

EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS POR SERIES DE LIE

por

José Gregorio Portilla¹

Resumen

Portilla J.G.: El problema restringido de los tres cuerpos por series de Lie. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **27**(103): 165-172, 2003. ISSN 0370-3908.

A partir de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de una partícula de masa infinitesimal sometida al campo gravitacional newtoniano de dos masas comparables que giran mutuamente en órbitas circulares alrededor de su centro de masas común (problema restringido circular de los tres cuerpos), se logra por medio de un operador de Lie, establecer soluciones que permiten hallar expresiones algebraicas recurrentes las cuales se utilizan para determinar las componentes de los vectores posición y velocidad en términos de series de Lie. Se presenta una comparación entre la solución por integración numérica directa y la solución por series de Lie.

Palabras clave: Mecánica celeste, Series de Lie, Problema restringido de los tres cuerpos.

Abstract

Starting from the differential equations that describe the motion of a body of infinitesimal mass under the newtonian gravitational field produced by two bodies of comparable mass which orbit in circular orbits about their common centre of mass (circular, restricted, three body problem), we obtained, by a Lie-operator, solutions that permit, by recurrent algebraic expressions, to find the components of the position and velocity vectors by means of Lie series. We present a comparison between the numerical direct integrations and the solution by Lie-series.

Key words: Celestial Mechanics, Lie-series, Restricted three body problem.

¹ Observatorio Astronómico Nacional. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Apartado Aéreo 2584. E-mail: gportill@ciencias.unal.edu.co

Introducción

Las series de Lie (SL) constituyen un mecanismo elegante y poderoso para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Con el impulso dado a la investigación y exploración del espacio a comienzos de los años sesenta surgió un marcado interés por aplicar las SL a algunos problemas clásicos de la mecánica celeste. El trabajo de Gröebner (1960) dio origen a una serie de investigaciones tendientes a estudiar las propiedades de las SL (tales como su convergencia) y sus aplicaciones a diversos tópicos de interés. Stumpff (1968) aplicó las SL para algunos casos concretos; en particular, logró obtener, para el problema de los dos cuerpos y mediante la introducción de una variable independiente, una solución elegante que permite la convergencia completa de las series a través de funciones conocidas. Posteriormente, Hanslmeier & Dvorak (1984) estudiaron la potencialidad de las SL como una modalidad de integración numérica para aquellos casos en los que no es posible reducir las expresiones en series a funciones sencillas conocidas. Poco después, Hanslmeier (1984) aplicó las SL al problema regularizado de los tres cuerpos restringido obteniendo expresiones de recurrencia para la solución. Delva (1984) utilizó las SL en el problema elíptico restringido de los tres cuerpos, obteniendo expresiones recurrentes, las cuales fueron utilizadas para elaborar un programa en Fortran dado a conocer al poco tiempo (Delva, 1985). Intentos de resolver problemas clásicos de la mecánica, recurriendo para ello a las modernas técnicas computacionales, continúan apareciendo de tanto en tanto en la literatura. Ejemplo de ello es el intento de solución del problema de los n cuerpos por SL utilizando novedosas técnicas computacionales (Parv, 1993).

Otros investigadores aplicaron las SL en la teoría de perturbaciones. En particular Hori (1966) y luego Deprit (1969) lograron, mediante las SL, evitar la mezcla de variables nuevas y antiguas en las funciones generatrices, algo que era común en la clásica aplicación del método de Von Zeipel.

En la presente comunicación damos a conocer las fórmulas de recurrencia que permiten determinar, por medio de las SL, las componentes del vector posición y velocidad con referencia a las coordenadas rotantes del problema circular restringido de los tres cuerpos. Se presenta también una comparación de resultados utilizando un integrador numérico clásico y un programa elaborado con las fórmulas aquí obtenidas.

El operador de Lie y las series de Lie

El operador de Lie es un operador diferencial lineal que se define de la siguiente forma:

$$D = \sum_{i=1}^n \theta_{i(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} = \theta_{1(x)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta_{2(x)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \theta_{n(x)} \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (1)$$

El punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ está contenido en el x -espacio n -dimensional. Las funciones $\theta_{i(x)}$ son holomorfas (analíticas) dentro de un cierto dominio G , lo que implica que pueden expandirse en una serie de potencias convergente.

