GEOMETRÍA DE VARIEDADES BANDERA

por

Marlio Paredes y Sofía Pinzón[1]

Dedicado a la memoria del profesor Don Jairo Charris

Resumen

Paredes, Marlio & Sofía Pinzón: Geometría de variedades bandera. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 123–134, 2004. ISSN 0370-3908.

En este trabajo hacemos un recuento histórico de resultados sobre la geometría de las variedades bandera. Principalmente abordamos la relación existente entre métodos combinatorios y propiedades geométricas.

Palabras clave: Variedades bandera, geometría hermítica, sistemas de raíces, grupos de Lie semisimples.

Abstract

In this work we make a historical recount of results on the geometry of flag manifolds. Mainly we study the relation between combinatorial methods and geometric properties.

Key words: Flag manifolds, Hermitian geometry, root systems, semi-simple Lie groups.

1. Introducción

Una variedad bandera es un espacio homogéneo reductivo $G/C(S)$, donde G es un grupo de Lie complejo semisimple y $C(S)$ es el centralizador de un toro S (no necesariamente maximal en G). Cuando S es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal, y la denotamos por $\mathbb{F}$.

Nuestro objeto inicial de estudio son las variedades bandera hermíticas, es decir, una variedad bandera dotada de una estructura cuasicompleja J.

Presentamos aquí algunas nociones básicas que nos permitan introducir, en el lenguaje de álgebras de Lie

[1]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Apartado Aereo 678, Bucaramanga, Santander, Colombia. Email: mparedes@uis.edu.co y Email: spinzon@uis.edu.co Este trabajo ha sido financiado parcialmente por Colciencias, Contrato No. RC–240–2001.

AMS Classification 2000: 14M15, 53C55, 22F30, 05C20.

semisimples complejas de dimensión finita, los resultados existentes sobre la geometría de variedades bandera.

Hacemos un recuento histórico de los principales trabajos realizados alrededor del estudio de las estructuras cuasicomplejas y su relación con la combinatoria de los torneos (grafos dirigidos completos). Presentamos las condiciones establecidas en este contexto para que la variedad bandera maximal clásica admita métricas (1,2)-simplécticas (ver, por ejemplo [20], [25], [7],[8],[9], [32]).

Mostramos la generalización conseguida por Pinzón en [27] de algunos de los resultados ya conocidos de la geometría hermítica, para el caso de f-variedades bandera; es decir, una variedad bandera dotada de un endomorfismo $\mathcal{F}$ que satisface $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$.

Mostramos además que en el caso de la variedad bandera maximal clásica, es decir, $\mathbb{F}(n) = U(n)/(U(1) \times \cdots \times U(1)$, donde $U(n)$ es el grupo unitario de matrices, existe una correspondencia biunívoca entre una f-estructura y un digrafo (grafo dirigido no necesariamente completo). Basados en esta representación extendemos la noción de torneo localmente transitivo, dada en [5], a digrafos no completos, y mostramos que en este caso esta condición extendida es necesaria y suficiente para que la variedad bandera maximal clásica sea (1,2)-simpléctica.

Con esto comenzamos el estudio orientado hacia encontrar una caracterización de las propiedades geométricas de este tipo de variedades, inmersa dentro de la teoría hermítica generalizada.

2. Nociones básicas

Definición 2.1. Un grupo de Lie G es un grupo cuya estructura subyacente tiene una estructura de variedad diferenciable, de tal forma que la aplicación producto

$$p : (g,h) \in G \times G \to gh \in G$$

es diferenciable.

Ejemplo 2.2.

1. $Gl(n,\mathbb{R})$, el grupo de las transformaciones lineales invertibles de $\mathbb{R}^n$, o en otras palabras el grupo de las matrices invertibles $n \times n$. Este grupo es un subespacio abierto del espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$, y por tanto es una variedad diferenciable. El producto es el producto usual de matrices.

2. Cualquier espacio vectorial de dimension finita con la operación $+$ es un grupo de Lie.

3. El grupo G de las matrices triangulares superiores $n \times n$ con entradas diagonales iguales a 1:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es un grupo de Lie.

