CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO ELÍPTICO*

por

Jorge Cossio†

Resumen

Jorge Cossio: Contribución al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 135–145, 2004. ISSN 0370-3908.

En este artículo se presentan los resultados más importantes de mi trabajo de investigación en el estudio de la existencia y de las propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la forma

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda\, f(u) & = 0 \qquad \text{en } \Omega \\ \qquad\quad u & = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\lambda \in \mathbf{R}$, Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^N$ con frontera suave, $\Delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$ es el operador de Laplace y $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función no lineal. Se presentan teoremas obtenidos utilizando teoría de bifurcación, métodos variacionales y un principio de minimax desarrollado por el autor en colaboración con A. Castro y J. M. Neuberger ([Cas-Cos-Nu1], 1997). Además, se incluyen algunos algoritmos para construir y visualizar soluciones a problemas no lineales del tipo (1) y una serie de preguntas abiertas.

Palabras clave: Ecuaciones elípticas semilineales, teoría de bifurcación, métodos variacionales, construcción de soluciones.

Abstract

In this paper I present the most important results of my research studying the solutions of nonlinear partial differential equations of the type

*2000 Mathematics Subject Classification: 35B30, 35B32, 35J20, 35J25, 35J60, 35J65, 47H12, 47H15, 65D07, 65N99. Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por Colciencias, Proyecto Código 1118-05-11412.

†Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 3840, Medellín, Colombia. email: jcossio@unalmed.edu.co

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda\, f(u) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\lambda \in \mathbf{R}$, Ω is a smooth bounded domain in $\mathbf{R}^N$, $\Delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$ is the Laplacian operator, and $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a nonlinear function. Our theorems were obtained by using bifurcation theory, variational methods, and a minmax principle developed by the author in collaboration with A. Castro and J. M. Neuberger ([Cas-Cos-Nu1], 1997). We also present some theorems related with algorithms for approximating solutions to nonlinear problems of type (1), and some open questions.

Key words: Semilinear elliptic equations, bifurcation theory, variational methods, construction of solutions.

1. Introducción

El interés de la comunidad científica en el análisis no lineal ha ido creciendo significativamente en las últimas décadas. Prácticamente todos los centros de investigación en Matemáticas en el mundo dedican un esfuerzo sustancial al entendimiento de los problemas no lineales.

El desarrollo del análisis no lineal ha permitido no solamente el tratamiento unificado de varios problemas clásicos en Física y en Matemáticas sino también el surgimiento de nuevas teorías no lineales de gran importancia por sí mismas y por sus aplicaciones.

Una de las herramientas más importantes usadas en análisis no lineal es la ***teoría de bifurcación***. Bifurcación significa cambios en la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación funcional cuando los parámetros que intervienen en la ecuación varían.

Antes de discutir algunos aspectos matemáticos de la teoría de bifurcación, describiremos uno de los ejemplos físicos más familiares de bifurcación: el Problema de Taylor de un fluido en rotación.

En éste consideramos un fluido viscoso incompresible que yace entre un par de cilindros concéntricos verticales que rotan. Suponemos que el cilindro exterior está en reposo y que el cilindro interior rota a una velocidad angular w. El movimiento del fluido se describe por las ecuaciones de Navier-Stokes y éstas tienen una solución explícita. El flujo así obtenido se denomina el flujo de Couette, que existe para todos los valores de w. Si w es pequeña, las partículas se mueven en orbitas circulares y la velocidad depende de la distancia al cilindro interior. Si se excede un cierto valor de w, nuevos movimientos se superponen sobre el flujo de Couette y aparecen los denominados vórtices de Taylor. Para este valor de w ocurre bifurcación.

Para más detalles, el lector interesado puede consultar [Ke-An], 1969.

La teoría de bifurcación, que será discutida en la Sección 2, estudia la existencia de soluciones locales y globales para ecuaciones no lineales de la forma

$$F(\lambda, u_\lambda) = 0, \tag{2}$$

donde $\lambda \in \mathbf{R}$, F es una función no lineal y u_λ pertenece a un cierto espacio de funciones. Los pilares fundamentales de la teoría de bifurcación aparecen inicialmente en los trabajos de Lyapunov y Schmidt, alrededor de 1908, basados en los problemas propuestos por Poincaré en 1885 en conexión con astrofísica. Los aportes de Krasnoselskii y su escuela, alrededor de 1950, permiten la consolidación de la teoría. Pero han sido los trabajos de M. Crandall y P. Rabinowitz ([Cr-Ra], 1971), en lo concerniente a la existencia de ramas locales de soluciones, y de P. Rabinowitz ([Ra1], 1971), en lo relacionado con la existencia de ramas globales de soluciones, los que han permitido su gran desarrollo. La teoría de bifurcación ha sido muy útil en el estudio de una amplia variedad de problemas no lineales tanto en ecuaciones diferenciales, entre los que destacamos varios problemas clásicos como el problema de Bénard, el problema de las ondas de agua y el problema de los tres cuerpos restringido, como en Física y en Ingeniería, en problemas de elasticidad, convexión térmica y fluidos en rotación ([Ra2], 1985, y [Am-Pro], 1993).

En relación con la teoría de bifurcación, el autor y A. Castro encontraron, en un trabajo publicado en 1993 ([Cas-Cos1]), una condición suficiente que garantiza la existencia de ramas locales de soluciones para ecuaciones del tipo (1) y mostraron aplicaciones a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales y a la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones elípticas no lineales de segundo orden. Posteriormente, el autor, en un trabajo publicado en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales ([Cos], 1995), en el cual utiliza de manera esencial los resultados de la teoría de bifurcación debidos a Crandall y Rabinowitz ([Cr-Ra], 1971, y [Ra1], 1971), demostró la existencia de múltiples soluciones para el problema no lineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) &= 0 \qquad \text{en } \ \Omega \\ \qquad\quad u &= 0 \qquad \text{en } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

con ciertas condiciones sobre la no linealidad f.