El operador D puede aplicarse a una función $f(x)$ (considerada holomorfa en la misma región que $\theta_{i(x)}$):

$$Df = \theta_{1(x)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \theta_{2(x)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \theta_{n(x)} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

pudiéndose aplicar el operador D cuantas veces se desee de tal forma que

$$D^2 f = D(Df); \quad D^n = D(D^{n-1} f). \quad (2)$$

Una serie de Lie $L_{(x,t)}$ se define como:

$$L_{(x,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n f(x), \quad (3)$$

donde $f(x)$ es holomorfa en la misma región que $\theta_{i(x)}$.

Puesto que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n f(x) = f(x) + tDf(x) + \frac{t^2}{2!} D^2 f(x) + \dots,$$

y que la expansión en series de Taylor de la función exponencial es:

$$e^{tD} = 1 + tD + \frac{t^2}{2!} D^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n,$$

entonces:

$$L_{(x,t)} = e^{tD} f(x). \quad (4)$$

Las SL tienen una propiedad, conocida como el *teorema de la conmutación*, que permite resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. El teorema de la conmutación sostiene que para una función holomorfa $F(x)$ en la vecindad de (x_1, x_2, \dots, x_n) donde la expansión en serie correspondiente converge al punto (X_1, X_2, \dots, X_n) , entonces

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n F(x),$$

o, lo que es lo mismo:

$$F(e^{tD}x) = e^{tD}F(x). \quad (5)$$

Supongamos que se tiene el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_i}{dt} = \theta_{i(x)}, \quad (6)$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ahora bien, el operador D definido por (1) es equivalente al operador derivada temporal d/dt . En efecto, puesto que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \theta_{i(x)}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

o, de forma equivalente,

$$\frac{d}{dt} \theta_{i(x)} = \theta_{i(x)} \frac{\partial \theta_{i(x)}}{\partial x_i},$$

se deduce inmediatamente que:

$$\frac{d}{dt} = \theta_{i(x)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (7)$$

para un número n de funciones holomorfas $\theta_{i(x)}$.

Postulemos que la solución del sistema (6) es del tipo:

$$x_i = e^{tD} \xi_i, \quad (8)$$

donde ξ_i son las condiciones iniciales x_i para $t = 0$. Con el fin de probar esto, diferenciemos la ecuación (8) con respecto a t :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{tD} \xi_i),$$

pero, de (7) y (1) es claro que:

$$\frac{dx_i}{dt} = D(e^{tD} \xi_i) = e^{tD} D \xi_i.$$

Al tener en cuenta la definición de (1) llegamos a $D \xi_i = \theta_{i(\xi_i)}$ pero del teorema de la conmutación, ecuación (5), se desprende,

$$\frac{dx_i}{dt} = \theta_{i(e^{tD} \xi_i)},$$

o también,

$$\frac{dx_i}{dt} = \theta_{i(x)},$$

demostrando que (8) es solución del sistema (6).

El problema restringido de los tres cuerpos

El problema general de los tres cuerpos consiste en encontrar para todo tiempo los vectores de posición y velocidad de tres partículas materiales sometidas a sus mutuas atracciones gravitacionales. Aunque es posible ubicar el origen de coordenadas en una de ellas, digamos la de

masa m_1 , de tal forma que se hace necesario sólo encontrar los vectores para las otras dos partículas (de masa m_2 y m_3), a las ecuaciones diferenciales resultantes no es posible encontrarles todas las constantes de movimiento, i.e., el problema no es integrable analíticamente, ver por ejemplo Portilla, (2001).

Un caso particular del problema de los tres cuerpos consiste en el siguiente: dos de las tres partículas (de masa m_1 y m_2 respectivamente) están girando en órbita circular alrededor de su respectivo centro de masas. La tercera partícula (de masa m_3) es considerada de masa infinitesimal frente a las otras dos. Con ello aseguramos que la partícula de masa despreciable no afecta en absoluto el movimiento de las otras dos, pero, obviamente, el campo gravitacional de éstas gobierna el movimiento de m_3 . El problema restringido circular de los tres cuerpos consiste en encontrar el movimiento de la partícula de masa m_3 sometida al campo gravitacional de dos partículas que giran en órbitas circulares alrededor de su centro de masa.