4. Grupo unitario de matrices $U(n) = \{X \in Gl(n,\mathbb{C}) : X^{-1} = \bar{X}^t\}$, donde X^t es la traspuesta de X.

5. Grupo especial lineal $Sl(n,\mathbb{C}) = \{X \in Gl(n,\mathbb{C}) : det(X) = 1\}$.

6. Grupo ortogonal complejo $O(n,\mathbb{C}) = \{X \in Gl(n,\mathbb{C}) : X^{-1} = X^t\}$

Definición 2.3. Una álgebra de Lie consiste de un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ dotado de un producto *corchete* o conmutador $[\cdot,\cdot]$, el cual es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi, esto es, para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$$

Definición 2.4. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado por el corchete; esto es, $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Ejemplo 2.5. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n en $\mathbb{C}$, o sea el álgebra de las matrices de tamaño $n\times n$.

El corchete está dado por

$$[X,Y] = XY - YX, \qquad X, Y \text{ matrices.}$$

Algunas subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ son:

1. $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}$.
2. $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) : X + X^t = 0\}$.
3. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : trX = 0\}$.
4. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) : XJ + JX^t = 0\}$, donde J, escrito en bloques de tamaño $n \times n$, es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.6. Una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V es una acción ρ de G en V tal que todas las transformaciones $\rho(g)$ son aplicaciones lineales de V.

Definición 2.7. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie , V un espacio vectorial y $\mathfrak{gl}(V)$ la álgebra de Lie de las transformaciones lineales de V. Una aplicación lineal $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que $\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$, es decir, ρ es un homomorfismo entre álgebras de Lie, es llamada una *representación* de $\mathfrak{g}$ en V.

Existe una representación natural de un grupo de Lie G en su álgebra de Lie. Esta representación es construida de la siguiente forma: un elemento $g \in G$ define el automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. Es claro que $C_g(1) = 1$, por tanto la derivada en la identidad, $d(C_g)_1$, es una aplicación lineal de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$.

Definición 2.8. La representación adjunta $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$ de G en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es definida por $Ad(g) = d(C_g)_1$.

La representación infinitesimal de Ad es la representación adjunta de $\mathfrak{g}$.

Definición 2.9. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie. Su representación adjunta, es la aplicación $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por

$$ad(Y)(X) = [X, Y].$$

La identidad de Jacobi garantiza que la aplicación ad es un homomorfismo de álgebras de Lie, donde el corchete de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es dado por el conmutador.

Definición 2.10. Dada una representación ρ de dimensión finita de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos en $\mathfrak{g}$ una forma bilineal simétrica llamada forma traza, que está dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = tr(\rho(X)\rho(Y)).$$

En el caso de que la representación sea la *adjunta,* esta forma es llamada *Cartan–Killing,* y será denotada de manera más simple por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 2.11. Una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada semisimple si, y solamente si, su forma Cartan–Killing es no degenerada.

3. Variedad bandera clásica

Una variedad bandera es un espacio homogéneo reductivo $G/C(S)$, donde G es un grupo de Lie complejo semisimple y $C(S)$ es el centralizador de un toro S (no necesariamente maximal en G). Cuando S es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal, y la denotamos por $\mathbb{F}$. Por ejemplo, en el caso clásico, G es el grupo especial unitario $SU(n)$, y $C(S)$ debe ser conjugado a un subgrupo de la forma $SU(n_1) \times \cdots \times SU(n_k)$, con $n_1, \ldots, n_k$ enteros positivos tales que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Si $m_i = n_1 + \cdots + n_i$, el cociente $SU(n)/(SU(n_1) \times \cdots \times SU(n_k))$ puede ser identificado con el conjunto $F(m_1, \ldots, m_k)$ de "banderas parciales" $\{0\} = E_0 \subset E_{m_1} \subset \cdots \subset E_{m_{k-1}} \subset E_{m_k} = \mathbb{C}^n$, donde E_i es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión i. El caso $n_r = 1$, para todo $1 \leq r \leq k$, será denotado por $\mathbb{F}(n)$, y esta puede ser identificada con el conjunto de "banderas totales" $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{C}^n$.