También, usando los resultados de Crandall y Rabinowitz, el autor y A. Castro, en un artículo publicado en 1993 en la Revista Colombiana de Matemáticas ([Cas-Cos2]), demostraron la existencia de múltiples soluciones radiales para el problema (3) en el caso en que el dominio Ω es simétrico.

Antes de describir otras herramientas importantes usadas en el estudio de problemas no lineales, quisiera mencionar que el problema de Dirichlet no lineal (3) modela una gran variedad de problemas que aparecen naturalmente en diferentes áreas de la física, la astrofísica, la ingeniería, la biología y la geometría. Menciono a continuación algunos modelos en astrofísica en los que aparecen distintos tipos de no linealidades. Por ejemplo, en la ecuación de Lane-Emden, que aparece en el estudio de problemas estelares ([Ch], 1939), la no linealidad es del tipo potencia,

$$\begin{cases} \Delta u + u^p &= 0 \qquad u > 0 \quad \text{en } \ \Omega, \ p > 1, \\ \qquad\quad u &= 0 \qquad \text{en } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

donde u^p es proporcional a la densidad de la estrella gaseosa y el dominio Ω es $B_R(0)$, la bola abierta en $\mathbf{R}^3$ de radio R y centro en el origen. Henon en 1973 ([He]), estudiando las estructuras estelares en rotación, propuso la siguiente no linealidad, que es una variante del problema (4)

$$\begin{cases} \Delta u + |x|^l \, u^p &= 0 \quad u > 0 \text{ en } \Omega, \ p > 1, \ l > 0, \\ \qquad\qquad u &= 0 \quad \text{en } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Para la escogencia de esta no linealidad, Henon comentó: "Esta escogencia, aunque arbitraria, tiene la ventaja de ser simple y conveniente". Posteriormente, Lieb y Yau en 1987 ([Li-Ya]), estudiando la teoría de colapsos estelares de Chandrasekhar, demostraron que la ecuación para el problema de las estrellas enanas blancas, sin efecto general relativístico, es equivalente a la ecuación

$$\Delta u + 4\pi(2u + u^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \text{en } B_R(0). \tag{6}$$

En los problemas (4), (5) y (6) aparece la pregunta de si existe o no solución u para la ecuación semilineal en estudio; y, de existir solución, si ésta es única o si existen múltiples soluciones.

En la Sección 3 de este trabajo presentamos otra herramienta muy importante usada en análisis no lineal: los ***métodos variacionales***. Las ideas topológicas iniciales de estos métodos fueron vislumbradas por Poincaré y Birkhoff a finales del siglo XIX y fueron desarrolladas posteriormente, en los años 20 y 30 del siglo pasado, por Morse ([Mors1], 1925, y [Mors2], 1934) y Ljusternik y Schnirelman ([Lj-Sc], 1934). Con esta técnica las soluciones de los problemas no lineales se consiguen como los puntos críticos de un funcional asociado con la ecuación en estudio. En el caso en que el funcional sea acotado inferior o superiormente es razonable tratar de demostrar que el funcional alcanza su mínimo o su máximo, pero si el funcional asociado no es acotado ni superior ni inferiormente se deben buscar puntos de silla o puntos de tipo minimax. Un método específico para encontrar puntos críticos de tipo minimax, que será presentado en la Sección 3, es el bien conocido *Teorema del Paso de la Montaña*, publicado por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz en 1973 ([Am-Ra]), del cual se han conseguido extensiones y variaciones en años recientes que han demostrado ser muy útiles en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

Otro resultado importante para encontrar puntos críticos, que se presentará en la Sección 3, es el *método de reducción de Lyapunov-Schmidt*, el cual tuvo sus orígenes en las investigaciones de los profesores Lazer, Landesman y Meyers ([Lan-Laz-Me], 1975) y Castro y Lazer ([Cas-Laz2], 1979) y que permite reducir el estudio de los puntos críticos del funcional asociado, el cual está generalmente definido en un espacio de dimensión infinita, al estudio de los puntos críticos de un funcional definido en un subespacio, generalmente, de dimensión finita. Además de los dos métodos mencionados, se presentará en la Sección 3 *un principio de minimax* desarrollado por el autor en colaboración con los investigadores A. Castro y J. M. Neuberger ([Cas-Cos-Nu1], 1997), que permite obtener *soluciones que cambian de signo* para problemas superlineales.

Utilizando el Teorema del Paso de la Montaña, el método de reducción de Lyapunov-Schmidt y el principio de minimax mencionado se presentarán al final de la Sección 3 distintas aplicaciones al estudio de la solución de ecuaciones diferenciales no lineales del tipo (3), las cuales han sido obtenidas por el autor en colaboración con otros investigadores en el área ([Cas-Cos3], 1994, y [Cas-Cos-Nu3], 1998).

En la Sección 4 enfocaremos nuestra atención en la presentación de algunos ***algoritmos para construir y visualizar soluciones de problemas no lineales*** del tipo (3). Estos algoritmos son importantes ya que los teoremas que garantizan la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales son, en general, no constructivos y, además, ejemplos explícitos que apoyen o nieguen conjeturas y que sugieran direcciones para estudios futuros son siempre bienvenidos. Inicialmente se discute un método diseñado por el autor y el profesor H. Arango para construir soluciones radiales al problema (3) en el caso en el cual el dominio es una bola en $\mathbf{R}^N$ y f es una función continua lineal por tramos ([Ar-Cos1], 1996, y [Ar-Cos2], 2000). El método está basado en un spline de funciones de Bessel. Concluiremos la sección con la presentación de un nuevo algoritmo para construir y visualizar las soluciones al problema (3) que se consiguen vía el método de reducción de Lyapunov-Schmidt ([Cos-Le-Nu], 2001).

Las ideas de investigación desarrolladas por el autor en colaboración con otros investigadores en el área, que serán presentadas en las distintas secciones de este trabajo, nos conducen a formular en la Sección 5 una serie de ***preguntas abiertas***, que esperamos contribuyan a una mejor comprensión de las soluciones de problemas de Dirichlet no lineales.

