomios reales se tiene, para $\text{Im } z \neq 0$, que

$$\overline{X(z)} = X(\bar{z}) \quad (3.31)$$

Esto implica que, para $0 < \varepsilon < 1, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{Re}(X(t-i\varepsilon)) &= \int_{-M}^M \frac{(t-s)d\mu(s)}{(t-s)^2 + \varepsilon^2}, \\ \text{Im}(X(t-i\varepsilon)) &= \frac{\varepsilon d\mu(s)}{(t-s)^2 + \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nótese que $\text{Im}(X(t-i\varepsilon)) \geq 0$ en tanto $\varepsilon > 0$. Se tiene así el siguiente teorema adicional de representación para los funcionales positivos acotados, el cual puede ser útil en ciertas circunstancias.

Corolario 3.3. Si \mathcal{L} es positivo y acotado por $M > 0$ y si $X(z)$ es la fracción continua de su SMOP, entonces

$$\mathcal{L}(P(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) P(t) dt \quad (3.33)$$

para todo $a \in \mathbb{R}, a > M$.

Demostración. Para demostrar (3.33) es suficiente establecer su validez para $P(x) = x^n, n \geq 0$. Obviamente $(t-i\varepsilon)^n = t^n + \varepsilon p_n(t, \varepsilon) + i\varepsilon q_n(t, \varepsilon)$, donde $p_n(t, \varepsilon)$ y $q_n(t, \varepsilon)$ son polinomios en t y ε con coeficientes reales. Por lo tanto, si $M < a < \infty$, existe una constante $C > 0$, dependiente únicamente de a y n , tal que $|p_n(t, \varepsilon)| \leq C, |q_n(t, \varepsilon)| \leq C$ para $|t| \leq a$ y $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Se deduce que si $\Gamma_{a, \varepsilon}$ es el borde positivamente orientado del rectángulo de vértices $(-a, -\varepsilon), (a, -\varepsilon), (a, \varepsilon), (-a, \varepsilon)$ se tiene, a partir de (3.1), que

$$\mathcal{L}(x^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a, \varepsilon}} z^n X(z) dz, \quad (3.34)$$

y, puesto que las integrales sobre los segmentos verticales de $\Gamma_{a, \varepsilon}$ se anulan cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (debido a la continuidad de $X(z)$ sobre estos segmentos), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^a \text{Im}(X(t-i\varepsilon)(t-i\varepsilon)^n) dt \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) t^n dt \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{-a}^a \text{Re } X(t-i\varepsilon) q_n(t, \varepsilon) dt \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) p_n(t-i\varepsilon) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pero como resultado de (3.32),

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-a}^a \text{Re } X(t-i\varepsilon) q_n(t, \varepsilon) dt \right| \\ &\leq C \int_{-M}^M \left\{ \int_{-a}^a \frac{|t-s|}{(t-s)^2 + \varepsilon^2} dt \right\} d\mu(s) \\ &\leq \frac{C}{2} \int_{-M}^M \log \left[\left((a-s)^2 + \varepsilon^2 \right) \left((a+s)^2 + \varepsilon^2 \right) \right] d\mu(s) \\ &\quad - 2C\mu([-M, M]) \log \varepsilon \\ &\leq C' \log \int_{-M}^M |(a^2 - s^2)| d\mu(s) - 2C \log \varepsilon \end{aligned} \quad (3.36)$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $C' > C$, pues $\log \left[\left((a-s)^2 + \varepsilon^2 \right) \left((a+s)^2 + \varepsilon^2 \right) \right]$ tiende a $2 \log(a^2 - s^2)$ uniformemente en $[-M, M]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. También,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) p_n(t, \varepsilon) dt \right| \\ &\leq C \int_{-M}^M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \right\} d\mu(s) \leq C\pi. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Entonces, $\mathcal{L}(x^n)$ es como se desea. \square

Nota 3.10. Obsérvese ahora que si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[-a, a]$, $\{p_n(x)\}$ es una sucesión de polinomios uniformemente convergente a φ en $[-a, a]$, $L = \pi \int \varphi d\mu$ y $\| \cdot \|$ denota la norma de la convergencia uniforme en $[-a, a]$, (3.33) implica que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{-a}^a \text{Im } X(t-i\varepsilon) \varphi(t) dt - L \right| \leq 2\pi \|\varphi - p_n\| \quad (3.38)$$

para todo $n \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{-a}^a \text{Im}(X(t-i\varepsilon)) \varphi(t) dt - L \right| = 0. \quad (3.39)$$

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \operatorname{Im} X(t - i\varepsilon) \varphi(t) dt = \int \varphi d\mu. \quad (3.40)$$

La fórmula (3.40) se conoce como la *Fórmula de Inversión de Stieltjes* (véase Askey & Ismail [6]; Chihara [19], Chap. III). Según tal fórmula, la medida μ está dada para las funciones continuas sobre \mathbb{R} por el lado izquierdo de la identidad (3.40). De hecho, la identidad será válida para cualquier función μ integrable.

Nota 3.11. Puesto que (3.33) y (3.40) son válidas en tanto $a > M$, es usual escribir tales fórmulas con $-\infty, \infty$ en lugar de $-a, a$. En nuestra opinión, esto puede ser causa de confusión. Al implicar un intercambio de límite e integral, las fórmulas (3.33) y (3.40) son difíciles de aplicar. Sin embargo, en la práctica es usual calcular la función

$$\omega(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} X(t - i\varepsilon) \quad (3.41)$$

en los puntos donde exista y sea finita (obsérvese que $\omega(t) = 0$ para $t \notin [-M, M]$). Si esto ocurre excepto tal vez en un número finito o enumerable de puntos ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, y la función $\omega(t)$ resultante es no negativa e integrable en \mathbb{R} , es razonable suponer que $\omega(t) dt$ es la parte absolutamente continua de la medida y luego investigar si los puntos ξ_j son puntos de masa de la misma. Esto último se hace generalmente recurriendo al Teorema 3.5 siguiente. Sin embargo, dar al procedimiento una base sólida es en general difícil, salvo en circunstancias muy especiales (como las que consideramos en la Sección 4).

Teorema 3.5. Sean $\{P_n(x)\}$ un SMOP positivo y acotado por M , μ la medida espectral de $\{P_n(x)\}$. Sean $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ el espacio de las funciones complejas Lebesgue medibles y de cuadrado integrable dotado de la norma $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)} = \sqrt{\int |f|^2 d\mu}$. y

$$L : L_2(\mathbb{R}, d\mu) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\mu)$$

el operador definido por

$$L(f)(t) = tf(t), t \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Entonces $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ y L es un operador autoadjunto acotado. Las afirmaciones siguientes son además equivalentes para $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. λ es un valor propio de L .
2. La medida μ porta una masa en $x = \lambda$, así que

$$\mu(\{\lambda\}) \neq 0. \quad (3.43)$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n < \infty, \text{ donde } \lambda_n = L(P_n^2(x)), n \geq 0. \text{ Además,}$$

$$\mu(\{\lambda\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n} \quad (3.44)$$

Demostración. Que $L : L_2(\mathbb{R}, d\mu) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ definido por (3.42) es acotado, es claro, pues siendo $\{P_n(x)\}$ acotado por M entonces $\operatorname{Supp} \mu \subseteq [-M, M]$, así que

$$\|Lf\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 = \|xf(x)\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 \leq M^2 \|f\|_{L_2(\mathbb{R}, d\mu)}^2 \quad (3.45)$$

para toda $f \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Como además

$$\int L(f) \bar{g} d\mu = \int f \overline{(Lg)} d\mu, f, g \in L_2(\mathbb{R}, d\mu), \quad (3.46)$$

L es un operador simétrico acotado y, por lo tanto, autoadjunto. Como es evidente, $\{P_n(x)\} \subseteq L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, y de la densidad uniforme (Teorema de Aproximación de Weierstrass) de los polinomios en $C([-M, M])$, el espacio de las funciones continuas en $[-M, M]$, se deduce, por medio de argumentos completamente estandar (véase Rainville, [25], p.155) que el sistema $\{P_n(x) / \sqrt{\lambda_n}\}$ es una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Se deduce así que $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ (en la mencionada demostración de Rainville, $\omega(x) dx$ debe sustituirse por $d\mu(x)$).

Demostraremos ahora que (1) \implies (2). Sea φ una función propia de L para λ . Puesto que $(\lambda - x)\varphi(x) = 0$ para todo $x \neq \lambda$, si $\mu(\{\lambda\}) = 0$ entonces $\varphi = 0$ en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, lo cual es absurdo. Para demostrar que (2) \implies (3), sea φ la función característica de $\{\lambda\}$. Entonces $\varphi \in L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ y $\varphi \neq 0$. Por otra parte

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda_n} \int \varphi(t) P_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\lambda_n} P_n(\lambda) \mu(\{\lambda\}), n \geq 0. \quad (3.47)$$

Esto resulta del hecho de que $\{P_n(x)\}$ es una base ortogonal de $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$. Entonces

$$1 = \varphi(\lambda) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n \right\} \mu(\{\lambda\}), \quad (3.48)$$

de tal manera que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda) / \lambda_n < +\infty$. Para demostrar que (3) \implies (1), obsérvese que (3) asegura que

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} P_n(\lambda) P_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, está en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$,

y que $\varphi \neq 0$, pues $P_0(\lambda) = P_0(x) = \lambda_0 = 1$. Puesto que $x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$, como se deduce de la relación de recurrencia de $\{P_n(x)\}$, entonces $x\varphi(x)$ está en $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, y λ es un valor propio de L . Como la relación (3.44) es consecuencia de la (3.48), el teorema queda demostrado.

Nota 3.10. Para circunstancias más generales de autoadjunción del operador L en el caso no acotado, el lector podrá consultar [Charris & Mora [16], Apéndices [C] y [D]].

4. Un teorema útil

La fórmula (3.33) suministra la motivación para los intentos de representar los funcionales de momentos de *SMOPS* positivos y acotados en términos de medidas derivadas a partir de la fracción continua del *SMOP* y, por lo tanto, en términos, más o menos directos, a partir de los coeficientes de la relación de recurrencia. La única nota discordante radica en que (3.33) no es una verdadera representación integral hasta que no se intercambien límite e integral, lo cual puede ser difícil de justificar, además de que sólo da la parte singular de la medida mediante un proceso adicional (basado en el Teorema 3.5), también difícil de implementar (véase Sec. 5, Ejemplo 5.1).

En lo que sigue estableceremos un resultado simple (el Teorema 4.1, siguiente) que en cierta forma justifica el proceso de intercambio de límite e integral en circunstancias especiales, las cuales parecen darse, sin embargo, de manera natural en ciertos contextos, y con mayor frecuencia de lo que sería normal esperar. El teorema aparece por primera vez en Aldana *et al.* [2] y parece ser, por otra parte, de fácil aplicación práctica, aún en la determinación de la parte singular de la medida, al menos si se dispone de los conocimientos básicos de la teoría de las funciones especiales que permitan efectuar cómodamente los cálculos en situaciones concretas. Como prototipos de la aplicabilidad de tal teorema están varios de los ejemplos en [2] y [16].