4. Variedad bandera general

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, es decir, una subálgebra abeliana maximal tal que para cada $H \in \mathfrak{h}$, $ad(H)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ es semisimple. Sea α un funcional lineal sobre el espacio vectorial complejo $\mathfrak{h}$, y denótese por $\mathfrak{g}_\alpha$ el subespacio lineal de $\mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [H, X] = \alpha(H) X, \text{para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Notése que para $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, el funcional lineal α es llamado una raíz (de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$). En tal caso $\mathfrak{g}_\alpha$ es llamado un *subespacio raíz.* Denotamos por Π el conjunto de raíces no nulas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y por B la forma Cartan–Killing en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, es decir, $B(X, Y) = \langle X, Y \rangle = tr(adXadY)$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple, B es no degenerada sobre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, la restricción de B a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ es también no degenerada, y así para cada $\alpha \in \Pi$ existe un único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $B(H, H_\alpha) = \langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Tómese $(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$ para toda $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$; se sigue entonces que $(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica no degenerada sobre $\mathfrak{h}^*$.

Teorema 4.1. [35] *Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

1. *La álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en espacios de raíces:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

2. *Los espacios raíz $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, son de dimensión compleja uno.*
3. *Si α y β son dos raíces cualesquiera (incluyendo 0) y $\beta \neq -\alpha$, entonces $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_\beta$ son ortogonales con relación a B.*
4. *Si α es una raíz no nula, $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$.*
5. *Para cada $\alpha \in \Pi$ existe un vector $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ de forma tal que para todo $\alpha, \beta \in \Pi$ tenemos:*
   (a) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ *(para todo $H \in \mathfrak{h}$);*
   (b) $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ *si* $\alpha + \beta \neq 0$ *y* $\alpha + \beta \notin \Pi$;
   (c) $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ *si* $\alpha + \beta = 0$ *y* $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ *en los otros casos.*

(d) $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, *si* $\alpha + \beta \in \Pi$ *con* $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, *y*

$$\begin{aligned} m_{-\alpha,-\beta} &= m_{\alpha,\beta} \\ m_{-\alpha,\alpha+\beta} &= m_{\alpha+\beta,-\beta} = m_{-\beta,-\alpha}. \end{aligned} \tag{1}$$

Los elementos $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ que satisfacen el numeral 5 en el anterior teorema serán llamados una *base de Weyl o Cartan-Weyl* de $\mathfrak{g}$ módulo $\mathfrak{h}$.

Las variedades bandera poseen una descripción más general en términos de estos sistemas de raíces en álgebras de Lie, de la siguiente forma:

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$; denótese por Π el conjunto de raíces del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tomamos una base de Weyl de $\mathfrak{g}$ fija. Sea $\Pi^+ \subset \Pi$ una escogencia de raíces positivas. Denótese por Σ el sistema simple de raíces correspondiente. Tome Θ un subconjunto de raíces de Σ y $\langle\Theta\rangle$ el conjunto de raíces generado por Θ. Sobre $\mathfrak{g}$ tenemos la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus &\sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \\ &\oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\beta \oplus \sum_{\beta\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, es el espacio raíz complejo correspondiente a α.

Sea ahora $\mathfrak{p}_\Theta$ la subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ determinada por Θ. Entonces,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\beta. \tag{3}$$

Así, la ecuación (2) puede ser reescrita como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \sum_{\beta\in\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{4}$$

La variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta$ asociada al par $\{\mathfrak{g}, \Theta\}$ corresponde al espacio homogéneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, donde G es el grupo de Lie complejo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$ y P_Θ es el normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ en G.

Denotamos por $\mathfrak{u}$ la forma real compacta de $\mathfrak{g}$, es decir, la forma de Cartan–Killing restricta a $\mathfrak{u}$ es negativa definida. Sea $U \subset G$ el subgrupo conexo asociado a $\mathfrak{u}$. Sea $K_\Theta = P_\Theta \cap U$, el cual por construcción, es el centralizador de un toro. U actúa transitivamente sobre $\mathbb{F}_\Theta$, y así podemos escribir $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. Si $\Theta = \emptyset$, $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$ corresponde a la variedad bandera maximal, y en el caso contrario corresponde a una variedad bandera parcial.

De lo anterior, tenemos 9 diferentes variedades bandera generales, asociadas a las diferentes álgebras de Lie semisimples, finitas, existentes:

- Álgebras clásicas:
  1. $A_l, l \geq 1$; corresponde a $\mathfrak{sl}(l+1)$.
  2. $B_l, l \geq 2$; corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar $\mathfrak{so}(2l+1)$.
  3. $C_l, l \geq 3$; corresponde al álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}(l)$.
  4. $D_l, l \geq 4$; corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión par $\mathfrak{so}(2l)$.
- Álgebras excepcionales:
  1. G_2 es la álgebra construida sobre el espacio vectorial $\mathfrak{sl}(3) \oplus V \oplus V^*$, donde $V = \mathbb{K}^3$ con $\mathbb{K}$ un campo cualquiera.
  2. E_6, E_7, E_8. La construcción de las álgebras E_6, E_7 puede ser realizada a partir de la construcción de E_8, que es el álgebra construida sobre el espacio vectorial $\mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$, donde $V = \Lambda^3\mathbb{K}^9$ con $\mathbb{K}$ un campo cualquiera.