2. Teoría de bifurcación y aplicaciones

El Teorema de Punto Fijo de Banach establece que en un espacio métrico completo (X, d), una función $f : X \to X$ para la cual existe una constante $k \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

tiene un único punto fijo; es decir, existe un único punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Una consecuencia importante de este resultado es el Teorema de la Función Inversa que establece que si una función F envía una vecindad U de $u_0 \in X$ en Y, donde X y Y son espacios de Banach, y $F \in C^1(U)$ con $L = F'(u_0)$ uno a uno y sobreyectiva entonces la ecuación

$$F(u) = f$$

tiene una solución única en una vecindad de u_0, para toda f en una cierta vecindad de $f_0 = F(u_0)$.

Originado en los trabajos de A. M. Lyapunov y E. Schmidt a comienzos del siglo XX y relacionado con los problemas propuestos por H. Poincaré en 1885 en conexión con astrofísica, se inició el programa de extender los resultados anteriores cuando $F'(u_0)$ no es invertible. Este programa dio lugar a lo que hoy conocemos como *teoría de bifurcación.*

La situación típica en bifurcación está relacionada con una familia de un parámetro $F(\lambda, u)$, con $\lambda \in \mathbf{R}$ y $F \in C(\mathbf{R} \times X, Y)$, donde X y Y son espacios de Banach. Se supone que

$$F(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Se dice que un punto $(\lambda, 0)$ es un punto de bifurcación de $F(\lambda, u) = 0$ si toda vecindad de él contiene soluciones no triviales de la ecuación.

Bajo hipótesis simples, M. Crandall y P. Rabinowitz demostraron el siguiente teorema que garantiza la existencia de una *rama local* de soluciones no triviales de la ecuación

$$F(\lambda, u) = 0. \tag{8}$$

Teorema 1. ([Cr-Ra], 1971) *Sean X, Y espacios de Banach, Λ un conjunto abierto en $\mathbf{R}$ y $F \in C^m(\Lambda \times X, Y)$, $m \geq 2$. Suponga que*

$$\begin{aligned} F(\lambda, u) &= Bu - \lambda u + N(\lambda, u) \\ N(\lambda, 0) &= 0, \quad D_u N(\lambda, 0) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

donde $B : X \to Y$ es un operador lineal y acotado. Si λ_0 es un valor propio simple de B con vector propio $v_0 \neq 0$, entonces $(\lambda_0, 0)$ es un punto de bifurcación de $F(\lambda, u) = 0$. Además, existen funciones de clase C^{m-1}

$$\begin{aligned} \lambda^*(s) &= \lambda_0 + O(|s|) \\ u^*(s) &= sv_0 + O(s^2) \end{aligned} \tag{10}$$

para s cerca de cero, tales que

$$F(\lambda^*(s), u^*(s)) = 0. \tag{11}$$

Todos los ceros de F cerca de $(\lambda_0, 0)$ son las soluciones triviales $u = 0$ o están dados por (10).

El resultado más importante relacionado con la existencia de *ramas globales* de soluciones, es decir cuando λ varía sobre $\mathbf{R}$, fue obtenido por P. Rabinowitz aplicando la teoría de grado de Leray-Schauder. Este resultado, que se presenta a continuación, establece que bajo ciertas condiciones de compacidad cada rama de soluciones se extiende al infinito en $\mathbf{R} \times X$ o se va a otro punto de bifurcación.

Teorema 2. ([Ra2], 1971) *Suponga que $F(\lambda, u) = u - G(\lambda, u)$ con $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times X$, X un espacio de Banach y G compacto. Si $G(\lambda, u) = \lambda Lu + H(\lambda, u)$, donde L es lineal y compacto, $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ cuando $u \to 0$ y $\mu \in r(L) := \{\mu \in \mathbf{R}/\mu^{-1} \in \sigma(L)$ -el espectro de L-$\}$ es de multiplicidad impar entonces $(\mu, 0)$ es un punto de bifurcación. Además S, la clausura del conjunto de* *ceros no triviales de F, tiene una componente de soluciones C que contiene a $(\mu, 0)$ y no es acotada en $\mathbf{R} \times X$ o contiene $(\hat{\mu}, 0)$, donde $\mu \neq \hat{\mu} \in r(L)$.*

En colaboración con A. Castro ([Cas-Cos1], 1993), dimos una condición suficiente para que un punto (λ, u) fuera un punto de bifurcación local de la ecuación (8), cuando ésta toma la forma

$$F(\lambda, u) := Lu + \lambda N(u) = 0, \tag{12}$$

donde L es un operador lineal definido en un espacio de Hilbert H, L tiene inversa compacta y $N : H \to H$ es de clase C^2 con $(L^{-1}N)'(0) = L^{-1}$ y $N(0) = 0$.

Sea $-\Lambda \neq 0$ un valor propio de L tal que

$$H = Ker(L + \Lambda I) \oplus Rango(L + \Lambda I) =: X \oplus Y.$$

Sean $K \subset X$ un cono cerrado tal que $K \neq X$ y P la proyección sobre X. Se demostró el siguiente teorema.

Teorema 3. ([Cas-Cos1], 1993) *Si para algún $r_1 > 0$*

$$P(N - I)(\{u \in H : |u| \leq r_1\}) \subset K \tag{13}$$

entonces $(\Lambda, 0)$ es un punto de bifurcación de la ecuación (12). Además, para $r > 0$ suficientemente pequeño y $K \cap (-K) = \{0\}$ la ecuación (12) tiene dos soluciones diferentes (α, u), (β, v) con $\|Pu\| = \|Pv\| = r$, $|\alpha - \Lambda| < r$ and $|\beta - \Lambda| < r$.