Consideraremos en la Sección 5 siguiente dos ejemplos mucho más sencillos que aquellos en [2] y [16] y cuyo propósito es ante todo poner en claro la esencia del método que el Teorema 4.1 propone, y el cual compararemos (con aparente ventaja para éste) con la manera de obtener los mismos resultados por aplicación directa del Corolario 3.3 y del Teorema 3.5. Luego, en las Secciones

6 y 7, nos ocuparemos de aplicaciones más delicadas de tal Teorema.

Sólo ofrecemos en estas notas una versión sencilla del Teorema 4.1, quizá la más sencilla posible. Esta es, sin embargo, aparentemente susceptible de mejoras considerables en diversas circunstancias (véase, por ejemplo, Charris & Mora [16]).

Teorema 4.1. Sean $\{P_n(x)\}$ un *SMOP* positivo y acotado por M , $X(z)$, $z \notin [-M, M]$, su fracción continua. Supóngase que:

1. El límite $\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} X(z)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, excepto posiblemente para x en un subconjunto finito S de \mathbb{R} .
2. La función

$$\tilde{X}(z) = \begin{cases} X(z), & \text{Im } z < 0, \\ \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} X(\zeta), & z \in \mathbb{R}, z \notin S, \end{cases} \quad (4.1)$$

es continua sobre el conjunto $\{z \mid \text{Im } z \geq 0\} \setminus S$.

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el límite $\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} (z-x)X(z)$ existe (en particular, existe para todo $x \in S$) y la función

$$X_x(z) = \begin{cases} \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} (\zeta - z)X(\zeta), & z = x, \\ (z-x)X(z), & z \neq x, \end{cases} \quad (4.2)$$

es continua en $(\mathbb{R} \setminus S) \cup \{x\}$. Sean

$$\omega(t) = \frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{X}(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus S, \quad (4.3)$$

y

$$\Lambda_\xi = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi}} \text{Re} \left\{ (z - \xi) \tilde{X}(z) \right\}, \quad \xi \in S \quad (4.4)$$

entonces $\omega(t)$ es integrable sobre \mathbb{R} ,

$$\mathcal{L}(P(t)) = \sum_{\xi \in S} \Lambda_\xi P(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \omega(t) dt, \quad (4.5)$$

$$P(x) \in \mathbb{C}[x],$$

y si μ es la medida espectral de $\{P_n(x)\}$, entonces

$$\Lambda_\xi = \mu(\{\xi\}), \quad \xi \in S. \quad (4.6)$$

Demostración. Supóngase, como es posible hacerlo, que M es lo suficientemente grande como para que $-M, M$ sean puntos de continuidad de $X(z)$, que $S = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, donde $\xi_1 < \dots < \xi_m$, y que $s > 0$

es tal que si $a_k = \xi_k - s$, $b_k = \xi_k + s$ entonces $-M < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < M$.

Sean $\delta > 0$ y $\Gamma^{s,\delta}$ el contorno positivamente orientado que se muestra en la Figura 4.1

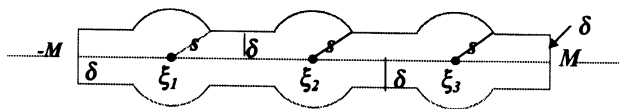


Figura 4.1

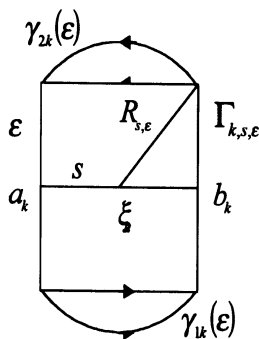


Figura 4.2

En la figura 4.1 hemos tomado $m = 3$. Obsérvese en primer lugar que si $I = [a, b]$ es un subintervalo de $[-M, M]$ en la cual $\tilde{X}(z)$ es continua, $\tilde{X}(z)$ es también continua en $I \times [-1, 0]$, y por lo tanto, uniformemente continua en este conjunto. Se deduce que $\text{Im } \tilde{X}(t - i\delta)$ tiende uniformemente a $\pi\omega(t)$ en I cuando $\delta \rightarrow 0$ y, por lo tanto, teniendo en cuenta que las integrales sobre los segmentos verticales $[a - i\delta, a + i\delta]$, $[b - i\delta, b + i\delta]$ se anulan cuando $\delta \rightarrow 0$ (debido a la continuidad de $\text{Im } \tilde{X}(t - i\delta)$ sobre estos segmentos cuando $t = a$ y $t = b$), se demuestra, tal como en el Corolario

3.3, que

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_a^b X(t - i\delta) P(t - i\delta) dt - \int_a^b X(t + i\delta) P(t + i\delta) dt \right\} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{Im } \tilde{X}(t - i\delta) P(t) dt \\ &= \int_a^b \omega(t) P(t) dt, \quad P(x) \in \mathbb{C}[x]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Supóngase ahora que $\xi = \xi_k$ para algún $k = 1, 2, \dots, n$. Si γ_k es el círculo positivamente orientado de centro en ξ_k y radio s entonces

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz \\ &= 2i \int_{-\pi}^0 \text{Re} \left(se^{i\theta} \tilde{X}(\xi_k + se^{i\theta}) P(\xi_k + se^{i\theta}) \right) d\theta \end{aligned} \tag{4.8}$$

y, de (4.4) y la continuidad de $X_{\xi_k}(z)$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz = \Lambda_{\xi_k} P(\xi_k) \tag{4.9}$$

Sustitúyase ahora la integral $\int_{\gamma_k} X(z) P(z) dz$ sobre el círculo de centro ξ_k y radio s por la integral sobre el borde positivamente orientado del rectángulo $\Gamma_{k,s,\epsilon}$ en la Figura 4.2, donde $\epsilon > 0$. Se tiene nuevamente, como en la demostración del Corolario 3.3,

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,s,\epsilon}} X(z) P(z) dz \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{a_k}^{b_k} X(t - i\epsilon) P(t - i\epsilon) dt - \int_{a_k}^{b_k} X(t + i\epsilon) P(t + i\epsilon) dt \right\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $a_k = \xi_k - s$, $b_k = \xi_k + s$. Sean $\gamma_{1k}(\epsilon)$ y $\gamma_{2k}(\epsilon)$ los arcos de círculo de centro ξ_k y radio $R_{\epsilon,s} = \sqrt{\epsilon^2 + s^2}$

en la Figura 4.2. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} X(t - i\epsilon) P(t - i\epsilon) dt &= \int_{\gamma_{1k}} (\epsilon) X(z) P(z) dz \\ \int_{a_k}^{b_k} X(t + i\epsilon) P(t + i\epsilon) dt &= \int_{\gamma_{2k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} &\lim_{s, \epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k, s, \epsilon}} X(z) P(z) dz \\ &\lim_{s, \epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\gamma_{1k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz + \int_{\gamma_{2k}(\epsilon)} X(z) P(z) dz \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{Re} \left(se^{i\theta} \tilde{X}(\xi_k + se^{i\theta}) P(\xi_k + se^{i\theta}) \right) d\theta \\ &= \Lambda_{\xi_k} P(\xi_k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

y de (4.10) se obtiene, tal como en el Corolario 3.3, que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k, s, \epsilon}} X(z) P(z) dz \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{Im} X(t - i\epsilon) P(t) dt \\ &= \int \lambda_k(t) P(t) d\mu(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde λ_k es la función característica de $[a_k, b_k]$, y el límite cuando $s \rightarrow 0$ del lado derecho es $\mu(\{\xi_k\}) P(\xi_k)$, lo cual muestra que $\Lambda_{\xi_k} = \mu(\{\xi_k\}) P(\xi_k)$ para todo $\xi \in S$. Por otra parte, de (3.32) se deduce que $\omega(t) \geq 0$ para $t \in \mathbb{R} \setminus S$. Sean λ_s la función característica de $[-M, M] \setminus \cup_{k=1}^m [a_k, b_k]$, $s > 0$. El anterior argumento muestra que

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}(1) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{s, \delta}} X(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^m \mu([a_k, b_k]) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_s(t) dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\omega_s = \omega \lambda_s$, la cual es obviamente integrable en \mathbb{R} . Entonces

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{L}(1) &= \lim_{s, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{s, \delta}} X(z) dz \\ &= \sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

y, por lo tanto ω , siendo límite monótono de las ω_s cuando $s \rightarrow 0$ (monótonamente), es también integrable en \mathbb{R} (recuérdese que $\omega(t) = 0$ para $|t| > M$). Teniendo en cuenta que ω es integrable, la validez de (4.5) para $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ arbitrario se verifica fácilmente. Esto demuestra el teorema. \square

Nota 4.1. Se deduce que $\omega(t)$ es la parte absolutamente continua de la medida espectral μ de $\{P_n(x)\}$ y que su parte singular se reduce a la medida de saltos $\sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} \delta_{\xi}$, donde δ_{ξ} es la medida de Dirac en ξ . En otros términos

$$d\mu(t) = \sum_{\xi \in S} \Lambda_{\xi} \delta(t - \xi) + \omega(t) dt \quad (4.16)$$

donde $\delta = \delta_0$ es la medida de Dirac en $\xi = 0$.

Nota 4.2. La versión que hemos dado del Teorema 4.1 es quizá, como lo hemos mencionado, la más sencilla posible. En realidad puede establecerse (bajo hipótesis adicionales apropiadas) que (4.5) es aún válido si S es infinito, siempre y cuando tenga sólo finitos puntos de acumulación, un resultado que puede ser necesario para manejar sistemas relacionados con polinomios del tipo de Pollaczek (véase Bank & Ismail [7], Charris & Ismail [11], [12], Charris & Mora [16]), u otros sistemas con espectro puntual infinito (infinitos puntos de masa).

5. Dos ejemplos simples

Comenzaremos por dar dos ejemplos muy simples que ilustran la aplicabilidad del Teorema 4.1. Recurriremos a algunos resultados relacionados con los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clases. En Charris & Preciado [17] se da un tratamiento completo de estos últimos sistemas de polinomios según los resultados de la Sección 4 del presente documento. Creemos que esto es ilustrativo de la técnica propuesta en tal sección. El primer ejemplo que daremos ha sido tomado también de [17], pero consideraremos con respecto a él algunos aspectos que no se presentan en [17]. Posteriormente consideraremos ejemplos menos triviales.

El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de segunda clase* $(\tilde{U}_n(x))$ es el *SMOP* determinado por la relación de recurrencia

$$x\tilde{U}_n(x) = \tilde{U}_{n+1}(x) + \frac{1}{4}\tilde{U}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.1)$$

y las condiciones iniciales

$$\tilde{U}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{U}_0(x) = 1. \quad (5.2)$$

En este caso $B_n = 0$ y $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 0$. Claramente $(\tilde{U}_n(x))$ está acotado por $M = 3$, pues

$$0 \leq |B_n| \leq \frac{3}{3} \text{ y } |C_{n+1}| = \frac{1}{4} \leq 1 = \frac{3}{3}. \quad (5.3)$$

La fracción continua del sistema $(\tilde{U}_n(x))$ es obviamente

$$X(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{4} \frac{1}{x - \frac{1}{4} \dots}}. \quad (5.4)$$

Por lo tanto,

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}X(z)}, \quad |z| \geq 3, \quad (5.5)$$

o, lo que es equivalente,

$$X^2(z) - 4zX(z) + 4 = 0, \quad |z| \geq 3. \quad (5.6)$$

Consideraciones descritas en detalle en [17] permiten establecer que

$$X(z) = 2 \left(z - (z^2 - 1)^{1/2} \right), \quad (5.7)$$

$$(z^2 - 1)^{1/2} = ze^{\frac{1}{2} \text{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

donde *Log* es la rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con parte imaginaria (argumento) en $(-\pi, \pi]$, la cual es analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (la rama principal).