De acuerdo con la mecánica clásica newtoniana, la fuerza que se ejerce sobre m_3 está dada por:

$$m_3 \vec{a}_I = - \frac{G m_1 m_3 \vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - \frac{G m_2 m_3 \vec{\rho}_2}{\rho_2^3} \quad (9)$$

donde \vec{a}_I es la aceleración de m_3 con respecto a un sistema de coordenadas inercial fijo en el espacio, $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$ los vectores posición de m_3 con respecto a m_1 y m_2 respectivamente, ρ_1 y ρ_2 las normas de los vectores anteriores y G la constante de gravitación de Cavendish. Ahora bien, m_1 y m_2 están girando en órbita circular alrededor del centro de masas. El plano de movimiento de estos dos objetos (descritos por el problema de los dos cuerpos) será el plano conformado por los ejes ortogonales cartesianos x y y , lo que implica que el eje z es ortogonal al plano de movimiento. Pero aquí es donde el asunto se torna interesante: definimos el eje x de tal forma que siempre pase por m_1 y m_2 . Esto significa que los ejes x y y están rotando con una velocidad uniforme (recuérdese que el movimiento es circular) que es igual al movimiento medio N de m_2 con respecto a m_1 (o viceversa) el cual es $N = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el período de rotación. Pero estar trabajando con un sistema de coordenadas móviles tiene un precio: el sistema deja de ser inercial y aparecen fuerzas ficticias. El asunto se resuelve considerando la relación entre la aceleración inercial \vec{a}_I (donde son válidas las leyes de Newton) y la aceleración con referencia a los ejes móviles \vec{a}_M . La relación entre ellas, para una rotación uniforme de los ejes con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (Spiegel, 1967), es:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_M + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (10)$$

donde el segundo y tercer término del lado derecho son llamados respectivamente la aceleración de Coriolis y la aceleración centripeta y $\vec{\omega} = N \hat{k}$. Reemplazando (10) en (9) obtenemos:

$$\vec{a}_M + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{Gm_1\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \quad (11)$$

donde \vec{v} y \vec{r} son los vectores velocidad y posición de m_3 con respecto al sistema de coordenadas móviles. Llamando x_1 la distancia existente entre el origen de coordenadas (el centro de masas) y la posición de m_1 , x_2 la distancia entre el origen y m_2 , es claro que la distancia a entre los cuerpos principales está dada por (ver figura 1) $a = x_2 - x_1$. Los vectores aceleración, velocidad y posición de m_3 con respecto al centro de masas en las coordenadas de los ejes móviles están dados por (prescindiendo del subíndice M para la aceleración:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k},$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k},$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

donde un punto sobre la cantidad expresa la derivación con respecto al tiempo; dos puntos indica doble derivación.

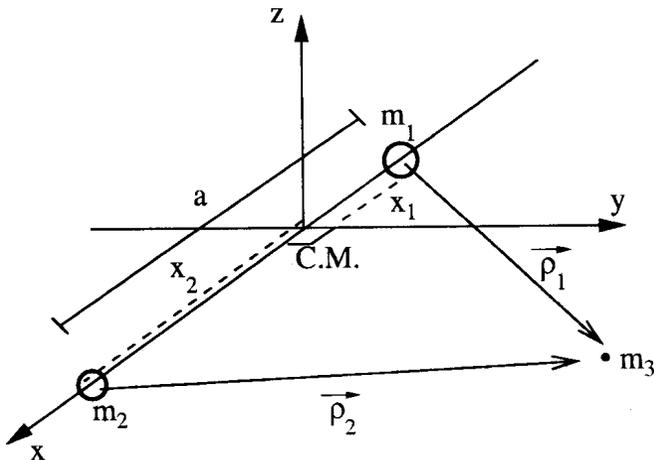


Figura 1: Posición en el espacio de las masas m_1 , m_2 y m_3 , ésta última de masa infinitesimal.