5. Métricas invariantes

Denótese por b_0 el origen de $\mathbb{F}_\Theta$, visto como espacio homogéneo de U. Una métrica riemanniana U-invariante ds^2_Λ en $\mathbb{F}_\Theta$ es completamente determinada por sus valores en el origen, esto es, por un producto interno $(\cdot,\cdot)$ en $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$.

Cualquier producto interno en $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$, U-invariante tiene la forma $(X,Y)_\Lambda = -\langle \Lambda \circ X, Y\rangle$, con $\Lambda : T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta) \to T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ positivamente definida con relación a la forma Cartan–Killing, y $\circ$ es el producto de Hadamard o producto de matrices entrada por entrada. La invarianza de $(\cdot,\cdot)_\Lambda$ equivale a afirmar que, en la base de Weyl,

$$\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha, \tag{5}$$

con $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha} > 0$.

6. El espacio tangente de una variedad bandera

Considérese la variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$. Denótese por U la forma real compacta de G correspondiente a $\mathfrak{u}$. Sea $K_\Theta = P_\Theta \cap U$. K_Θ, por construcción, el centralizador de un toro. Sea la subálgebra real $\mathfrak{t}_\Theta = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$; denotaremos por $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}_\Theta$ su complejificación. Podemos escribir

$$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \tag{6}$$

Sea $\mathfrak{u}$ una forma real compacta de $\mathfrak{g}$. Asumimos $\mathfrak{u}$ como el subespacio real generado por $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, y A_α, S_α, con $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$, donde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ y $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. La variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ es un espacio homogéneo reductivo. De hecho, sea $\mathfrak{u}_\beta = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta})$, $\beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, y $\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\beta$. Por tanto,

(i) $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}_\Theta \oplus \mathfrak{q}_\Theta, \quad \mathfrak{t}_\Theta \cap \mathfrak{q}_\Theta = \emptyset$;
(ii) $Ad(K_\Theta)\mathfrak{q}_\Theta \subset \mathfrak{q}_\Theta$, lo que implica $[\mathfrak{t}_\Theta, \mathfrak{q}_\Theta] \subset \mathfrak{q}_\Theta$.

Identificamos $\mathfrak{q}_\Theta = T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$. Esta identificación es dada por $X \in \mathfrak{q}_\Theta \to X_{b_0} \in T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$, es decir, por evaluación de $X \in \mathfrak{q}_\Theta$ en b_0 como un campo vectorial sobre $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ (véase [17], pág. 191).

El espacio tangente a $\mathbb{F}_\Theta$ en b_0 se identifica naturalmente con el subespacio $\mathfrak{q}_\Theta = \mathfrak{u} \ominus \mathfrak{t} = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\beta$, generado por $A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$. Análogamente, el espacio tangente complejificado de $\mathbb{F}_\Theta$ es identificado con $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h} = \oplus_{\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle} \mathfrak{g}_\alpha$. Por el item (ii) inmediatamente anterior, la acción adjunta de K_Θ deja $\mathfrak{q}_\Theta$ invariante y lo descompone en componentes irreducibles que son invariantes por la acción adjunta de K_Θ (véase [34]).

7. f-Estructuras invariantes

K. Yano en 1961 introdujo la noción de f-estructura para cualquier variedad riemanniana de la siguiente forma.

Definición 7.1. Sea M una variedad riemanniana n-dimensional. Un campo tensorial $\mathcal{F}$ en TM de tipo (1,1) tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, es llamado una f-estructura sobre TM.

Una f-estructura definida en una variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta$ será denotada por $\mathcal{F}^\Theta$. Introducimos ahora la noción de "f-estructura U-invariante" en $\mathbb{F}_\Theta$.