La medida espectral μ de $(\tilde{U}_n(x))$, que es *absolutamente continua*, está dada por

$$d\mu(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

siendo χ la función característica de $(-1, 1)$.

Que μ dada por (5.8) es la medida espectral del sistema $(\tilde{U}_n(x))$ es bien conocido y puede establecerse de muchas maneras, incluyendo argumentos trigonométricos completamente elementales. Para muchos propósitos es más conveniente considerar como el sistema de Chebyshev de segunda clase, el dado por

$U_n(x) = 2^n \tilde{U}_n(x)$, $n \geq 0$, el cual queda determinado por la relación de recurrencia

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.9)$$

y las condiciones iniciales

$$U_{-1}(x) = 0, \quad U_0(x) = 1. \quad (5.10)$$

El sistema $(U_n(x))$ no es mónico, pero es aún un sistema ortogonal de polinomios para μ dada por (5.8).

El sistema de los *polinomios mónicos de Chebyshev de primera clase* $(\tilde{T}_n(x))$ es el *SMOP* positivo cuya relación de recurrencia es

$$x\tilde{T}_n(x) = \tilde{T}_{n+1}(x) + C_n \tilde{T}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.11)$$

con las condiciones iniciales

$$\tilde{T}_{-1}(x) = 0, \quad \tilde{T}_0(x) = 1. \quad (5.12)$$

En este caso $B_n = 0$, C_0 es arbitrario, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$. Claramente podemos tomar $M = 3$, pues $0 = |B_n| \leq 1$ y $C_{n+1} \leq 1$, $n \geq 0$. La fracción continua del sistema $(\tilde{T}_n(x))$ es

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{4} \dots}}, \quad z \notin [-3, 3]. \quad (5.13)$$

Por lo tanto

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}X(z)} = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}}, \quad z \notin [-3, 3], \quad (5.14)$$

siendo $X(z) = 2 \left(z - (z^2 - 1)^{1/2} \right)$ la fracción continua de $(\tilde{U}_n(x))$. En este caso $(z^2 - 1)^{1/2}$ es como en (5.7).

La medida espectral μ de $\{\tilde{T}_n(x)\}$ es

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - t^2}} \chi(t) dt, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

como es también conocido (véase [17]) y es también una medida absolutamente continua. Más que el sistema $(\tilde{T}_n(x))$ se utiliza el $(T_n(x))$ dado por $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = 2^{n-1} \tilde{T}_n(x)$, $n \geq 2$, o, lo que es lo mismo por la relación de recurrencia

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.16)$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad (5.17)$$

el cual es un sistema ortogonal para μ dada por (5.15).

Los polinomios $\{\tilde{T}_n(x)\}$ juegan papeles fundamentales en la teoría de la aproximación. También, lo que es más cercano a nuestros objetivos, en la teoría de los polinomios cribados y en la de bloques de relaciones de recurrencia (véase [2], [11], [12], [16], [17], etc.). Para mayor información sobre los polinomios de Chebyshev, el lector podrá consultar [19] y el apéndice al final del artículo. Por el momento, es importante observar que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n^{(1)}(x) &= \tilde{U}_n^{(1)}(x) = \tilde{U}_n(x), \\ T_n^{(1)}(x) &= U_n^{(1)}(x) = U_n(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ejemplo 5.1. El siguiente ejemplo, ya mencionado antes muestra la manera de aplicar el Teorema 4.1. Este sistema, $(p_n(x))$, tomado, como lo hemos dicho de [17], está dado por

$$\begin{aligned} xp_{2n}(x) &= p_{2n+1}(x) + \frac{n+2}{4(n+1)}p_{2n-1}(x) \\ xp_{2n+1}(x) &= p_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n}(x), \quad (5.19) \\ n &\geq 0, \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}(x) = 0, p_0(x) = 1, \quad (5.20)$$

Evidentemente $(p_n(x))$ está acotado por $M = 3$, y se tiene que

$$\begin{aligned} x^2p_{2n+1}(x) &= xp_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}xp_{2n}(x) \\ &= p_{2n+3}(x) + \left(\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)}\right)p_{2n+1}(x) \\ &\quad + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

de lo cual

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)p_{2n+1}(x) = p_{2n+3}(x) + \frac{1}{16}p_{2n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Haciendo entonces

$$p_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^n}P_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.21)$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)P_n(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.22)$$

con $P_0(x) = x$, $P_1(x) = 2p_3(x) = 2x^3 - x$. Sea

$$w = w(x) = 2x^2 - 1. \quad (5.23)$$

De (5.22) se deduce entonces que

$$P_n(x) = x\tilde{U}_n(w), \quad n \geq 0, \quad (5.24)$$

(pues $P_0(x) = x$, $P_1(x) = xw$, de lo cual $x^{-1}P_n(x) = \tilde{U}_n(w)$, $n \geq 0$). Por otra parte, el sistema $(p_n^{(1)}(x))$ de los primeros asociados de $(p_n(x))$ satisface

$$\begin{aligned} xp_{2n}^{(1)}(x) &= p_{2n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{4(n+2)}p_{2n-1}^{(1)}(x) \\ xp_{2n+1}^{(1)}(x) &= p_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{n+3}{4(n+2)}p_{2n}^{(1)}(x), \quad (5.25) \\ n &\geq 0, \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales

$$p_{-1}^{(1)}(x) = 0, p_0^{(1)}(x) = 1. \quad (5.26)$$

Entonces

$$\begin{aligned} x^2p_{2n}^{(1)}(x) &= p_{2n+2}^{(1)}(x) + \left(\frac{n+3}{4(n+2)} + \frac{n+1}{4(n+2)}\right)p_{2n}^{(1)}(x) \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{4(n+2)}\frac{n+2}{4(n+1)}\right)p_{2n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

de lo cual, haciendo

$$p_{2n}^{(1)}(x) = \frac{1}{2^n}Q_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.27)$$

se obtiene que

$$(2x^2 - 1)Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (5.28)$$

Además

$$Q_0(x) = p_0^{(1)}(x) = 1, Q_1(x) = 2p_2^{(1)}(x) = 2x^2 - \frac{3}{4}.$$

Se deduce entonces, haciendo $w = w(x)$ como en (5.23), que $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = w + \frac{1}{4}$, de lo cual se concluye que

$$Q_n(x) = \tilde{U}_n(w) + \frac{1}{4}\tilde{U}_{n-1}(w). \quad (5.29)$$

Esto implica, de (5.21), (5.22), (5.28) y (5.29) que

$$\frac{p_{2n}^{(1)}(x)}{p_{2n+1}^{(1)}(x)} = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{\tilde{U}_{n-1}(w)}{\tilde{U}_n(w)} \right]. \quad (5.30)$$

Pero $\tilde{U}_n^{(1)}(w) = \tilde{U}_n(w)$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, si $X(z)$ denota la fracción continua de $(p_n(x))$, se tendrá que

$$X(z) = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{2} \left(w - (w^2 - 1)^{1/2} \right) \right], \quad z \notin [-1, 1], \quad (5.31)$$

con $w = 2z^2 - 1$. Esto resulta de (5.7) con w en el lugar de z . Nótese que $w \in [-1, 1]$ si y sólo si $z \in [-1, 1]$, lo cual implica que

$$X(z) = \frac{1}{2z} + z - (z^2 - 1)^{1/2}, \quad z \notin [-1, 1]. \quad (5.32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= \lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \text{Im } \zeta < 0}} X(\zeta) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2z} + z - (z^2 - 1)^{1/2} & , \text{Im } z < 0, \\ \frac{1}{2z} + z + i\sqrt{1 - z^2} & , z \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ \frac{1}{2z} + z + \sqrt{z^2 - 1} & , z \in \mathbb{R}, z < -1, \\ \frac{1}{2z} + z - \sqrt{z^2 - 1} & , z \in \mathbb{R}, z > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde, para $z > 0$, $\sqrt{z} = e^{1/2 \text{Log } z}$ (siendo, como antes, Log la rama principal de logaritmo) es la raíz cuadrada usual de un número positivo. Debe observarse, como es fácil hacerlo, que

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)^{1/2} &= \sqrt{z^2 - 1}, \quad z \geq 1; \\ (z^2 - 1)^{1/2} &= -\sqrt{z^2 - 1}, \quad z \leq -1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\text{Im } z > 0 \\ z \rightarrow x}} (z^2 - 1)^{1/2} &= i\sqrt{1 - x^2}; \\ \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow x}} (z^2 - 1)^{1/2} &= -i\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nótese que es natural haber escogido $S = \{-1, 0, 1\}$. Como obviamente

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \pm 1}} (z \mp 1) \tilde{X}(z) = 0, \quad (5.36)$$

mientras que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow 0}} z \tilde{X}(z) = \frac{1}{2} \quad (5.37)$$

y, por otra parte,

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.38)$$

donde χ es la función característica de $(-1, 0) \cup (0, 1)$, se deduce que el funcional de momentos \mathcal{L} de $(p_n(x))$ es

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \sqrt{1 - t^2} dt + \frac{1}{2} P(0), \quad (5.39)$$

o sea, que la medida espectral está dada por

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt + \frac{1}{2} \delta(t) dt \quad (5.40)$$

donde $\delta(t)$ es la medida de Dirac en $\xi = 0$. Nótese que $\text{Supp } \mu = [-1, 1]$. Obsérvese entonces que $\xi = 0$ es un punto de masa interior al soporte de la medida μ (un valor propio de μ sumergido en el espectro continuo $[-1, 0) \cup (0, 1]$).

Nota 5.1. Como lo hemos mencionado en la Sección 3, algunos problemas espectrales pueden manejarse razonablemente mediante la fórmula de inversión de Stieltjes (Fórmula 3.33) y el Teorema 3.5. Por ejemplo, para el caso del Ejemplo 5.1 es fácil establecer la validez de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Im } X(t - i\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.41)$$

siendo $\chi(t)$ la función característica de $(-1, 0) \cup (0, 1)$, con dudas acerca de lo que pueda suceder sobre el conjunto $S = \{-1, 0, 1\}$. Si el comportamiento sobre S es determinable (via el Teorema 3.5, por ejemplo), es razonable suponer que la parte absolutamente continua de la medida espectral $d\mu$ es $\frac{1}{\pi} \sqrt{1 - t^2} \chi(t) dt$ y que la parte de saltos de $d\mu$ está soportada por S .