Las componentes de los vectores existentes entre m_3 y m_1 y m_2 son:

$$\vec{\rho}_1 = (x - x_1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k},$$

$$\vec{\rho}_2 = (x - x_2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

Puesto que

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = -N\dot{y}\hat{i} + N\dot{x}\hat{j},$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -N^2(x\hat{i} + y\hat{j}),$$

es fácil ver que la ecuación (10) en términos de sus componentes es:

$$\ddot{x} = 2N\dot{y} + N^2x - \frac{Gm_1(x - x_1)}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2(x - x_2)}{\rho_2^3},$$

$$\ddot{y} = -2N\dot{x} + N^2y - \frac{Gm_1y}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2y}{\rho_2^3},$$

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1z}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2z}{\rho_2^3}.$$

Introduciendo la función U definida por:

$$U = \frac{N^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{\rho_1} + \frac{Gm_2}{\rho_2}, \quad (12)$$

es fácil verificar que las anteriores ecuaciones adoptan la forma:

$$\ddot{x} = 2N\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\ddot{y} = -2N\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (13)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

A pesar de que estas ecuaciones admiten una constante de movimiento que da lugar al concepto de las superficies de Hill (ver McKuskey, 1963 para los detalles) dicho sistema no tiene una solución analítica cerrada. Sin embargo, este sistema de ecuaciones es nuestro punto de partida para ver si en principio podemos obtener una solución por series de Lie.

La solución

Llamando:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}, \quad (14)$$

el sistema de ecuaciones (13) puede escribirse como:

$$\frac{dx'}{dt} = 2Ny' + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt} = -2Nx' + \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) constituyen las seis ecuaciones diferenciales a integrar y son la versión particular del sistema genérico representado por (6). La solución está dada por la ecuación (8) en donde el operador de Lie (1) es:

$$D = \left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{dy}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{dx'}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x'} + \left(\frac{dy'}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial y'} + \left(\frac{dz'}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial z'} + \left(\frac{dt}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (16)$$

Llamaremos $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, (componentes cartesianas del vector posición y velocidad) a las condiciones iniciales de las variables para el tiempo inicial $t = 0$.

La solución para x es entonces:

$$x = [e^{tD}](x)_{x=x_0},$$

lo que explícitamente significa:

$$x = [1 + tD + \frac{t^2}{2!}D^2 + \frac{t^3}{3!}D^3 + \dots + \frac{t^n}{n!}D^n + \dots](x)_{x=x_0}.$$

Comenzamos calculando $D(x)$. Es claro, de la definición del operador D , que:

$$D(x) = \left(\frac{dx}{dt}\right) = \dot{x}$$

por lo que $D(x)_{x=x_0} = \dot{x}_0$.

El valor de $D^2(x)$ equivale a (ver ecuación (2)) $D^2(x) = D(D(x))$. Entonces:

$$\begin{aligned} D^2(x) &= D(\dot{x}) = D\left(\frac{dx}{dt}\right) = D(x') = \left(\frac{dx'}{dt}\right), \\ &= 2N\dot{y}' + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ &= 2N\dot{y} + N^2x - \frac{G(1-m)(x-x_1)}{\rho_1^3} - \frac{Gm(x-x_2)}{\rho_2^3}. \end{aligned}$$

Con el fin de facilitar la notación escribimos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= G(1-m)(x-x_1), & \sigma_2 &= Gm(x-x_2), \\ \tau_1 &= -1/\rho_1^3, & \tau_2 &= -1/\rho_2^3, \end{aligned} \quad (17)$$

de tal forma que:

$$D^2(x) = 2N\dot{y} + N^2x + \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2.$$

Así mismo podemos calcular $D^3(x)$:

$$\begin{aligned} D^3(x) &= D(D^2(x)) = D(2N\dot{y} + N^2x + \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2), \\ &= 2ND(\dot{y}) + N^2D(x) + D(\sigma_1\tau_1) + D(\sigma_2\tau_2), \end{aligned}$$

como también $D^4(x)$:

$$D^4(x) = 2ND^2(\dot{y}) + N^2D^2(x) + D^2(\sigma_1\tau_1) + D^2(\sigma_2\tau_2).$$

Generalizando, cualquier $D^n(x)$ tiene por expresión:

$$D^n(x) = 2ND^{n-2}(\dot{y}) + N^2D^{n-2}(x) + D^{n-2}(\sigma_1\tau_1) + D^{n-2}(\sigma_2\tau_2). \quad (18)$$