A diferencia de los resultados clásicos, nuestro resultado no depende ni de la multiplicidad del valor propio Λ ni de la estructura variacional de la ecuación donde el teorema se aplica. Este resultado tiene aplicaciones a la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales y a la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones elípticas no lineales de segundo orden.

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ la sucesión de valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera.

En un trabajo publicado en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, en el cual se utilizan de manera esencial los resultados de M. Crandall y P. Rabinowitz (veánse los Teoremas 1 y 2), estudié el problema (3) y demostré que tiene al menos cuatro soluciones cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios.

Teorema 4. ([Cos], 1995) *Si $0 < f'(0) < \lambda_1$, $\lambda_2 < f'(\infty)$, λ_2 es un valor propio de multiplicidad impar y $f'(\infty) < \lambda_j$ (donde λ_j es el siguiente valor propio distinto de λ_2) entonces el problema (3) tiene al menos cuatro soluciones.*

A diferencia del Teorema A de [Cas-Cos3], publicado en 1994, este resultado no depende del acotamiento global de la derivada de la función no lineal y se demuestra utilizando solamente técnicas de teoría de bifurcación.

También, haciendo uso del teorema de bifurcación global de P. Rabinowitz, en un trabajo en colaboración con A. Castro publicado en la Revista Colombiana de Matemáticas, demostramos que el problema (3) tiene $4j-1$ soluciones radiales (i.e. $u(x) = u(\|x\|)$) cuando Ω es una bola, la no linealidad tiene un cero positivo y el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los primeros j valores propios.

Teorema 5. ([Cas-Cos2], 1993) *Si f tiene un cero positivo y $f'(0) = f'(\infty) > \lambda_j$ entonces (3) tiene al menos $4j - 1$ soluciones radiales.*

En ese mismo artículo se presenta una demostración más simple del siguiente resultado obtenido anteriormente por M. Esteban.

Teorema 6. ([Es], 1985) *Si $0 < f'(0) < \lambda_{j+1}$ y $\lambda_{j+k} < f'(\infty)$ entonces (3) tiene al menos $2k + 1$ soluciones radiales.*

Los Teoremas 5 y 6 se demuestran obteniendo una descripción de la gráfica del conjunto de soluciones del problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) & = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \qquad\quad u & = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14}$$

donde $\lambda \in \mathbf{R}$.

3. Principios de minimax y aplicaciones

Otra herramienta muy importante en análisis no lineal la constituyó la introducción de métodos topológicos en el estudio de problemas variacionales; es decir, problemas en los cuales las soluciones se consiguen como puntos críticos de un funcional.

Las ideas topológicas iniciales de estos métodos fueron vislumbradas por Poincaré y Birkhoff a finales del siglo XIX y fueron desarrolladas posteriormente, en los años 20 y 30 del siglo pasado, por Morse ([Mors1], 1925, y [Mors2], 1934) y Ljusternik y Schnirelman ([Lj-Sc], 1934). En particular, Ljusternik y Schnirelman, en el caso de problemas variacionales en variedades de dimensión finita, dieron una cota inferior para el número de puntos críticos en términos de un invariante topológico llamado la categoría de Ljusternik y Schnirelman. La teoría de Morse para funciones Φ no degeneradas dio una clasificación más fina de los puntos críticos en términos de las formas cuadráticas asociadas con la segunda derivada $\Phi''(u_0)$. En la década del 60 del siglo pasado, las ideas de la teoría de Morse fueron puestas en el contexto de la Geometría Diferencial en variedades de dimensión infinita por R. Palais y S. Smale ([Pa-Sm], 1964) quienes reemplazaron la hipótesis de dimensión finita de la teoría original por una hipótesis de compacidad sobre el funcional.

Como se mencionó anteriormente, con los métodos variacionales las soluciones de los problemas no lineales se consiguen como los puntos críticos de un funcional asociado con el problema en estudio. En el caso en que el funcional sea acotado inferior o superiormente es razonable tratar de demostrar que el funcional alcanza su mínimo o su máximo. Para funciones convexas un resultado clásico en esta dirección es el siguiente.

Teorema 7. *Sean X un espacio de Banach reflexivo y Φ una función semicontinua inferiormente definida en X. Si Φ es convexa, acotada inferiormente y $\Phi(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ entonces Φ alcanza su mínimo.*

Si Φ no es convexa entonces Φ no necesariamente alcanza su mínimo. Sin embargo el siguiente resultado de I. Ekeland demuestra la existencia de puntos que son casi puntos de mínimo.

Teorema 8. ([Ek], 1974) *Sean X un espacio métrico completo y $\Phi : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in X$ tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon, \tag{15}$$

y

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + d(u, u_\epsilon), \quad \forall u \in X,\, u \neq u_\epsilon. \tag{16}$$

Una condición de compacidad para funciones C^1, que es utilizada en la demostración de la existencia de puntos críticos es la llamada condición de Palais-Smale (P-S), que establece que si una sucesión $(u_n) \in X$ es tal que $|\Phi(u_n)| < M$ y $\Phi'(u_n) \to 0$ entonces (u_n) tiene una subsucesión convergente. Tales funciones siempre alcanzan su ínfimo.

Teorema 9. *Si Φ es una función de clase C^1 definida en un espacio de Banach, satisface (P-S) y es acotada inferiormente entonces Φ alcanza su mínimo.*

Si el funcional asociado con el problema no lineal no es acotado ni superior ni inferiormente se deben buscar puntos de silla, los cuales se encuentran usando argumentos de tipo minimax. En éstos se comienza considerando una cierta clase A de conjuntos Σ en un cierto espacio topológico, luego se construye

$$\max_{u\in\Sigma} \Phi(u)$$

para cualquier $\Sigma \in A$, y finalmente se forma

$$c = \inf_{\Sigma\in A} \max_{u\in\Sigma} \Phi(u)$$

y se trata de demostrar que el número c es un punto crítico de Φ.