Ahora, de (5.19) se deduce fácilmente que

$$p_{2n}(0) = \frac{(-1)^n n!}{(2)_n 4^n}, \quad p_{2n+1}(0) = 0. \quad (5.42)$$

Aquí $(a)_n$, definido para $a \in \mathbb{C}$ por

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a, & n = 1 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1), & n > 1, \end{cases} \quad (5.43)$$

es el denominado símbolo de Pochhammer (véase Rainville [25], Chap. 4). Obsérvese que $(1)_n = n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$. De (5.19) y (1.8) se deduce también que

$$\frac{p_{2n}^2(0)}{\lambda_{2n}} = \frac{n!}{(3)_n}, \quad n \geq 0, \quad (5.44)$$

de lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2(0)}{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(3)_n} = F \left(\begin{matrix} 1, & 1 \\ & 3 \end{matrix} \middle| 1 \right) \quad (5.45)$$

donde

$$F \left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z \right)$$

denota la función hipergeométrica (Rainville [25], Chap. 4). Según la *fórmula de Gauss* (Rainville [25], Chap. 4, Theorem 18.) se tiene entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2(0)}{\lambda_n} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(2)} = 2, \quad (5.46)$$

donde $\Gamma(z)$ denota la función gamma. Por lo tanto

$$\mu(\{0\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2(0)}{\lambda_n}} = \frac{1}{2}, \quad (5.47)$$

como lo establecimos en (5.37). Por otra parte, es fácil verificar directamente, a partir de (5.19), que

$$\frac{p_{2n}^{(1)}(\pm 1)}{\sqrt{\lambda_n}} = 2\sqrt{\frac{(3)_n}{n!}} - 2n\sqrt{\frac{n!}{(3)_n}}. \quad (5.48)$$

En el análisis de la convergencia de series relacionadas con sistemas ortogonales, la fórmula asintótica (Askey & Ismail [6])

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \sim n^{a-b}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.49)$$

es decir, la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{b-a} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} = 1, \quad (5.50)$$

es frecuentemente útil. Una consecuencia de la fórmula de Stirling ([25], Chap. 2), (5.50) puede establecerse también por métodos mucho más elementales. Nótese que, como

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (5.51)$$

siempre y cuando $a \neq 0, -1, -2, \dots$, se tendrá también que

$$\frac{(a)_n}{(b)_n} \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} n^{a-b}, \quad a, b \neq 0. \quad (5.52)$$

Por lo tanto, (5.48) implica que

$$\frac{(p_{2n}^{(1)}(\pm 1))^2}{\lambda_n} \sim 2n^2, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.53)$$

lo cual asegura la divergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_{2n}^{(1)}(\pm 1))^2}{\lambda_n}, \quad (5.54)$$

así que $\mu(\{-1\}) = \mu(\{1\}) = 0$, como lo habíamos establecido en (5.36). Así se recupera, de otra manera, la fórmula (5.40).

Ejemplo 5.2. En este ejemplo denotaremos con $(q_n(x))$ el *SMOP* determinado por la relación de recurrencia

$$xq_{2n}(x) = q_{2n+1}(x) + \frac{n+1}{2(2n+1)}q_{2n-1}(x) \quad (5.55)$$

$$xq_{2n+1}(x) = q_{2n+2}(x) + \frac{n+1}{2(2n+3)}q_{2n}(x), \quad n \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$q_{-1}(x) = 0, \quad q_0(x) = 1. \quad (5.56)$$

Tal como en el Ejemplo 5.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} x^2q_{2n+1}(x) &= xq_{2n+3}(x) + \left(\frac{n+2}{2(2n+3)} + \frac{n+1}{2(2n+3)} \right) q_{2n+1}(x) \\ &\quad + \frac{(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)}q_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

de lo cual

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) q_{2n+1}(x) &= \\ q_{2n+3}(x) + \frac{1}{4} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} q_{2n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

y haciendo entonces

$$q_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n}Q_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.59)$$

se llega a que

$$\begin{aligned} (2x^2 - 1)Q_n(x) &= \\ = Q_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.60)$$

con $Q_0(x) = q_1(x) = x$, $Q_1(x) = 2q_3(x) = 2x^3 - x$. Sea $w = w(x)$ como en (5.23). El *SMOP* $(L_n(x))$ dado por

$$xL_n(x) = L_{n+1}(x) + \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}L_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (5.61)$$

y las condiciones iniciales

$$L_{-1}(x) = 0, \quad L_0(x) = 1, \quad (5.62)$$

es clásico. Se conoce como el *sistema mónico de los polinomios de Legendre* (véase Rainville [25], Chap. 10. También G. Szegö [29]) y de (5.60) se deduce que

$$Q_n(x) = xL_n^{(1)}(w), \quad n \geq 0, \quad (5.63)$$

donde $(L_n^{(1)}(x))$ es el sistema de los primeros asociados de $(L_n(x))$. La relación (5.63) se obtiene en efecto de observar que $Q_0(x) = x$ y $Q_1(x) = xw = xL_1^{(1)}(w)$, y de lo establecido sobre correcurividad en la Sección 2. Por otra parte, el sistema $(q_n^{(1)}(x))$ de los primeros asociados de $(q_n(x))$ satisface

$$xq_{2n}^{(1)}(x) = q_{2n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+1}{2(2n+3)}q_{2n-1}^{(1)}(x) \quad (5.64)$$

$$xq_{2n+1}^{(1)}(x) = q_{2n+2}^{(1)}(x) + \frac{n+2}{2(2n+3)}q_{2n}^{(1)}(x), \quad n \geq 0,$$

y las condiciones iniciales

$$q_{-1}^{(1)}(x) = 0, \quad q_0^{(1)}(x) = 1. \quad (5.65)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & x^2q_{2n}^{(1)}(x) \\ &= q_{2n+2}^{(1)}(x) + \left(\frac{n+1}{2(2n+3)} + \frac{n+2}{2(2n+3)} \right) q_{2n}^{(1)}(x) \\ & \quad + \frac{n+1}{2(2n+3)} \frac{n+1}{2(2n+1)} q_{2n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

y haciendo

$$q_{2n}^{(1)}(x) = \frac{1}{2^n} R_n(x), \quad n \geq 0, \quad (5.66)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 1) R_n(x) \\ &= R_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} R_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.67)$$

que es la misma relación (5.60). Sin embargo, ahora $R_0(x) = q_0^{(1)}(x) = 1$, $R_1(x) = 2q_2^{(1)}(x) = 2x^2 - \frac{2}{3} = w + \frac{1}{3}$, con $w = 2x^2 - 1$ como en (5.23), así que

$$R_n(x) = L_n^{(1)}(w) + \frac{1}{3} L_{n-1}^{(2)}(w), \quad (5.68)$$

lo cual implica, de (5.59), (5.63), (5.56) y (5.68) que la FC de $(q_n(x))$ está dada por los n convergentes

$$X_{2n}(x) = \frac{q_{2n}^{(1)}(x)}{q_{2n+1}^{(1)}(x)} = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{L_{n-1}^{(2)}(w)}{L_n^{(1)}(w)} \right], \quad (5.69)$$

estando así relacionada con la fracción continua $L^{(1)}(w)$, $w = 2x^2 - 1$, de los primeros asociados de los polinomios de Legendre. Nos queda por determinar esta última.

Ahora, el sistema $\{L_n(x)\}$ de los polinomios de Legendre es ortogonal (Rainville [25], Chap. 10) con respecto a la medida espectral

$$d\mu(t) = \frac{1}{2} \chi(t) dt \quad (5.70)$$

donde $\chi(t)$ es la función característica del conjunto $(-1, 1)$. Del Teorema de Markov (Teorema 3.3) se deduce entonces que la fracción continua $L(z)$ de $\{L_n(x)\}$ es

$$L(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{z-t} = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{z-1}{z+1} \right), \quad z \notin [-1, 1], \quad (5.71)$$

donde Log es la rama principal del logaritmo (argumento en $(-\pi, \pi]$), así que $L(z)$ es analítica fuera de $[-1, 1]$. Por otra parte, de la relación de recurrencia de $\{L_n^{(1)}(x)\}$ se deduce que su fracción continua $L^{(1)}(z)$ está relacionada con la $L(z)$ por

$$L(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{3}L^{(1)}(z)}, \quad (5.72)$$

así que

$$L^{(1)}(z) = 3 \left(z - \frac{1}{L(z)} \right), \quad (5.73)$$

y de (5.69) se deduce entonces que

$$X(z) = \frac{1}{z} \left[1 - w + \frac{1}{L(w)} \right] \quad (5.74)$$

donde $w = 2z^2 - 1$ es como en (5.23). La relación (5.74) se simplifica en

$$X(z) = \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\text{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right], \quad z \notin [-1, 1],$$

que es analítica fuera de $[-1, 1]$ (y no sólo fuera de un intervalo $[-M, M]$ alrededor de $[-1, 1]$). Por lo tanto, si

$$\tilde{X}(z) = \lim_{\substack{\text{Im } \zeta < 0 \\ \zeta \rightarrow z}} X(\zeta), \quad (5.75)$$

entonces

$$\tilde{X}(z) = \begin{cases} \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\operatorname{Log} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right], & \operatorname{Im} z < 0, \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) + i\pi} \right], & z \in (-1, 0), \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) - i\pi} \right], & z \in (0, 1), \\ \frac{2}{z} \left[1 - z^2 + \frac{1}{\log \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)} \right], & |z| > 1, z \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.76)$$

En este caso $S = \{-1, 0, 1\}$, y observamos que

$$\lim_{\substack{\operatorname{Im} z < 0 \\ z \rightarrow \pm 1}} (z \mp 1) \tilde{X}(z) = \lim_{\substack{\operatorname{Im} z < 0 \\ z \rightarrow 0}} z \tilde{X}(z) = 0, \quad (5.77)$$

lo cual da origen a la medida espectral absolutamente continua

$$d\mu(t) = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Im} \tilde{X}(z) = \frac{2\chi(t) dt}{|t| \left[\operatorname{Log}^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) + \pi^2 \right]} \quad (5.78)$$

donde $\chi(t)$ es la función característica del conjunto $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Para ejemplos menos triviales de la aplicación del Teorema 4.1, véanse Aldana, Charris & Mora [2], así como Charris & Mora [16]. De hecho, estos artículos consideran en detalle las aplicaciones de dicho teorema a los sistemas cribados [4], [5], [11], [12], a los definidos por aplicaciones polinómicas (Geronimo y Van Assche [20]) y, aún, a la teoría general de los sistemas definidos por bloques de relaciones de recurrencia ([2], [16]).

En las siguientes secciones revisaremos la teoría de bloques de relaciones de recurrencia y aplicaremos el Teorema 4.1 para la determinación de las medidas espectrales de sistemas que son primeros asociados de sistemas definidos por bloques. Como esto no requiere adaptaciones especiales del método, creemos que esto se puede interpretar como una garantía de su versatilidad.

6. Bloques de relaciones de recurrencia

Si $k \geq 2$ es un entero, las relaciones de recurrencia dadas para cada $n \geq 0$ en la forma de bloques de k ecuaciones cada uno,

$$(x - b_n^{(j)}) p_{nk+j}(x) = p_{nk+j+1}(x) + a_n^{(j)} p_{nk+j-1}(x), \quad (6.1)$$

donde $0 \leq j \leq k-1$, surgen en diversos contextos, algunos de sumo interés (véanse [2], [16]).