Siguiendo un procedimiento completamente análogo a lo anterior es fácil verificar que para las soluciones de

$$y = [e^{tD}](y)_{y=y_0}, \quad z = [e^{tD}](z)_{z=z_0},$$

los $D^n(y)$ y $D^n(z)$ tienen por expresiones generalizadas las siguientes:

$$D^n(y) = -2ND^{n-2}(\dot{x}) + N^2D^{n-2}(y) + D^{n-2}(\theta_1\tau_1) + D^{n-2}(\theta_2\tau_2), \quad (19)$$

$$D^n(z) = D^{n-2}(\phi_1\tau_1) + D^{n-2}(\phi_2\tau_2).$$

en donde:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= G(1-m)y, & \theta_2 &= Gmy, \\ \phi_1 &= G(1-m)z, & \phi_2 &= Gmz. \end{aligned}$$

Las soluciones para las componentes cartesianas de la velocidad están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [e^{tD}](\dot{x})_{\dot{x}=\dot{x}_0}, & \dot{y} &= [e^{tD}](\dot{y})_{\dot{y}=\dot{y}_0}, \\ \dot{z} &= [e^{tD}](\dot{z})_{\dot{z}=\dot{z}_0}, \end{aligned}$$

Un cálculo elemental permite verificar que:

$$\begin{aligned} D^n(\dot{x}) &= D^{n+1}x, & D^n(\dot{y}) &= D^{n+1}y \\ D^n(\dot{z}) &= D^{n+1}z. \end{aligned}$$

Esto último permite escribir (18) y (19) como:

$$D^n(x) = 2ND^{n-1}(y) + N^2D^{n-2}(x) + D^{n-2}(\sigma_1\tau_1) + D^{n-2}(\sigma_2\tau_2), \quad (20)$$

$$D^n(y) = -2ND^{n-1}(x) + N^2D^{n-2}(y) + D^{n-2}(\theta_1\tau_1) + D^{n-2}(\theta_2\tau_2). \quad (21)$$

El problema ahora consiste en encontrar expresiones recurrentes para $D^n(\sigma_i\tau_i)$, $D^n(\theta_i\tau_i)$ y $D^n(\phi_i\tau_i)$ ($i = 1$ ó 2). Sea Φ_i aquel término genérico que representa a σ_i , θ_i o ϕ_i . Entonces podemos escribir:

$$D^n(\Phi_i\tau_i) \text{ con } i = 1 \text{ ó } 2.$$

Entonces:

$$D(\Phi_i\tau_i) = \Phi_i D(\tau_i) + \tau_i D(\Phi_i),$$

de la cual se desprende que:

$$D^2(\Phi_i\tau_i) = \Phi_i D^2(\tau_i) + 2D(\tau_i)D(\Phi_i) + \tau_i D^2(\Phi_i),$$

Sucesivas aplicaciones del operador permiten ver que se puede escribir:

$$\begin{aligned} D^n(\Phi_i\tau_i) &= \binom{n}{0} D^n(\tau_i) D^0(\Phi_i) + \binom{n}{1} D^{n-1}(\tau_i) D^1(\Phi_i) + \\ &+ \binom{n}{2} D^{n-2}(\tau_i) D^2(\Phi_i) + \dots + \binom{n}{n} D^0(\tau_i) D^n(\Phi_i). \end{aligned}$$

o, lo que es mejor:

$$D^n(\Phi_i\tau_i) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^{n-j}(\tau_i) D^j(\Phi_i),$$

en donde se está utilizando $D^0(\Phi_i) = \Phi_i$ y $D^0(\tau_i) = \tau_i$ y:

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}.$$

A continuación se determinarán los $D^n(\Phi_i)$. Pongamos como caso particular $\Phi_i = \sigma_i$, para $i = 1, 2$. Por lo tanto:

$$D(\sigma_i) = D(\alpha_i(x - x_i)) = \alpha_i D(x) = \alpha_i x',$$

donde $\alpha_1 = G(1 - m)$ y $\alpha_2 = Gm$.