Definición 7.2. Una f-estructura $\mathcal{F}^\Theta$ es llamada U-invariante si para cada $x \in \mathbb{F}_\Theta$ el endomorfismo $\mathcal{F}^\Theta_x : T_x\mathbb{F}_\Theta \to T_x\mathbb{F}_\Theta$ satisface $du_x \circ \mathcal{F}^\Theta_x = \mathcal{F}^\Theta_{ux} \circ du_x$, para todo $u \in U$.

Claramente, $\mathcal{F}^\Theta$ es diagonizable en $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}_\Theta$ con valores propios i, 0, $-i$.

La U-invarianza de $\mathcal{F}^\Theta$ garantiza que $\mathcal{F}^\Theta(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, con igualdad cuando $\mathcal{F}^\Theta$ es una estructura cuasicompleja invariante (véase [34]). Así, $\mathcal{F}^\Theta$ es determinado de manera única por los valores $\varepsilon^\Theta_\alpha \in \{0, \pm 1\}$, $\alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, definidos por $\mathcal{F}^\Theta(X_\alpha) = i\varepsilon^\Theta_\alpha X_\alpha$. Estos valores satisfacen $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$, por tanto $\mathcal{F}^\Theta$ es definida por sus valores en $\Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+$.

Es claro que una estructura cuasicompleja J, es decir, una estructura que satisface $J^2 = -1$, es una f-estructura, por lo cual consideramos un problema interesante extender los resultados obtenidos, hasta el momento en [20], [25], [8], [9], para variedades bandera maximales clásicas cuasihermíticas invariantes (1,2)-simplécticas en su relación con grafos dirigidos completos (torneos) y en [32] para variedades bandera maximales asociadas a cualesquiera de las álgebras semisimples finitas mencionadas anteriormente.

Con relación a la variedad bandera maximal clásica $\mathbb{F}(n) = U(n)/T$, y a estructuras cuasicomplejas, en 1999 X. Mo and C. J. C. Negreiros mostraron en [20] que una condición necesaria para que esta variedad fuera (1,2)-simpléctica consistia en analizar el torneo asociado a la estructura cuasicompleja y garantizar que no contenía un 4-subtorneo conado, o sea un 4-subtorneo isomorfo a uno de los dos 4-torneos que aparecen en la Figura 1. Si el torneo no contiene este tipo de subtorneo, es llamado libre de cono.

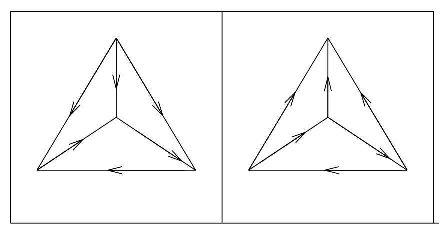

Figura 1: 4-Torneos conados

En 2000 M. Paredes [25] conjetura la suficiencia de la condición libre de cono, basado en los estudios realizados sobre $\mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4), \mathbb{F}(5), \mathbb{F}(6), \mathbb{F}(7)$. Con base en esto, Cohen, Negreiros, San Martin [8] completan la demostración del teorema:

Teorema 7.3. $(\mathbb{F}(n), J)$ *admite una métrica invariante (1,2)-simpléctica* Λ *si, y solamente si, el torneo asociado* T_J *es libre de cono.*

Decimos que la estructura cuasicompleja J admite métrica (1,2)-simpléctica o que J es (1,2)-admisible.

En 2002 L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros, [32] utilizando la combinatoria geométrica de los sistemas de raíces y sus grupos de Weyl, obtienen, sobre una variedad bandera maximal asociada a cualquiera de las álgebras de Lie semisimples finitas ya mencionadas, una caracterización de las estructuras cusicomplejas invariantes que admiten métricas que convierten la variedad en (1,2)-simpléctica. La metodología utilizada consistió en partir desde el correspondiente grupo de Weyl afín y el conjunto de alcobas (ver [33]), determinados por el sistema de raíces asociado. San Martin y Negreiros definieron una nueva clase de estructuras cuasicomplejas llamadas de tipo afín, es decir, a cada alcoba asociaron una determinada estructura cuasicompleja, mostrando que, sobre una variedad bandera maximal general, una estructura cuasicompleja invariante es (1,2)-admisible si y solamente si es de tipo afín. En este mismo artículo los autores observaron que la clase de las estructuras cuasicomplejas invariantes (1,2)-admisibles es la principal entre las 16 clases dadas por Gray y Hervella [12], y muestran que, en el caso de la variedad bandera maximal general, las 16 clases se reducen a cuatro clases.