La aplicabilidad del Teorema 4.1 a sistemas definidos por tal tipo de relaciones, que incluyen una gran variedad de clases distintas de polinomios ortogonales, ha demostrado ser especialmente efectiva. Por esta razón incluimos en esta sección, en forma más o menos esquemática, una descripción de tal teoría de bloques. Descripciones más detalladas del mismo material pueden encontrarse en [2], [11], [12], [16] y [17].

El sistema (6.1) puede escribirse matricialmente en la forma

$$A_n \begin{bmatrix} p_{nk+1}(x) \\ p_{nk+2}(x) \\ p_{nk+3}(x) \\ \vdots \\ p_{nk+k-1}(x) \\ p_{nk-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - b_n^{(0)}) p_{nk}(x) \\ a_n^{(1)} p_{nk}(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_{nk+k}(x) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

donde $A_n = [a_{n,i,j}]$ es la matriz $k \times k$ dada por

$$a_{n,1,j} = \delta_{1,j} + a_n^{(0)} \delta_{1,j-k+1}, \\ a_{n,k,j} = -a_n^{(k-1)} \delta_{i,j+2} + (x - b_n^{(k-1)}) \delta_{k,j+1}, \\ 1 \leq j \leq k$$

y por

$$a_{n,i,j} = -a_n^{(i-1)} \delta_{i,j+2} + (x - b_n^{(i-1)}) \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}, \\ 1 \leq j \leq k$$

para $i = 2, 3, \dots, k-1$.

Si definimos

$$\Delta_n(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i - 2 \\ 1 & \text{si } j = i - 2 \\ \left| \begin{array}{cccccc} x - b_n^{(i-1)} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_n^{(i)} & x - b_n^{(i)} & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n^{(j)} & x - b_n^{(j)} \end{array} \right| & \text{si } j \geq i - 1 \end{cases} \quad (6.3)$$

la regla de Cramer permite resolver (6.2) para $p_{nk+j}(x)$, $1 \leq j \leq k$, en términos de $p_{nk}(x)$ y $p_{nk+k}(x)$. Puesto que $p_{nk-1}(x) = p_{(n-1)k+k-1}(x)$, se obtienen dos representaciones de $p_{nk-1}(x)$ de manera natural. Elimínandolas por igualación, haciendo $P_n(x) := p_{nk}(x)$ y suponiendo que

$$\Delta_n(2, k-1) = \Delta_0(2, k-1), \quad n \geq 0, \quad (6.4)$$

es decir, que $\Delta_n(2, k-1)$ es independiente de n , una hipótesis que será básica en todo lo que sigue, se obtiene la relación de recurrencia:

$$\left((x - b_n^{(0)}) \Delta_n(2, k-1) - a_n^{(1)} \Delta_n(3, k-1) - a_n^{(0)} \Delta_{n-1}(2, k-2) \right) P_n(x) = P_{n+1}(x) + a_n^{(0)} a_{n-1}^{(1)} \cdots a_{n-1}^{(k-1)} P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (6.5)$$

donde $P_{-1}(x) = \Delta_{-1}(2, k-2) = 0$. La deducción completa de esta última relación puede encontrarse en [11] y [12]. Los polinomios $P_n(x)$ se denominan los *polinomios de encadenamiento de los bloques* (6.2).

Para $l \geq 0$ un entero, los polinomios l -asociados $\{P_n^{(l)}(x)\}$ de $\{P_n(x)\}$ se definen mediante

$$\left((x - b_{n+l}^{(0)}) \Delta_n(2, k-1) - a_{n+l}^{(1)} \Delta_{n+l}(3, k-1) - a_{n+l}^{(0)} \Delta_{n-1+l}(2, k-2) \right) P_n^{(l)}(x) = P_{n+1}^{(l)}(x) + a_{n+l}^{(0)} a_{n-1+l}^{(1)} \cdots a_{n-1+l}^{(k-1)} P_{n-1}^{(l)}(x), \quad n \geq 0 \quad (6.6)$$

y las condiciones iniciales

$$P_{-1}^{(l)}(x) = 0, \quad P_0^{(l)}(x) = 1.$$

Observamos que si un sistema de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ satisface la relación de recurrencia anterior para $n \geq 1$, entonces

$$Q_n(x) = Q_0(x) P_n^{(l)}(x) + (Q_1(x) - Q_0(x) P_1^{(l)}(x)) P_{n-1}^{(l+1)}(x), \quad n \geq 0.$$

Esto implica que

$$p_{(n+1)k-1}^{(1)}(x) = \Delta_0(2, k-1) P_n^{(1)}(x) \quad (6.7)$$

y que

$$p_{(n+1)k-2}^{(2)}(x) = \Delta_0(3, k-1) P_n^{(1)}(x) + a_1^{(0)} a_0^{(2)} \cdots a_0^{(k-1)} P_{n-1}^{(2)}(x) \quad (6.8)$$

para todo $n \geq 0$ (haciendo $a_0^{(2)} \cdots a_0^{(k-1)} = 1$ si $k = 2$). Así, si $\{p_n(x)\}$ es acotado por M , entonces el límite de su fracción continua viene dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{nk-1}^{(1)}(z)}{p_{nk}(z)} = \Delta_0(2, k-1) Y(z) \quad (6.9)$$

para $|z| > M$, donde

$$Y(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}. \quad (6.10)$$

Análogamente, para $\{P_n^{(1)}(x)\}$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(2)}(z)}{p_n^{(1)}(z)} = \frac{1}{\Delta_0(2, k-1)} (\Delta_0(3, k-1) + a_1^{(0)} a_0^{(2)} \dots a_0^{(k-1)} Y^{(1)}(z)) \quad (6.11)$$

donde

$$Y^{(1)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}^{(2)}(z)}{P_n^{(1)}(z)}, \quad |z| > M. \quad (6.12)$$

Nota 6.1. Si $X^{(1)}(z)$ es la fracción continua de los primeros asociados de $\{p_n(x)\}$ entonces

$$X^{(1)}(z) = \frac{1}{C_1} \left\{ z - B_0 - \frac{1}{X(z)} \right\}, \quad (6.13)$$

donde $X(z)$ es la fracción continua del sistema $\{p_n(x)\}$. Esto es obvio de (2.15)

Nota 6.2. Un sistema $\{p_n(x)\}$ de polinomios dado por una relación de recurrencia en bloques como (6.1) se denomina un *sistema de polinomios cribados de primera clase* si

$$\begin{cases} b_n^{(j)} = 0 & \text{para } j = 1, 2, \dots, k-1, \text{ si } k \geq 2, \\ a_n^{(j)} = \frac{1}{4} & \text{para } j = 2, 3, \dots, k-1, \text{ si } k > 2, \end{cases} \quad (6.14)$$

de tal manera que sólo $b_n^{(0)}$, $a_n^{(0)}$ y $a_n^{(1)}$ pueden depender de n . En tal caso

$$\Delta_n(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i-2 \\ \tilde{U}_{j-i+2} & \text{si } j \geq i-2, \quad i \geq 2, \end{cases} \quad (6.15)$$

donde $\tilde{U}_n(x)$ es el n -ésimo polinomio mónico de Chebyshev de segunda clase (véase el Apéndice). Suponiendo que $\{p_n(x)\}$ está acotado por M , (6.9) se transforma en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)} = \tilde{U}_{k-1}(z) Y(z), \quad |z| > M, \quad (6.16)$$

donde $Y(z)$ es como en (6.10).

Nota 6.3. Si $\{p_n(x)\}$ es un sistema de polinomios cribados de primera clase, $\{p_n^{(1)}(x)\}$ se denomina un sistema de polinomios cribados de *segunda clase*. Por consiguiente, el sistema $\{q_n(x)\}$ ($q_n(x) := p_n^{(1)}(x)$) de

los polinomios cribados de segunda clase está definido por los bloques de relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} (x - d_n^{(j)}) q_{nk+j}(x) &= q_{nk+j+1}(x) + c_n^{(j)} q_{nk+j-i}(x), \\ j &= 0, \dots, k-1, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

donde $k \geq 2$ y

$$\begin{cases} d_n^{(j)} = 0 & \text{para } j = 0, 1, \dots, k-2, \text{ si } k \geq 2, \\ c_n^{(j)} = \frac{1}{4} & \text{para } j = 2, 3, \dots, k-2, \text{ si } k \geq 2, \end{cases} \quad (6.18)$$

así que sólo $d_n^{(k-1)}$, $c_n^{(0)}$ y $c_n^{(k-1)}$ pueden depender de n . Si $\{P_n(x)\}$ es el sistema de polinomios de encadenamiento de $\{p_n(x)\}$, (6.7) y (6.8) se transforman en

$$q_{(n+1)k-1}(x) = \tilde{U}_{k-1}(x) P_n^{(1)}(x) \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} q_{(n+1)k-2}^{(1)}(x) &= \\ \tilde{U}_{k-2}(x) P_n^{(1)}(x) &+ \frac{1}{4^{(k-2)}} C_0^{(k-1)} P_{n-1}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (6.20)$$

para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, si $\{q_n(x)\}$ está acotado por M ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}^{(1)}(z)}{q_n(z)} &= \\ \frac{1}{\tilde{U}_{k-1}(x)} &\left(\tilde{U}_{k-2}(x) + \frac{1}{4^{(k-2)}} C_0^{(k-1)} Y^{(1)}(z) \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

$|z| > M$, donde $Y^{(1)}(z)$ es como en (6.12).

Si $\{p_n(x)\}$ es un sistema de polinomios cribados de la primera clase, $\{p_n^{(i)}(x)\}$, $i \geq 0$, se denomina un sistema de polinomios cribados de la $i+1$ -ésima clase.

El lector podrá encontrar demostraciones detalladas de los resultados de esta sección en [2], [11], [12] y [16].

7. Dos ejemplos de sistemas definidos por bloques generales de relaciones de recurrencia

Los sistemas que usaremos ahora como ejemplos tienen características especiales, y son particularmente complejos. Constituyeron el material de la tesis de Maestría de G. Preciado. Son además de cierta importancia, al ser primeros asociados de otros sistemas, un tipo de polinomios poco tratado en la literatura, y usualmente considerado difícil de manejar. Esto muestra posiblemente las cualidades de nuestro método.

En esta sección, estudiaremos en primer lugar el sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados del sistema $\{q_n(x)\}$, donde los $q_n(x)$ vienen dados para todo $n \geq 0$ por las $2k$ -relaciones de recurrencia

$$xq_{2nk+j}(x) = q_{2nk+j+1}(x) + a_n^{(j)}q_{2nk+j-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (7.1)$$

donde $0 \leq j \leq 2k-1$, $q_{-1}(x) = 0$, $q_0(x) = 1$, y

$$\begin{aligned} a_n^{(0)} &= \frac{n}{2(2n + \alpha + \beta + 1)}, & a_n^{(1)} &= \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 1)} \\ a_n^{(k)} &= \frac{n + \beta + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 2)}, & a_n^{(k+1)} &= \frac{n + \alpha + 1}{2(2n + \alpha + \beta + 2)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Si $k > 2$, suponemos que

$$a_n^{(j)} = \frac{1}{4}, \quad 2 \leq j \leq 2k-1, \quad j \neq k, k+1. \quad (7.3)$$

A lo largo de toda la sección supondremos que $k \geq 2$ y que $\{q_n(x)\}$ satisface la condición de positividad $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > -1$, $\alpha \neq 0$. Como es claro, el sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es acotado y positivo, pues $\{q_n(x)\}$ lo es.