Una nueva aplicación del operador permite obtener:

$$D^2(\sigma_i) = D(\alpha_i x') = \alpha_i(2Ny' + N^2x + \tau_1\sigma_1 + \tau_2\sigma_2)$$

Generalizando obtenemos:

$$D^n(\sigma_i) = \alpha_i[2ND^{n-2}(y) + N^2D^{n-2}(x) + D^{n-2}(\tau_1\sigma_1) + D^{n-2}(\tau_2\sigma_2)].$$

De igual forma obtendremos:

$$D^n(\theta_i) = \alpha_i[-2ND^{n-2}(\dot{x}) + N^2D^{n-2}(y) + D^{n-2}(\tau_1\theta_1) + D^{n-2}(\tau_2\theta_2)],$$

y también

$$D^n(\phi_i) = \alpha_i[D^{n-2}(\tau_1\phi_1) + D^{n-2}(\tau_2\phi_2)].$$

Los $D^n(\tau_i)$ se calculan como sigue. Comenzamos por determinar $D(\tau_i)$:

$$D(\tau_i) = D(-1/\rho_i^3) = D(-\rho_i^{-3}) = 3\rho_i^{-4}D(\rho_i),$$

pero, puesto que:

$$D(\rho_i) = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \rho_i}{\partial z},$$

y como:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{\rho_i}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial y} = \frac{y}{\rho_i}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial z} = \frac{z}{\rho_i},$$

entonces:

$$D(\tau_i) = \frac{3}{\rho_i^5} \left[\frac{dx}{dt}(x - x_i) + \frac{dy}{dt}y + \frac{dz}{dt}z \right].$$

Es fácil verificar que:

$$D(\rho_i^2) = 2 \left[\frac{dx}{dt}(x - x_i) + \frac{dy}{dt}y + \frac{dz}{dt}z \right],$$

y como $\tau_i = D^0(\tau_i) = -1/\rho_i^3$, tenemos:

$$D(\tau_i) = -\frac{3}{2\rho_i^2} D^0(\tau_i) D(\rho_i^2).$$

Una nueva aplicación del operador D da, después de un poco de álgebra:

$$D^2(\tau_i) = -\frac{3D^0(\tau_i)D^2(\rho_i^2)}{2\rho_i^2} - \frac{5D(\tau_i)D(\rho_i^2)}{2\rho_i^2}.$$

Sucesivas aplicaciones del operador permiten obtener la expresión general:

$$D^n(\tau_i) = -\frac{1}{2\rho_i^2} \sum_{k=1}^n [p_{nk} D^{k-1}(\tau_i) D^{n-k+1}(\rho_i^2)] \quad (22)$$

A cada valor de n corresponde una serie de números enteros positivos representados por p_{nk} . Estos números cumplen las siguientes reglas:

$$p_{n1} = 3, \quad p_{nn} = p_{n1} + 2(n-1),$$

que corresponden al primero y al último de la secuencia para $n \geq 2$. Los números intermedios (que no corresponden al primero o al último) para cada secuencia de n están dados por (para $n \geq 3$):

$$p_{n(n-j)} = p_{(n-1)[n-(j+1)]} + p_{(n-1)(n-j)},$$

donde j va desde $j = 1$ hasta $j = n - 2$.

La secuencia de los p_{nk} va, entonces, de la siguiente manera:

$n = 1$	3						
$n = 2$	3	5					
$n = 3$	3	8	7				
$n = 4$	3	11	15	9			
$n = 5$	3	14	26	24	11		
$n = 6$	3	17	40	50	35	13	
$n = 7$	3	20	57	90	85	48	15
$n = 8$	3	23	77	147	175	133	17

y así sucesivamente.

Necesitamos, finalmente, los valores de $D^n(\rho_i^2)$. Puesto que $\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2$, se tendrá que:

$$D(\rho_i^2) = 2[xD(x) + yD(y) + zD(z) - x_i D(x)].$$

que puede escribirse como:

$$D(\rho_i^2) = 2[D^0(x)D(x) + D^0(y)D(y) + D^0(z)D(z) - x_i D(x)].$$

Una nueva aplicación del operador D permite obtener:

$$D^2(\rho_i^2) = 2[D(x)D(x) + D^0(x)D^2(x) + D(y)D(y) + D^0(y)D^2(y) + D(z)D(z) + D^0(z)D^2(z) - x_i D^2(x)]$$

Generalizando, se puede encontrar que:

$$D^n(\rho_i^2) = 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left[D^{n-k}(x)D^k(x) + D^{n-k}(y)D^k(y) + D^{n-k}(z)D^k(z) - x_i D^n(x) \right] \right\}$$

Notamos entonces que los $D^n(\rho_i^2)$ dependen de expresiones del tipo D^{n-k} que se han calculado previamente, por lo que la secuencia de cálculo se cierra y se puede entonces hallar expresiones de orden superior para $D^n(\xi)$.