Un método específico muy útil para encontrar puntos de tipo minimax, que extiende las ideas de Poincaré y Birkhoff, es el conocido *Teorema del Paso de la Montaña*, publicado por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz y que se presenta a continuación.

Teorema 10. ([Am-Ra], 1973) *Si Φ es una función de clase C^1 definida en un espacio de Banach X, satisface (P-S) y la siguiente condición geométrica*

$$\begin{cases} \Phi(0) & = 0,\, \Phi(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in X \,\textit{con}\, \|x\| = R \quad \textit{y} \\ \Phi(x_0) & \leq 0,\ \textit{para algún}\, x_0 \in X \,\textit{con}\, x_0 > R, \end{cases} \tag{17}$$

entonces el siguiente número es un valor crítico de Φ,

$$c = \min_{g\in P} \max_{0\leq t\leq 1} \Phi(g(t)) \geq \alpha,$$

donde $P = \{g \in C([0,1], X)/g(0) = 0, g(1) = x_0\}$. Es decir, existe $u \in X$ tal que

$$\Phi'(u) = 0 \qquad y \qquad \Phi(u) = c.$$

En años recientes se han conseguido extensiones y variaciones de este teorema que han demostrado ser muy útiles en las aplicaciones a ecuaciones diferenciales.

Otra técnica muy importante en análisis no lineal es el llamado *método de reducción de Lyapunov-Schmidt*, el cual permite reducir el estudio de los puntos críticos de un funcional Φ definido en un espacio de Hilbert H de dimensión infinita al estudio de los puntos críticos de un funcional $\hat{\Phi}$ definido en un subespacio cerrado de H, generalmente, de dimensión finita. El método de reducción, que presentamos a continuación, tuvo sus orígenes en las investigaciones de Lazer, Landesman y Meyers ([Lan-Laz-Me], 1975) y Castro y Lazer ([Cas-Laz2], 1979).

Teorema 11. ([Cas1], 1981) *Sea H un espacio de Hilbert real y sean X y Y subespacios cerrados de H tales que $H = X \oplus Y$. Sea $\Phi : H \to \mathbf{R}$ un funcional de clase C^1. Si existen $m > 0$ y $\alpha > 1$ tales que*

$$\langle \nabla\Phi(x+y) - \nabla\Phi(x+y_1), y - y_1\rangle \geq m\|y - y_1\|^\alpha,$$

$\forall x \in X$, $\forall y$, $y_1 \in Y$, entonces

(i) *Existe una función continua $\psi : X \to Y$ tal que*

$$\Phi(x + \psi(x)) = \min_{y \in Y} \Phi(x + y).$$

Además, $\psi(x)$ es el único elemento de Y tal que

$$\langle \nabla\Phi(x + \psi(x)), y\rangle = 0, \qquad \forall y \in Y.$$

(ii) *La función $\hat{\Phi} : X \to \mathbf{R}$ definida por $\hat{\Phi}(x) = \Phi(x + \psi(x))$ es de clase C^1 y*

$$\langle \nabla\hat{\Phi}(x), x_1\rangle = \langle \nabla\Phi(x + \psi(x)), x_1\rangle, \qquad \forall x,\, x_1 \in X.$$

(iii) *$x \in X$ es un punto crítico de $\hat{\Phi}$ si y sólo si $x + \psi(x)$ es un punto crítico de Φ.*

Utilizando el Teorema del Paso de la Montaña, el método de reducción de Lyapunov-Schmidt y la teoría de grado de Leray-Schauder, en un trabajo en colaboración con A. Castro, demostramos que el problema (3) tiene al menos cuatro soluciones no triviales, dos de las cuales son de un signo y las otras dos cambian de signo, cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los dos primeros valores propios.

Teorema 12. ([Cas-Cos3], 1994) *Si $f'(0) < \lambda_1$, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con $k \geq 2$, y $f'(t) \leq \gamma < \lambda_{k+1}$, entonces (3) tiene al menos cuatro soluciones no triviales. Además, uno de los siguientes casos ocurre:*

a) *k es par y (3) tiene dos soluciones que cambian de signo.*

b) *k es par y (3) tiene cinco soluciones, tres de las cuales tienen el mismo signo.*

c) *k es impar y (3) tiene dos soluciones que cambian de signo.*

d) *k es impar y (3) tiene tres soluciones del mismo signo.*

En [Cos-Ve], con la colaboración de C. Vélez, sin considerar la hipótesis del acotamiento global de la derivada de la no linealidad del Teorema 12 y con la restricción k par, demostramos que el problema (3) tiene por lo menos tres soluciones no triviales. La prueba utiliza argumentos del tipo de paso de la montaña y teoría de grado.

Teorema 13. ([Cos-Ve], 2003) *Si $f'(0) < \lambda_1$, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con k un entero par, $k \geq 2$, entonces (3) tiene por lo menos tres soluciones no triviales, una es positiva, otra es negativa y la tercera cambia de signo.*

En colaboración con S. Herrón, usando el Teorema del Paso de la Montaña, el Teorema de Punto de Silla de P. Rabinowitz ([Ra3], 1986) y argumentos del índice de Morse desarrollados por A. Lazer y S. Solimini ([Laz-Sol], 1988) demostramos la existencia de por lo menos tres soluciones para el problema (3) sin la restricción sobre k del Teorema 13.