Lema 6.1. *La fracción continua del sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$ es*

$$X^{(1)}(z) = \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ zU_{2k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z))} \right\}, \quad (7.4)$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ donde $X_{\alpha,\beta}(z)$ es la fracción continua de los polinomios de Jacobi (véase (8.23)).

Demostración. En efecto, los polinomios de encadenamiento $Q_n(x) := q_{2nk}^{(1)}(x)$, satisfacen la relación de recurrencia, $n \geq 0$,

$$\left[x\Delta_{n+1}(2, 2k-1) - a_{n+1}^{(1)}\Delta_{n+1}(3, 2k-1) - a_{n+1}^{(0)}(2, 2k-2) \right] Q_n(x) = Q_{n+1}(x) + 4^{2(2-k)} a_{n+1}^{(0)} a_n^{(1)} a_n^{(k-1)} a_n^{(k)} Q_{n-1}(x), \quad (7.5)$$

donde

$$\Delta_n(2, 2k-1) = \tilde{U}_{2k-1}(x), \quad (7.6)$$

$$\Delta_n(2, 2k-2) = x\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-2}(x) - a_n^{(k+1)}\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-3}(x) - a_n^{(k)}\tilde{U}_{k-2}^2(x), \quad (7.7)$$

y

$$\Delta_{n+1}(3, 2k-1) = x\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-2}(x) - a_{n+1}^{(k)}\tilde{U}_{k-1}(x)\tilde{U}_{k-3}(x) - a_{n+1}^{(k+1)}\tilde{U}_{k-2}^2(x) \quad (7.8)$$

para todo $n \geq 0$, como resulta de cálculos directos, y de las condiciones iniciales

$$Q_{-1}(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1. \quad (7.9)$$

Haciendo $\tilde{Q}_n(x) = 2^{(2k-1)n}Q_n(x)$, usando (7.6), (7.7), (7.8) (7.9) y el hecho de que

$$a_{n+1}^{(1)}a_n^{(k)} + a_{n+1}^{(0)}a_n^{(k+1)} + a_{n+1}^{(1)}a_{n+1}^{(k)} + a_{n+1}^{(0)}a_n^{(k)} = \frac{1}{4}, \quad n \geq 0, \quad (7.10)$$

(7.5) se transforma en

$$\left[T_{2k}(x) - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2(n+1) + \alpha + \beta)(2(n+1) + \alpha + \beta + 2)} \right] = \tilde{Q}_{n+1}(x) + C_n\tilde{Q}_{n-1}(x), \quad (7.11)$$

para todo $n \geq 0$ donde

$$C_n = \frac{4(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta)}{(2(n+1) + \alpha + \beta - 1)(2(n+1) + \alpha + \beta)^2(2(n+1) + \alpha + \beta + 1)}.$$

Ya que el sistema $\left\{ \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) \right\}$ satisface esta última relación de recurrencia, y dado que

$$\begin{aligned} \left(P_0^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) &= \tilde{Q}_0(x) \text{ y} \\ \left(P_1^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) &= \tilde{Q}_1(x), \end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$Q_n(x) = 2^{(1-2k)n} \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (T_{2k}(x)) \quad (7.12)$$

para todo $n \geq 0$, donde $\left\{ \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(1)} (x) \right\}$ es el sistema de los primeros asociados de los polinomios $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} (x) \right\}$ de Jacobi (véase el Apéndice). Similarmente, para el sistema $\left\{ Q_n^{(1)} (x) \right\}$ de los primeros asociados de $\left\{ Q_n(x) \right\}$ se obtiene que

$$Q_n^{(1)}(x) = 2^{(1-2k)n} \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(2)} (T_{2k}(x)), \quad n \geq 0. \quad (7.13)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1}^{(1)}(x)}{Q_n^{(2)}(x)} = 2^{2k-1} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \\ &= 2^{2k-3} * \frac{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} \left[(T_{2k}(z)) - \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2} - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right], \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde $X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z))$ es la fracción continua de los primeros asociados de los polinomios de Jacobi calculada en $T_{2k}(z)$.

Así, de (6.11), la fracción continua $X^{(1)}(z)$ de $\left\{ q_n^{(1)}(x) \right\}$ es

$$X^{(1)}(z) = \frac{1}{U_{2k-1}(z)} \left\{ \Delta_0(3, 2k-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{2k-3} \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)} 2^{2k-1} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \right\}. \quad (7.15)$$

Por otra parte de (7.7), (7.8) y (A.5, Apéndice) se tiene que

$$\Delta_0(3, 2k-1) = 4 \left[U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - 2a_0^{(k-1)} \right] = 4 \left[U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - \frac{(\alpha + 1)}{\alpha + \beta + 2} \right] \quad (7.16)$$

y sustituyendo en (7.15) obtenemos que

$$\begin{aligned} X^{(1)}(z) &= \frac{1}{U_{2k-1}(z)} \left\{ 4 \left(U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) - \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2} \right) + \left(\frac{1}{4} \right)^{k-2} \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)} X_{\alpha, \beta}^{(1)}(T_{2k}(z)) \right\} \\ &= \{ 2U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) + T_{2k}(z) \} - \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ 1 - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \\ &= \frac{2}{U_{2k-1}(z)} \left\{ zU_{k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

como se quería demostrar, pues como se verifica fácilmente,

$$zU_{2k-1}(z) = 2U_{k-1}(z) T_{k-1}(z) + T_{2k}(z) - 1.$$

Ya que $T_{2k}(z) \notin [-1, 1]$ y $U_{2k-1}(z) \notin [-1, 1]$ cuando $z \notin [-1, 1]$ y dado que

$$X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) = \frac{1}{1 + T_{2k}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta + 1)_n}{(\alpha + \beta + 1)_n} \left(\frac{2}{1 + T_{2k}(x)} \right)^n > 0 \quad (7.18)$$

cuando $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$, (7.17) vale para $\mathbb{C} - [-1, 1]$.

Estudiaremos ahora el comportamiento de $X^{(1)}(z)$ en $[-1, 1]$. Obsérvese que $X^{(1)}(z)$ puede extenderse continuamente a todo z , con $\text{Im } z \leq 0$, excepto posiblemente a los puntos del conjunto

$$S = \{x \in [-1, 1] \mid T_{2k}(x) = \pm 1\} \cup \{x \in [-1, 1] \mid U_{2k-1}(x) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) = 0\} \quad (7.19)$$

Nótese además que $\text{Im } X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$, así que $X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$, para $x \in (-1, 1) \setminus S$. Esto resulta de ((A.24), Apéndice). Por lo tanto

$$U_{2k-1}(x) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(x)) \neq 0$$

en esos puntos.

Las identidades (A.5) y (A.6) en el Apéndice implican que

$$S = \{1, -1, \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}\}, \quad (7.20)$$

donde ξ_1, \dots, ξ_{k-1} son las raíces de $U_{k-1}(x)$ y ξ_k, \dots, ξ_{2k-1} son las de $T_k(x)$. Así debemos examinar 3 casos: 1) ξ es una raíz de $U_{k-1}(x)$; 2) ξ es una raíz de $T_k(x)$; 3) $\xi = \pm 1$. Examinaremos caso por caso:

1. ξ es una raíz de $U_{k-1}(x)$

Si $\alpha > 0$ y $\beta > -1$, de (A.23) se tiene que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{1}{T_{2k}(z) + 1} F\left(1, \beta + 1 \mid \frac{2}{T_{2k}(z) + 1}\right) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + 1)} = \quad (7.21)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) &= \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{2(z - \xi_j)}{U_{2k-1}(z)} \left\{ z U_{2k-1}(z) - \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \right\} \\ &= -\frac{\alpha}{U'_{2k-1}(\xi_j)(\alpha + \beta + 1)} = \frac{2(1 - \xi_j)\alpha}{k(\alpha + \beta + 1)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

pues $U'_{2k-1}(\xi) = \frac{-2kT_{2k}(\xi)}{1 - \xi^2}$ para $\xi = \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}$. Se deduce que la medida de ortogonalidad de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ tiene masas en estos puntos. Ahora, si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > -1$, (1.57), (1.58), la fórmula binomial de Newton y la fórmula ((A.18), Apéndice) implican que

$$\begin{aligned} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) &= \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha} \frac{1}{T_{2k}(z) + 1} F\left(1, \beta + 1 \mid \frac{T_{2k}(z) - 1}{T_{2k}(z) + 1}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) \Gamma(-\alpha)}{2\Gamma(\beta + 1)} \left(\frac{T_{2k}(z) - 1}{T_{2k}(z) + 1}\right)^\alpha \left(\frac{2}{T_{2k}(z) + 1}\right)^{-\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z)) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = 0. \quad (7.24)$$

y la medida de ortogonalidad de $\{q_n^{(1)}(x)\}$ no porta masas en los puntos $\xi = \xi_1, \dots, \xi_{2k-1}$.

2. ξ es una raíz de $T_k(x)$

Observemos primero que en este caso ξ es una raíz de $T_{2k}(x) + 1$. Aplicando (A.18) y (A.23) del Apéndice obtenemos que

$$X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z)) = \frac{\alpha + \beta + 1}{\beta} \frac{1}{T_{2k}(z) - 1} F \left(1, \beta + 1 \left| \frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right. \right) + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(-\beta)}{2\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right)^\beta \left(\frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right)^{-\alpha - \beta}. \quad (7.25)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = 0. \quad (7.26)$$

siempre que $-1 < \beta < 0$ y $\alpha \neq 0$, así que, en este caso, la medida de ortogonalidad no porta masas en los puntos $\xi = \xi_k, \dots, \xi_{2k-1}$, las raíces de $T_k(x)$.

Ahora si $\alpha \neq 0, \beta > 0$ tenemos

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(T_{2k}(z)) = \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} \frac{1}{T_{2k}(z) - 1} F \left(1, \alpha + 1 \left| \frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right. \right) = -\frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\beta + 1)} = -\frac{\alpha + \beta + 1}{2\beta} \quad (7.27)$$

Luego,

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X^{(1)}(z) = \frac{2\beta(1 - \xi_j^2)}{k(\alpha + \beta + 1)}. \quad (7.28)$$

lo que implica en este caso que la medida porta masas en las raíces ξ_j de $T_k(x)$ con el valor dado por (7.28).