Ensayos

Se elaboró un programa en Fortran consistente en una rutina computacional con base en las expresiones presentadas aquí. El programa parte de unas condiciones iniciales dadas en componentes cartesianas de posición y velocidad y determina estas componentes para un tiempo distinto t . Los resultados se han comparado con un integrador numérico diseñado para resolver ecuaciones diferenciales utilizadas en mecánica celeste (Everhart, 1985).

Se escogió como sistema de estudio a dos objetos con masas de 1 y 1/3 de masas solares separados por una distancia constante de 3.5237737 U.A. (1 U.A. = 1.4959787×10^{11} m). Las condiciones iniciales de la partícula de masa infinitesimal son:

$$\begin{aligned}x &= 0.7 \text{ U.A.} \\y &= -3.051677542 \text{ U.A.} \\z &= 0.2 \text{ U.A.} \\\dot{x} &= 0.0005 \text{ U.A./d} \\\dot{y} &= -0.0084512241 \text{ U.A./d} \\\dot{z} &= 0.00145241254 \text{ U.A./d}\end{aligned}$$

donde las unidades de velocidad son U.A. por día.

La figura 2 muestra la evolución temporal de la diferencia en valor absoluto entre el radio vector de la partícula infinitesimal calculado de dos formas: con series de Lie y la integración numérica.

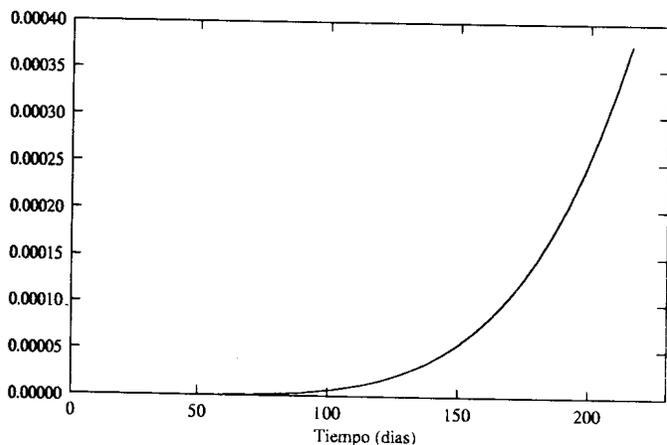


Figura 2: Diferencia en valor absoluto del radio vector calculado entre la solución por series de Lie y la integración numérica.

Es evidente el comportamiento exponencial de la diferencia, que de entrada indica que las series son divergentes para valores del tiempo $t \rightarrow \infty$. Esto revela que

la solución sólo es aplicable para valores de t próximos al instante inicial. En este caso en particular, la solución por series de Lie presenta apenas una diferencia inferior a 1×10^{-5} u.a. en los primeros 100 días posteriores al instante inicial, lo que puede considerarse hasta cierto punto razonable. Para valores pequeños de t , los términos $t^n/n!$ son muy pequeños comparados con los $D^n(\xi)_0$. Por esta razón, se requieren pocos valores n (los términos de la serie) para que las mismas converjan. A medida que t crece, es necesario incluir términos adicionales de las series (mayores valores de n) para lograr la convergencia. Sin embargo, independientemente de que se alcance la convergencia de los valores, se observa una rápida "degradación" de los resultados, en el sentido de que éstos se van apartando de los valores hallados con la integración numérica. Para nuestro sistema de estudio, al cabo de 250 días la diferencia de r alcanza los 1×10^{-2} u.a. Para 260 días, las series ya divergen.

Por otro lado, se ubicó la partícula en uno de los puntos de Lagrange. Se escogió el L4:

$$\begin{aligned}x &= 0.880943425 \text{ U.A.} \\y &= 3.051677542 \text{ U.A.} \\z &= 0 \text{ U.A.} \\\dot{x} &= 0 \text{ U.A./d} \\\dot{y} &= 0 \text{ U.A./d} \\\dot{z} &= 0 \text{ U.A./d}\end{aligned}$$

En tal caso se obtiene que $D^1(x) = D^1(y) = D^1(z) = 0$. La integración por series de Lie permite ver que en efecto la partícula permanece ubicada en el punto en cuestión, incluso para valores de tiempo elevados. La serie converge para valores muy pequeños de n . Esto no debe sorprender, pues los términos recurrentes son de la forma $D^n(\xi)$ que a su vez dependen de $D^1(\xi)$. Pero se observa que ya para 8000 días las series divergen.