Teorema 14. ([Cos-He], 2003) *Si $f'(0) < \lambda_1$, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con $k \geq 2$, y todos los puntos críticos del funcional J* (véase su definición en (*), abajo) *son no degenerados entonces (3) tiene por lo menos tres soluciones no triviales: $u_1 > 0$ en Ω, $u_2 < 0$ en Ω y u_3. Las soluciones de un signo tienen índice de Morse menor o igual a 1 y u_3 tiene índice de Morse mayor o igual a 2.*

En un artículo publicado en 1997, escrito en colaboración con los profesores J. M. Neuberger y A. Castro, demostramos **un principio de minimax** que nos permitió establecer condiciones suficientes que garantizan la existencia de soluciones que *cambian de signo exactamente una vez* para problemas de Dirichlet del tipo (3), cuando f es superlineal; es decir,

$$f'(\infty) := \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$$

y subcrítica; es decir,

$$|f(s)| \leq c_1|s|^p + c_2, \quad \text{con} \quad 1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}.$$

Teorema 15. ([Cas-Cos-Nu1], 1997) *Si $f'(0) < \lambda_1$ entonces (3) tiene al menos tres soluciones no triviales: $\omega_1 > 0$ en Ω, $\omega_2 < 0$ en Ω y ω_3. La función ω_3 cambia de signo exactamente una vez en Ω, es decir, $(\omega_3)^{-1}(\mathbf{R} - \{0\})$ tiene exactamente dos componentes conexas. Si son no degeneradas, las soluciones de un signo tienen índice de Morse* 1 *y la solución que cambia de signo tiene índice de Morse* 2. *Además,*

$$J(\omega_3) \geq J(\omega_1) + J(\omega_2),$$

donde

$$J(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u))dx, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (*)$$

y

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

Hasta donde sabemos, este resultado es el primero en establecer la existencia de una solución del problema (3) que *cambia de signo exactamente una vez*. Desarrollos como los obtenidos por Z. Q. Wang ([Wa], 1991) no implican la existencia de soluciones que cambien de signo, mucho menos que cambien de signo exactamente una vez. También, nuestras pruebas mejoran la información acerca del valor del funcional J en los puntos críticos y del índice de Morse de las soluciones.

La solución que cambia de signo se obtiene minimizando el funcional J en el subconjunto

$$S_1 = \{u \neq 0 : \langle \nabla J(u), u\rangle = 0, u_+,\\ u_- \neq 0, \langle \nabla J(u_+), u_+\rangle = 0\}. \quad (18)$$

Usando el principio de minimax mencionado arriba para problemas superlineales y los resultados de teoría de grado de A. Castro y J. Cossio ([Cas-Cos3], 1994), demostramos la existencia de soluciones que cambian de signo para problemas de Dirichlet asintóticamente lineales; es decir, cuando la no linealidad satisface

$$f'(\infty) := \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} \in \mathbf{R}.$$

El primer resultado en esta dirección es el siguiente:

Teorema 16. ([Cas-Cos-Nu3], 1998) *Si $tf''(t) > 0$ para $t \neq 0$ y $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_2, \infty)$, entonces (3) tiene al menos cuatro soluciones. Una de las soluciones cambia de signo exactamente una vez y si es aislada su grado local es +1.*

Este útimo teorema incluye el caso en el cual (3) presenta *saltos no lineales*, i.e., el intervalo $(f'(-\infty), f'(+\infty)) \cup (f'(+\infty), f'(-\infty))$ contiene un valor propio λ_k. A su vez el Teorema nos permite extender los resultados del Teorema 12. En efecto, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 17. ([Cas-Cos-Nu3], 1998) *Si $tf''(t) > 0$ para $t \neq 0$ y $f'(-\infty), f'(+\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ para $k \geq 2$, entonces (3) tiene por lo menos cinco soluciones, dos de las cuales cambian de signo. Además, una de estas dos soluciones cambia de signo exactamente una vez.*

Además, demostramos que en el Teorema no necesariamente se consiguen más de dos soluciones que cambien de signo.

Teorema 18. ([Cas-Cos-Nu3], 1998) *Si $k = 2$ en el Teorema entonces (3) tiene exactamente dos soluciones que cambian de signo; ambas cambian de signo una sola vez.*

En [Cas-Cos-Nu2], publicado en 1997, con la colaboración de A. Castro y J. M. Neuberger, demostramos la existencia de soluciones no radiales que cambian de signo cuando Ω es una bola en $\mathbf{R}^N$ y f es asintóticamente lineal. Sea $\lambda_1^r < \lambda_2^r < \cdots < \lambda_k^r < \ldots$ la sucesión de valores propios de $-\Delta$ actuando en funciones radiales de $H_0^1(\Omega)$. Recordamos que $\lambda_1 = \lambda_1^r$ y $\lambda_2 < \lambda_2^r$. Se probó el siguiente teorema.

Teorema 19. ([Cas-Cos-Nu2], 1997) *Si $tf''(t) > 0$ para $t \neq 0$, $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ con $k \geq 2$, $f'(t) \leq \gamma < \lambda_{k+1}$ para todo $t \in \mathbf{R}$ y $\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \lambda_2^r$, entonces el problema (3) tiene al menos dos soluciones que son no radiales y cambian de signo. Además, una de estas dos soluciones cambia de signo exactamente una vez.*

4. Construcción y visualización de soluciones para problemas elípticos semilineales

Otro tópico de investigación en el que he trabajado es el de construcción y visualización de soluciones para problemas elípticos semilineales. Este trabajo es importante ya que en su gran mayoría los teoremas de existencia de soluciones para problemas semilineales son no constructivos; además siempre serán bienvenidos ejemplos explícitos que apoyen o nieguen conjeturas y que sugieran direcciones para estudios futuros.

En dos trabajos escritos en colaboración con el profesor H. Arango, el primero publicado en la Revista Colombiana de Matemáticas ([Ar-Cos1], 1996) y el segundo en el Electronic Journal of Differential Equations ([Ar-Cos2], 2000), presentamos métodos para construir explícitamente soluciones con simetría radial para el problema (3) cuando el dominio Ω es una bola en $\mathbf{R}^N$ y la función f es continua y lineal por tramos. El método de construcción está basado en un spline de funciones de Bessel y en el "shooting method". Estos trabajos han sido inspirados por un trabajo previo de los profesores E. Deumens y H. Warchall ([De-War], 1988), en el que los autores estudian una ecuación de onda no lineal en el espacio $\mathbf{R}^{n+1}$.