Queda por considerar el caso $\beta = 0$. Aplicando la transformación de Kummer (A.18) al primer término de (7.25), y haciendo $\beta \rightarrow 0$ se obtiene, siempre y cuando $|T_{2k}(z) + 1| < |T_{2k}(z) - 1|$, que

$$X_{\alpha,0}(T_{2k}(z)) = -\frac{\alpha + 1}{2} \left(\frac{2}{1 - T_{2k}(z)} \right)^\alpha \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n \cdot n!} \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right)^n - \log \left(\frac{T_{2k}(z) + 1}{T_{2k}(z) - 1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(n + \alpha + 1)(n + 1)} \right\} \quad (7.29)$$

Luego

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,0}(T_{2k}(z)) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0, \quad (7.30)$$

y por lo tanto la medida de ortogonalidad no porta masas en las raíces de $T_{2k}(x)$, en este caso.

3. $\xi = \pm 1$

Para $-1 < \alpha < 0$ y β arbitrario, (7.25) implica que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} X_{\alpha,\beta}(z) = \infty. \quad (7.31)$$

Entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0. \quad (7.32)$$

A su vez, si $\alpha > 0$ entonces

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow 1}} X_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\alpha + \beta + 1}{2\alpha}. \quad (7.33)$$

Luego, en cualquier circunstancia,

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) X(z) = 0. \tag{7.34}$$

Por lo tanto, la medida de ortogonalidad no porta masas en los puntos extremos $z = \pm 1$.

Calcularemos ahora explícitamente la medida μ asociada al sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$. Obsérvese que la función de peso $\omega(x)$ de la parte absolutamente continua de μ viene dada por:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{X}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\frac{-2}{U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x))} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\text{Im} \left(U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right)}{\left| U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \right) \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha + \beta + 2) (1 - x^2)^\alpha |T_k(x)|^{2\beta+1} |U_{k-1}(x)|^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \left| U_{2k-1}(x) \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \chi(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2) (1 - x^2)^\alpha |T_k(x)|^{2\beta-1} |U_{k-1}(x)|^{2\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1) \left| \tilde{X}_{\alpha,\beta}(T_{2k}(x)) \right|^2} \chi(x) \end{aligned} \tag{7.35}$$

donde $\chi(x)$ denota la función caracterísitca de $(-1, 1) \setminus S$.

El análisis anterior se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema 7.1. Sean μ la medida de ortogonalidad del sistema $\{q_n^{(1)}(x)\}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}$ las raíces de $U_{k-1}(x)$, $\{\xi_k, \dots, \xi_{2k-1}\}$ las raíces de $T_k(x)$, y $\omega(x)$ como en (7.35). Entonces:

1. Si $\alpha > 0$ y $-1 < \beta \leq 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx \tag{7.36}$$

2. Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) + \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) \tag{7.37}$$

3. Si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx + \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \tag{7.38}$$

4. Si $-1 < \alpha < 0$ y $-1 < \beta < 0$,

$$d\mu(x) = \omega(x) dx \tag{7.39}$$

Los polinomios anteriores fueron descubiertos por R. Askey en [5] y denominados por él polinomio cribados de Jacobi de la primera clase. Su medida de ortogonalidad, la cual es absolutamente continua, fué establecida en [5] y, por otros procedimientos en [2] y [16]. El hecho de que los $\{q_n(x)\}$ puedan obtenerse por un proceso de cribación ([2], [5]) no parece ayudar mucho en la determinación de las medidas espectrales del sistema

$\{q_n^{(1)}(x)\}$ de sus cribados, el cual resulta ser mucho más complejo. De más ayuda puede ser tal vez el que dichos sistemas pueden obtenerse por medio de aplicaciones polinómicas (20), aunque ésto no parece del todo evidente. Creemos, de todas maneras, que nuestro procedimiento es más eficiente y fácil de aplicar.

De hecho, el procedimiento es aplicable aún a sistemas que, estando definidos por bloques de relaciones de recurrencia, no son sistemas cribados ni pueden obtenerse por medio de aplicaciones polinómicas. Tal es el caso del sistema $\{p_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados de los polinomios $\{p_n(x)\}$ dados por los bloques

$$\begin{aligned} xp_{2nk+j}(x) &= p_{2nk+j+1}(x) + a_n^{(j)} p_{2nk+j-1}(x) \\ j &= 0, \dots, 2k-1, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n^{(0)} &= \frac{n+\alpha}{2(2n+\alpha+\beta+1)} \\ a_n^{(1)} &= \frac{n+\beta+1}{2(2n+\alpha+\beta+1)} \\ a_n^{(k)} &= \frac{n+\alpha+\beta+1}{2(2n+\alpha+\beta+2)} \\ a_n^{(k+1)} &= \frac{n+1}{2(2n+\alpha+\beta+2)}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

para $n \geq 0$ y $k \geq 2$. Si $k > 2$, suponemos que

$$a_n^{(j)} = \frac{1}{4}, \quad j = 2, 3, \dots, 2k-1, \quad j \neq k, k+1, \quad n \geq 0. \quad (7.42)$$

Este sistema está evidentemente relacionado con los polinomios cribados de *Jacobi-Askey* de primera clase mencionados anteriormente (veáanse [2] y [16]). Suponemos que $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > -1$ y $\alpha \neq 0$, lo cual determina las condiciones de positividad de $\{p_n(x)\}$. Obsérvese que, en estas circunstancias $\{p_n(x)\}$ es también acotado. La fracción continua de este sistema fue establecida en [16] y está dada por

$$X(z) = \frac{U_{2k-1}(z) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))}{1 + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(z) U_{k-2}(z) X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \quad (7.43)$$

donde $X_{\alpha, \beta}(z)$ es la fracción continua de los polinomios de Jacobi ((A.23), Apéndice) lo cual permite concluir que $\{p_n(x)\}$ no puede obtenerse a partir de los polinomios de Jacobi mediante cribación directa o mediante aplicaciones polinómicas. La relación (A.18) permite concluir que la fracción continua $Y^{(1)}(z)$ del sistema $\{p_n^{(1)}(x)\}$ de los primeros asociados de $\{p_n(x)\}$ está dada por

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(z) &= \frac{2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U_{2k-1}(z)} \left\{ z U_{2k-1}(z) - \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(z) U_{k-2}(z) \right\} - \frac{2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U_{2k-1}(z)} \frac{1}{X_{\alpha, \beta}(T_{2k}(z))} \\ &= \frac{\alpha + \beta + 3}{(1 + \alpha)} \left\{ X^{(1)}(z) - \frac{2\alpha U_{k-2}(z)}{(\alpha + \beta + 1) U_{k-1}(z)} \right\} \end{aligned} \quad (7.44)$$

para $z \in \mathbb{C} - [-1, 1]$, donde $X^{(1)}(z)$ es como en (7.4).

Teorema 7.2. Sean ν la medida de ortogonalidad de $\{p_n^{(1)}(x)\}$, $\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}$ las raíces de $U_{k-1}(x)$, $\{\xi_k, \dots, \xi_{2k-1}\}$ las raíces de $T_k(x)$ y $u(x) = \frac{\alpha + \beta + 3}{1 + \alpha} \omega(x)$, donde ω es como en (7.35). Entonces:

1. Si $\alpha > 1$ y $-1 < \beta \leq 0$,

$$d\nu(x) = u(x) dx \quad (7.45)$$

2. Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$d\nu(x) = u(x) dx + \frac{2\beta(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \quad (7.46)$$

3. Si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > 0$,

$$dv(x) = u(x) dx - \frac{(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)} \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx + \frac{(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)} \frac{2\beta}{\alpha + \beta + 1} \sum_{j=k}^{2k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx, \quad (7.47)$$

4. Si $-1 < \alpha < 0$ y $-1 < \beta < 0$

$$dv(x) = u(x) dx - \frac{2\alpha(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \xi_j^2}{k} \delta(x - \xi_j) dx. \quad (7.48)$$

Demostración. La ecuación (7.44) permite establecer el comportamiento de la fracción continua $Y^{(1)}(z)$ en términos del de $X^{(1)}(z)$. El cálculo de la parte absolutamente continua de la medida y el análisis del comportamiento de $Y^{(1)}(z)$ en los puntos ξ_k, \dots, ξ_{2k-1} (las raíces de $T_k(x)$) y en ± 1 es el mismo que el hecho para $X^{(1)}(z)$ en la sección anterior. Resta por examinar el caso en que ξ es raíz de $U_{k-1}(x)$. Para ésto supongamos primero que $\alpha > 0$ y $\beta > -1$ y aplicando (7.44) obtenemos

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = \frac{-2(\alpha + \beta + 3)}{(1 + \alpha) U'_{2k-1}(\xi_j)} \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} T_k(\xi_j) U_{k-2}(\xi_j) + \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + 1} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que $T_k(\xi_j) U_{k-2}(\xi_j) = -1$ para $j = 1, \dots, k-1$, vemos que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = 0. \quad (7.49)$$

Por lo tanto, v no porta masas en estos puntos.

Ahora, si $-1 < \alpha < 0$ y $\beta > -1$, utiliz&o (6.44) obtenemos que

$$\lim_{\substack{\text{Im } z < 0 \\ z \rightarrow \xi_j}} (z - \xi_j) Y^{(1)}(z) = \frac{-2\alpha(\alpha + \beta + 3)(1 + \xi_j^2)}{(1 + \alpha)(\alpha + \beta + 1)k}. \quad (7.50)$$

Esto implica que v si porta en tal caso masas en las raíces de $U_{k-1}(x)$ con amplitudes dadas precisamente por (7.50). \square

Apéndice

Polinomios de Chebyshev y Jacobi.

Función Gamma y función hipergeométrica

1. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clases $\{T_n(x)\}$ y $\{U_n(x)\}$ están definidos ([25], [29]) por la relación de recurrencia

$$2xy_n(x) = y_{n+1}(x) + y_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (A.1)$$

y las condiciones iniciales

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{y} \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x. \quad (A.2)$$

Por razones prácticas, se harán evidentes posteriormente, convendremos en que $T_{-1}(x) = U_{-1}(x) = 0$. Si $x = \cos \theta$, entonces

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen } \theta}, \quad n \geq 0 \quad (A.3)$$

para $0 < \theta < \pi$ como resulta de las identidades trigonométricas elementales.

Las relaciones

$$2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x), \quad (A.4)$$

$$U_{n-1}^2(x) - U_n(x)U_{n-2}(x) = 1, \quad n \geq 1$$

$$1 - T_n^2(x) = (1 - x^2) U_{n-2}^2(x), \quad (A.5)$$

$$1 - T_{2n}(x) = 2(1 - x^2) U_{n-1}^2(x), \quad n \geq 0$$

$$U_{2n-1}(x) = 2U_{n-1}(x)T_n(x), \quad (A.6)$$

$$1 + T_{2n}(x) = 2T_n^2(x), \quad n \geq 0$$

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x), \quad (A.7)$$

$$U_{m-1}(x)U_n(T_m(x)) = U_{m(n+1)-1}(x), \quad n, m \geq 1$$

son útiles en este documento y se obtienen también a partir de identidades trigonométricas elementales basadas en (A.3) y prolongación analítica.