Se realizaron pruebas con otro sistema. Se escogió uno conformado por dos objetos masivos con masas de 1 y 1/3 de masas de la Tierra separadas por una distancia constante de 20 radios terrestres (1 R.T. = 6378.14 km). Las condiciones iniciales de la partícula de masa infinitesimal son:

$$\begin{aligned}x &= 10.00750758 \text{ R.T.} \\y &= 0.2702625605 \text{ R.T.} \\z &= 0.1831450212 \text{ R.T.} \\\dot{x} &= 2.08594431 \text{ R.T./d} \\\dot{y} &= 20.3428317 \text{ R.T./d} \\\dot{z} &= 1.76124037 \text{ R.T./d}\end{aligned}$$

donde las unidades de velocidad son R.T. por día.

Los resultados son análogos a los anteriores. Para valores pequeños de t (≈ 0.0001 día) los resultados son excelentes, pero, a medida que crece el tiempo, los resultados se van

degradando y llega un momento en el que las series divergen. En este caso ello ocurre en $t = 0.22$ días.

Conclusión

Las series de Lie, aplicadas al sistema de ecuaciones diferenciales aquí descrito, permiten, mediante una secuencia de operaciones algebraicas, llegar a expresiones relativamente sencillas de obtener por un procedimiento mecánico, aun para órdenes elevados. Es evidente que sólo mediante un programa de computación se puede hacer debido uso de estas expresiones recurrentes. Sin embargo, su utilidad está restringida a valores pequeños del tiempo. Qué tanto de tiempo, depende de las condiciones iniciales. Sin embargo, las series divergen tarde o temprano para valores de t cada vez más crecientes. La rápida degradación de los resultados en función de tiempos cada vez más crecientes puede explicar que Delva (1985) haya adoptado como variable independiente no al tiempo sino a la anomalía verdadera de uno de los cuerpos masivos con relación al otro.

A pesar de esto, la solución presentada aquí puede aplicarse sin pérdida razonable de exactitud en aquellos sistemas en los que la partícula sin masa está muy cerca de los puntos de Lagrange. El programa permitiría observar la estabilidad e inestabilidad de la posición en dichos sitios dentro de intervalos de tiempo limitados.

Agradecimientos

El autor desea expresar sus sinceros agradecimientos al profesor Eduardo Brieva por la atenta lectura del manuscrito que le permitió realizar significativas y útiles recomendaciones.

El presente trabajo se inscribe dentro del proyecto de investigación No. 803580 de la División de Investigación, Universidad Nacional de Colombia.

Bibliografía

- Delva, M. 1984. Integration of the Elliptic Restricted Three-Body Problem with Lie-Series. *Cel. Mech.* **34**: 145-154.
- Delva, M. 1985. A Lie Integrator Program and Test for the Elliptic Restricted Three Body Problem. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **60**: 277-284.
- Deprit, A. 1968. Canonical Transformations Depending of a Small Parameter. *Cel. Mech.* **1**: 12-30.
- Everhart, E. 1985. An Efficient Integrator that Uses Gauss-Radau Spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Carusi & Valsecchi (edi.): 185-202.
- Gröbner, W. 1960. *Die Lie-Reihen und ihre Anwendunge*, Springer-Verlag, Berlin.
- Hansmeier, A., Dvorak, R. 1984. Numerical Integration with Lie-series. *Astron. Astrophys.* **132**: 203-207.
- Hori, G. 1966. Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. *Publications of the Astronomical Society, Japan.* **18**: 287-296.
- Parv, B. 1993. Lie Series and Computer Algebra Treatment of the n-Body Problem. *Romanian Astronomical Journal*, **3**, No. 2.
- McCuskey, S. W. 1963. *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts).
- Portilla J.G. 2001. *Elementos de astronomía de posición*, Unibiblos, Bogotá.
- Spiegel, M. 1967. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, Schaum Pub. Co., New York
- Stumpff, K. 1968. On the Application of Lie-Series to the Problems of Celestial Mechanics. NASA TN D 4460.