Consideremos la siguiente función continua lineal por tramos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} \Lambda^2 t - (\Lambda^2 - \beta^2) & \text{si } t > 1 \\ \beta^2 t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ \Lambda^2 t + (\Lambda^2 - \beta^2) & \text{si } t < -1, \end{cases} \qquad (19)$$

donde Λ y β son constantes.

Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \ldots$ la sucesión de valores propios $-\Delta$ actuando en funciones radiales de H_0^1. Demostramos el siguiente resultado.

Teorema 20. ([Ar-Cos1], 1996) *Si $\beta^2 \leq \lambda_k$ y $\Lambda^2 > \lambda_p$ $(k \leq p)$ entonces existen $(p - k + 1)$ pares* *de soluciones radiales de (3), u_i y v_i ($k \leq i \leq p$), tales que para cada i, $u_i(0) < 0 < v_i(0)$ y u_i, v_i tienen exactamente $(i-1)$ nodos en $(0,\pi)$.*

También se construyeron explícitamente soluciones radiales para la ecuación (3), cuando la no linealidad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida por

$$f(t) = \begin{cases} \alpha^2\, t & \text{si } t \leq \frac{\beta}{2} \\ -\alpha^2\, t + \alpha^2\, \beta & \text{si } \frac{\beta}{2} \leq t \leq \beta \\ \alpha^2\, t - \alpha^2\, \beta & \text{si } t \geq \beta \end{cases} \tag{20}$$

donde α y β son constantes.

Teorema 21. ([Ar-Cos2], 2000) *Si $\lambda_j < \alpha^2 < \lambda_{j+1}$ y $\beta > 0$ entonces para cada $0 \leq i \leq j-1$ existen soluciones radiales únicas v_i y u_i para el problema (3) con i nodos en $(0,\pi)$, tales que $v_i(0) > \beta > 0$ y $0 < u_i(0) < \beta$.*

Presentamos una gráfica de la solución obtenida con el programa Mathematica, siguiendo el método de construcción empleado en el artículo (véase la Figura 1).

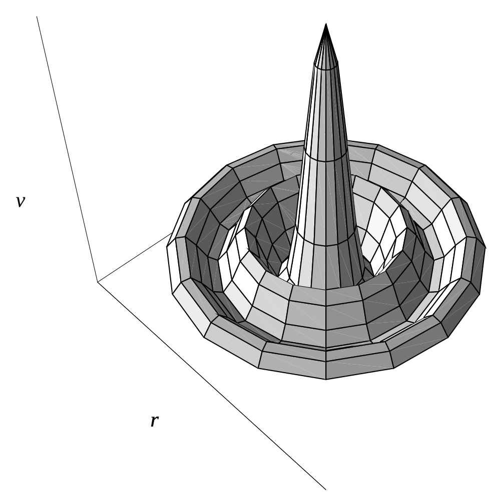

Figura 1. Solución radial $v(r)$ en 3 dimensiones con $\alpha = 5.1$, $\beta = 2.0$ y 4 nodos.

También, en una investigación en colaboración con los profesores J. M. Neuberger y S. Lee ([Cos-Le-Nu], 2001) logramos construir un nuevo algoritmo para aproximar soluciones que se consiguen vía el método de reducción de Lyapunov-Schmidt para problemas de Dirichlet sublineales en dominios acotados.

5. Perspectivas

Como se puede observar de los resultados presentados en las Secciones 2, 3 y 4 de este trabajo, el autor, en colaboración con Alfonso Castro y otros investigadores en el área, ha introducido nuevas ideas en el estudio de la existencia, las propiedades cualitativas y la construcción y visualización de soluciones para el problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

Estas ideas nos conducen a formular una serie de preguntas abiertas, que serán especificadas en esta sección, y que esperamos contribuyan a una mejor comprensión de las soluciones de problemas de Dirichlet no lineales.

Perspectiva I. Motivados por el principio de Minimax presentado en el Teorema 15 y por los resultados obtenidos en los Teoremas , y sería interesante estudiar la *existencia de soluciones no radiales que cambian de signo exactamente una vez para el problema* (21). Recientemente, A. Castro y H. Aduén (véase [Ad-Cas], 2003) demostraron la existencia de infinitas soluciones no radiales para problemas de Dirichlet superlineales.

Perspectiva II. Motivados por los resultados obtenidos en los Teoremas 12, y nos parece importante estudiar la *existencia de soluciones que cambian de signo en dominios generales.* Conjeturamos que es posible debilitar la hipótesis de convexidad del Teorema y conseguir resultados similares.

Perspectiva III. Como el Principio de Minimax de Castro-Cossio-Neuberger (véase Teorema 15) también vale cuando f se reemplaza por λf, sería interesante *demostrar que las soluciones correspondientes u_λ están en la misma curva de bifurcación.* Conjeturamos que ellas se bifurcan del segundo valor propio y que existe un conjunto conexo de soluciones que cambian de signo exactamente una vez y conecta $(0,\infty)$ con $(\lambda_2, 0)$. A medida que vayan apareciendo más soluciones al problema (21) es importante estudiar las correspondientes curvas de bifurcación.

Perspectiva IV. Motivados por el caso unidimensional, el caso radial y los resultados del Teorema 15, sería importante *encontrar condiciones suficientes que permitan demostrar que para cada entero positivo k el problema (21) tiene una solución con k regiones nodales.*

Perspectiva V. Mientras el caso unidimensional, el caso radial y el caso en el cual la no linealidad f es impar sugieren que el problema (21) tiene $2k+1$ soluciones cuando $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, el contraejemplo de Dancer (véase [Da], 1976) nos indica que esto no siempre es posible. Sería interesante *demostrar que cuando $k \to \infty$ el número de soluciones de (21) tiende a ∞.*

Perspectiva VI. Motivados por los resultados obtenidos por el autor, en colaboración con H. Arango y J. M. Neuberger, en el estudio del problema (21) en dominios simétricos (véase [Ar-Cos1], 1996; [Ar-Cos2], 2000; y [Cos-Le-Nu], 2001) es importante *estudiar la construcción explícita de soluciones, para el problema mencionado, en dominios no simétricos.*

Referencias

[Ad-Cas] **H. Aduén and A. Castro**, *Infinitely Many Nonradial Solutions to a Superlinear Dirichlet Problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 835–843.