Los polinomios mónicos de Chebyshev están dados por las relaciones

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n(x) &= 2^{-n+1}T_n(x), \\ \tilde{U}_n(x) &= 2^{-n}U_n(x), \quad n \geq 1,\end{aligned}\tag{A.8}$$

con

$$\tilde{T}_{-1}(x) = 0 = \tilde{U}_{-1}(x), \quad \tilde{T}_0(x), \tilde{U}_0(x) = 1.\tag{A.9}$$

Ambos sistemas satisfacen relaciones de recurrencia de la forma

$$xy_n(x) = y_{n+1}(x) + C_n y_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{A.10}$$

con $C_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$, $C_1 = \frac{1}{2}$ para $\{\tilde{T}_n(x)\}$, $C_1 = \frac{1}{2}$ para $\{\tilde{U}_n(x)\}$.

Nota A.1. Para la determinación de la fracción continua de los polinomios de Chebyshev, véase [17]. En ese mismo documento, las medidas espectrales de tales polinomios se determinaron estrictamente por aplicación del Teorema 4.1, según los procedimientos que estamos tratando de explicar y aplicar a sistemas más complejos.

2. La función Gamma.

La función Gamma ([25]) se define:

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^z}{(z)_n}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.11}$$

donde $(z)_n$ es el símbolo de Pochhammer, el cual está dado por $(z)_0 = 1$; $(z)_1 = z$; $(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1)$, $n \geq 2$. Nótese que $(1)_n = n!$.

De (A.11) se deduce que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad n \geq 0, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.12}$$

Si $\text{Re}(z) > 0$, entonces

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{A.13}$$

y $\Gamma(z)$ es obviamente analítica para $\text{Re}(z) > 0$. Esto y (A.12) aseguran que Γ es analítica sobre \mathbb{C} excepto

por singularidades en $z = 0, -1, -2, \dots$, las cuales son obviamente polos simples.

3. La función hipergeométrica.

La prolongación analítica a $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ ([25]) de la serie hipergeométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \tag{A.14}$$

se denota con $F(a, b; c; z)$ y se conoce como la función hipergeométrica. Es necesario suponer que $c \neq 0$ y no es un entero negativo. Si $a \in \mathbb{C}$ y $(1-t)^a := e^{a \log(1-t)}$, $t \neq 1$, donde $\log(z)$ es la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (parte imaginaria o argumento en $(-\pi, \pi)$), entonces, siempre y cuando $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}F(a, b; c; z) &= \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt,\end{aligned}\tag{A.15}$$

para todo $z \notin [1, \infty)$ (véase [25]). La fórmula (A.15) se debe a Euler y representa la prolongación analítica de (A.14) a $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ más frecuentemente usada en las aplicaciones. Suponiendo además que $c-a$ no sea cero o un entero negativo, y que $\text{Re}(c-a-b) > 0$, (A.15) garantiza que $F(a, b; c; z)$ es continua en $z=1$ con

$$F(a, b; c; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \tag{A.16}$$

fórmula debida a Gauss. La fórmula $(1-z)^{-a} = F(a, 1; 1; z)$, $z \notin [1, \infty)$, que es también útil, se conoce como la *fórmula binomial de Newton*. La transformación de Euler (véase [25])

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \tag{A.17}$$

es fácilmente verificable para $|z| < 1$, y por prolongación analítica es válida para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. La notación $F\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z\right)$ es frecuentemente preferible a la $F(a, b; c; z)$. La transformación de Kummer (véase [25])

$$F\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F\left(\begin{matrix} a, & b \\ a+b+1-c \end{matrix} \middle| 1-z\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F\left(\begin{matrix} c-a, & c-b \\ c-a-b+1 \end{matrix} \middle| 1-z\right) \quad (\text{A.18})$$

es válida para $z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$, siempre y cuando las expresiones donde estén involucrados a , b y c tengan todas sentido.

4. Los polinomios de Jacobi.

Los polinomios de Jacobi ([25], [29]) $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ están dados por la relación de recurrencia

$$\left(x - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}\right) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta + 1)}, n \geq 0 \quad (\text{A.19})$$

y las condiciones iniciales

$$P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0, \quad P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1. \quad (\text{A.20})$$

Se supone que el coeficiente de $P_0^{(\alpha, \beta)}(x)$ es $(x - \beta)$ si $\alpha = -\beta$. Es necesario suponer que $\alpha > -1$, $\beta > -1$ para que $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ sea un sistema positivo. En tal caso el funcional de momentos $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ (véase [25]) está representado por la medida positiva, absolutamente continua

$$d\mu_{\alpha, \beta}(x) = \omega_{\alpha, \beta}(x) dx, \quad (\text{A.21})$$

donde

$$\omega_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi(x), \quad (\text{A.22})$$

siendo $\chi(x)$ la función característica de $(-1, 1)$. el soporte de $\mu_{\alpha, \beta}$ es $[-1, 1]$.

Si $\alpha > -1$, $\beta > -1$, la fracción continua de $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ es

$$X_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{z-1} F\left(\begin{matrix} 1, & \alpha+1 \\ \alpha+\beta+2 \end{matrix} \middle| \frac{2}{1-z}\right) = \frac{1}{z+1} F\left(\begin{matrix} 1, & \beta+1 \\ \alpha+\beta+2 \end{matrix} \middle| \frac{2}{1+z}\right) \quad (\text{A.23})$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Esto se deduce inmediatamente del teorema de Markov con $\mu = \mu_{\alpha, \beta}$. En este caso se tiene también el siguiente lema, que tiene importancia fundamental.

Lema A.1. *Si $\alpha > -1$, $\beta > -1$, la fracción continua $X_{\alpha, \beta}(z)$ puede ser extendida continuamente desde $\text{Im}(z) < 0$ a $\text{Im}(z) \leq 0$, $z \neq \pm 1$. En este caso se tiene también que*

$$\omega_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Im} X_{\alpha, \beta}(x), \quad z \neq \pm 1. \quad (\text{A.24})$$

Para una demostración, véase [16].

Epílogo

Aunque las ideas consideradas en las notas de este seminario son simples y de carácter limitado, no dejan de tener aspectos técnicos delicados. Esperamos, por una

parte, haberlas colocado en un contexto lo suficientemente apropiado para hacerlas aparecer naturales o, al menos, rápidamente comprensibles, y por otra, haber logrado comunicar el hecho de que pueden ser de utilidad,

tanto teórica como práctica, en la solución de ciertos problemas. De ser así, nos damos por satisfechos.

Referencias

- [1] **I. N. Ahkiezer**, *The Classical Moment Problem*. Hafner, New York, 1965.
- [2] **B. H. Aldana, J.A. Charris & O. Mora-Valbuena**, *On block recursions, Askey's sieved Jacobi polynomials, & two related systems*. Colloquium Mathematicum **78** (1998), 57–91.
- [3] **T. M. Apostol**, *Mathematical Analysis*. 12nd Edition, Addison Wesley, Reading, Mass., 1974.
- [4] **W. Al-Salam, W. Allaway & R. Askey**, *Sieved ultraspherical polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1984), 39–55.
- [5] **R. Askey**, *Orthogonal polynomials old & new & some combinatorial connections*. In: *Enumeration & Design*, D. M. Jackson & S. A. Vanstone (eds.), Academic Press, Toronto, 1984, 67–84.
- [6] **R. Askey, & M. E. H. Ismail**, *Recurrence relations, continued fractions & orthogonal polynomials*. Mem. Amer. Math. Soc. **300** (1984), 1–102.
- [7] **E. Banck & M. E. H. Ismail**, *The attractive Coulomb potential polynomials*. Constructive Approximation **1** (1985), 103.
- [8] **R. Bartle**, *The Elements of Integration & Lebesgue Measure*. Wiley, New York, 1995.
- [9] **TJ. T. Broad**, *Gauss quadrature generated by diagonalization of H in infinite L^2 basis*. Phys Rev. **A-18**, 1012–1027.
- [10] **J. A. Charris & L. A. Gómez**, *Functional analysis, orthogonal polynomials & a theorem of Markov*. Revista Colombiana Mat. **22** (1988), 79–128.
- [11] **J. A. Charris & M. E. H. Ismail**, *Sieved orthogonal polynomials VII: Generalized polynomial mappings*. Trans. Amer. Math. Soc., **340** (1993), 71–93.
- [12] **J. A. Charris, M. E. H. Ismail, & S. Monsalve**, *Sieved orthogonal polynomials X: General blocks of recurrence relations*. Pac. J. Math. **163** (1994), 1294–1308.
- [13] **J. A. Charris & G. Rodríguez-Blanco**, *On systems of orthogonal polynomials with inner & end point masses*. Revista Colombiana Mat. **24** (1990), 153–177.
- [14] **J. A. Charris & F. H. Soriano**, *Complex & distributional weights por sieved ultraspherical polynomials*. Internat. J. Math. & Math. Sci. **19** (1996), 229 - 242.
- [15] **J. A. Charris & F. H. Soriano**, *On the distributional orthogonality of the general Pollaczek polynomials*. Internat. J. Math. & Math. Sci. **19** (1996), 417–426. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [16] **J. A. Charris & O. Mora-Valbuena**, *On block recursions & the determination of spectral measures from continued fractions*. Int. J. Appl. Math. **1** (1999), 635–688.
- [17] **J. A. Charris & G. Preciado-López**, *Sobre los polinomios ortogonales, las fracciones continuas y las medidas espectrales*. Rev. Acad. Col. Cienc. Exactas Físicas y Naturales **26** (2002), 403–410.
- [18] **T. S. Chihara**, *On co-recursive orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **8**(1957), 899–905.
- [19] **T. S. Chihara**, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [20] **J. Gerónimo & W. van Assche**, *Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping*. Trans Amer. Math. Soc. **308** (1988), 559–581.
- [21] **E. J. Heller, W. P. Reinhard & H. A. Yamani**, *On quadrature calculations of matrix elements using L_2 -expansion techniques*. J. Comp. Phys. **13** (1973), 535–549.
- [22] **M. E. H. Ismail, D. Masson & M. Rahman**, *Complex weight functions for classical orthogonal polynomials*. Canadian J. Mathematics **43** (1991), 1294–1308.
- [23] **A. Krall**, *Orthogonal polynomials through moment functionals*. SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 600–603.
- [24] **F. W. Olver**, *Asymptotics & Special Functions*. Academic Press, New York, 1974.
- [25] **E. D. Rainville**, *Special Functions*. Macmillan, New York, 1960.
- [26] **W. Rudin**, *Real & Complex Analysis*. 2nd Edition, Mc Graw-Hill, New York, 1974.
- [27] **J. Shohat & J. P. Tamarkin**, *The problem of Moments*. Math. Surveys Vol. 1, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1950.
- [28] **G. B. Simmons**, *Introduction to Topology & Modern Analysis*. Mc Graw-Hill, New York, 1963.
- [29] **G. Szegő**, *Orthogonal Polynomials*. 4th Ed., Colloquium Publications, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [30] **H. S. Wall**, *Analytic Theory of Continued Fractions*. Van Nostrand, New York, 1948.
- [31] **H. A. Yamani & W. P. Reinhardt**, *L^2 discretization of the continuum, radial kinetic energy & Coulomb hamiltonians*. Phys. Rev., **A-11**, 1144–1155.
- [32] **K. Yosida**, *Functional Analysis*. 5th Edition, Springer, Berlín, 1979.