[Am-Pro] **A. Ambrosetti and G. Prodi**, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 34, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[Am-Ra] **A. Ambrosetti and P. Rabinowitz**, *Dual variational methods in critical point theory*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[Ar-Cos1] **H. Arango y J. Cossio**, *Construcción de Soluciones Radialmente Simétricas para un Problema Elíptico Semilineal*, Rev. Colombiana Mat.**30** (1996), 77–92.

[Ar-Cos2] **H. Arango and J. Cossio**, *Explicit Construction, Uniqueness, and Bifurcation curves of Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem in a Ball*, Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 05, 2000, 1–12.

[Cas1] **A. Castro**, *Métodos de Reducción via Minimax*, Primer Simposio Colombiano de Análisis Funcional, Medellín, Colombia, (1981).

[Cas-Cos1] **A. Castro and J. Cossio**, *A Bifurcation Theorem and Applications*, Dynamic Systems and Applications **2** (1993), 221–226.

[Cas-Cos2] **A. Castro and J. Cossio**, *Multiple Radial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem in a ball*, Rev. Colombiana Mat. **27** (1993), 15–24.

[Cas-Cos3] **A. Castro and J. Cossio**, *Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 1554–1561.

[Cas-Cos-Nu1] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *A Sign-Changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem*, Rocky Mountain J.M. **27** (1997), 1041–1053.

[Cas-Cos-Nu2] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *On Multiple Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **30** (1997), 3657–3662.

[Cas-Cos-Nu3] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *A Minimax Principle, Index of the Critical Point, and Existence of Sign-changing Solutions to Elliptic Boundary Value Problems*, Electronic Journal of Differential Equations **1998** (1998), 1–18.

[Cas-Laz1] **A. Castro and A. C. Lazer**, *Applications of a Max-min Principle*, Rev. Colombiana Mat. **10** (1976), . 141–149.

[Cas-Laz2] **A. Castro and A. C. Lazer**, *Critical Point Theory and the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Ann. Mat. Pura Appl. **70** (1979), 113–137.

[Cos] **J. Cossio**, *Múltiples Soluciones para un Problema Elíptico Semilineal*. En *Memorias de la III Escuela de Verano en geometría diferencial, ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Colección memorias No. 7, 1995, 53–59.

[Cos-Le-Nu] **J. Cossio, S. Lee, and J. M. Neuberger**, *A Reduction Algorithm for Sublinear Dirichlet Problems*, Nonlinear Analysis, **47** (2001), 3379–3390.

[Cos-He] **J. Cossio and S. Herrón**, *Nontrivial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem with Nonlinearity Crossing Multiples Eigenvalues*, Submitted for publication in the Journal of Dynamics and Differential Equations.

[Cos-Ve] **J. Cossio y C. Vélez**, *Soluciones no Triviales para un Problema de Dirichlet Asintóticamente Lineal*, Aceptado para publicación en la Revista Colombiana de Matemáticas, 2003.

[Ch] **S. Chandrasekhar**, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, 1939.

[Cr-Ra] **M. Crandall and P. Rabinowitz**, *Bifurcation from Simple Eigenvalue*, J. Funct. Anal. **8** (1971), 321–340.

[Da] **E. Dancer**, *Counterexamples to Some Conjectures on the Number of Solutions of Nonlinear Equations*, Math. Ann. **16** (1976), 1361–1376.

[De-War] **E. Deumens and H. Warchall**, *Explicit Construction of all Spherical Symmetric Solitary Waves for a Nonlinear Wave Equation in Multiple Dimensions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **12** (1988), 419–447.

[Ek] **I. Ekeland**, *On the Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.

[Es] **M. Esteban**, *Multiple Solutions of Semilinear Elliptic Problems in a Ball*, J. Differential Equations **57** (1985), 112–137.

[He] **M. Henon**, *Numerical Experiments on the Stability of spherical Stellar Systems*, Astro. Astrophys. **24** (1973), 229–238.

[Li-Ya] **E. Lieb and H. T. Yau**, *The Chandrasekhar Theory of Stellar Collapse as the Limit of Quantum Mechanics*, Commun. Math. Phys. **112** (1987), 147–174.

[Ke-An] **J. Keller and S. Antman**, *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue problems*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969, 395-409.

[Lan-Laz-Me] **E. M. Landesman, A. C. Lazer, and D. Meyers**, *On Saddle Point Problems in the Calculus* *of Variations, the Ritz Algorithm, and Monotone Convergence*, J. Math. Anal. Appl. **53** (1975), 594–614.

[Laz-Sol] **A. C. Lazer and S. Solimini**, *Nontrivial Solutions of Operator Equations and Morse Indices of Critical Points of Min-Max Type*, Nonlinear Analysis TMA **12** (1988), 761–775.

[Lj-Sc] **L. Ljusternik and L. Schnirelman**, *Méthodes Topologiques dans les Problémes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934.

[Mors1] **M. Morse**, *Relations Between the Critical Points of a Real Function of n Independent Variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 345–396.

[Mors2] **M. Morse**, *The Calculus of Variations in the Large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 18, 1934.

[Pa-Sm] **R. Palais and S. Smale**, *A Generalized Morse Theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 165–171.

[Ra1] **P. Rabinowitz**, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487–513.

[Ra2] **P. Rabinowitz**, *Topological Methods in Bifurcation Theory*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Séminaire Scientifique OTAN, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1985.

[Ra3] **P. Rabinowitz**, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential equations*, Regional Conference Series in Mathematics, 65, Providence, R. I., AMS (1986).

[Wa] **Z. Q. Wang**, *On a Superlinear Elliptic Equation*, Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse Non Linéaire **8** (1991), 43–57.