En el caso de la variedad bandera maximal para una álgebra de Lie semisimple compleja general no se puede hacer uso de la combinatoria dada por los grafos, pero sí se puede utilizar una combinatoria más general, basada en sistema de raíces. En [9] Cohen, Negreiros y San Martin dieron una interpretación, en términos de sistemas de raíces, de la condición *libre de cono,* y muestran la necesidad de esta condición para que una variedad bandera maximal general, sea (1,2)-simpléctica. Además mostraron que esta condición es también suficiente en el caso de las banderas asociadas a álgebras de Lie semisimples que no contienen componentes de tipo $B_l, l \leq 3$, G_2 o F_4; esta afirmación fue corregida en [27], mostrando que la condición libre de cono, dada en términos de raíces, es suficiente para cualquier bandera maximal asociada a una álgebra de Lie semisimple finita.

En 2003 Silva en [34] estudió las variedades bandera generales parciales y obtuvo condiciones geométricas para la clase de las estructuras cuasicomplejas hermíticas que convierten la variedad bandera parcial en (1,2)-simpléctica. En este caso se muestra que las diesiséis 16 clases dadas por Gray y Hervella en [12] se reducen a cinco 5 clases.

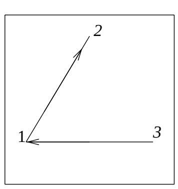

Figura 2: Digrafo del Ejemplo 1.1.

Otra motivación para intentar extender los resultados ya mencionados fue la extensión, por parte de Rawnsley [29], de la noción de variedad cuasihermítica (1,2)-simpléctica a f-variedad (1,2)-simpléctica, y por esto la relación entre este tipo de variedades y la existencia de aplicaciones armónicas mediante aplicaciones holomorfas (véase [2]).

8. f-variedad (1,2)-simpléctica y aplicaciones armónicas

Considérese ahora $(N, h, \mathcal{F})$ una f-variedad riemanniana. Recordemos que (véase por ejemplo [17]) para $X, Y \in TN$, la derivada covariante de $\mathcal{F}$ está dada por:

$$(\nabla\mathcal{F})(X,Y) = \nabla_X\mathcal{F}(Y) - \nabla_Y\mathcal{F}(X) - \mathcal{F}([X,Y]). \quad (7)$$

Definición 8.1. Definimos $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)}(X,Y)$ como $\nabla\mathcal{F}(X,Y)$ si $X \in TN^+$ y $Y \in TN^-$. $(N,h,\mathcal{F})$ es llamada f-(1,2)-simpléctica si $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Observamos que cuando $\mathcal{F}$ es una estructura cuasicompleja, la forma de Kähler $\sigma(X,Y) = h(X, \mathcal{F}(Y))$ es antisimétrica; Rawnsley y Salamon ([29], [30]) mostraron que $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$ precisamente cuando $(N,h,\mathcal{F})$ es (1,2)-simplética, es decir, $d\sigma^{1,2} = 0$.

Sea (M, g, J) una variedad riemanniana con J una estructura cuasicompleja y forma de Kähler ω. El siguiente teorema debido a Black [2], el cual tiene origen en el artículo [18], es una de las fuertes motivaciones de nuestro trabajo.

Teorema 8.2. *Sea $\phi : (M, g, \mathcal{F}) \to (N, h, \mathcal{F})$ una aplicación tal que*

1. *ϕ es f-holomorfa, es decir, satisface $d\phi \circ J = \mathcal{F} \circ d\phi$,*
2. *M es co-simpléctica, es decir, $d^*(\omega) = 0$,*
3. $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Entonces ϕ es armónica.

Este teorema en el estudio de aplicaciones armónicas en f-variedades bandera induce un análisis intensivo de las propiedades de las f-estructuras que admiten métricas $(1,2)$-simpléticas, o sea, las f-estructuras (1,2)-admisibles.

Presentamos a seguir algunos de los resultados que obtuvimos al estudiar las f-variedades bandera maximales clásicas.

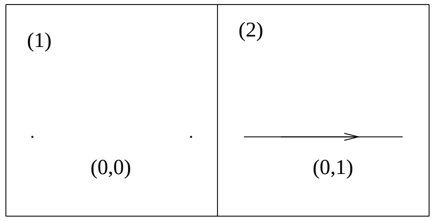

Figura 3: Clases de isomorfismos para $n = 2$.

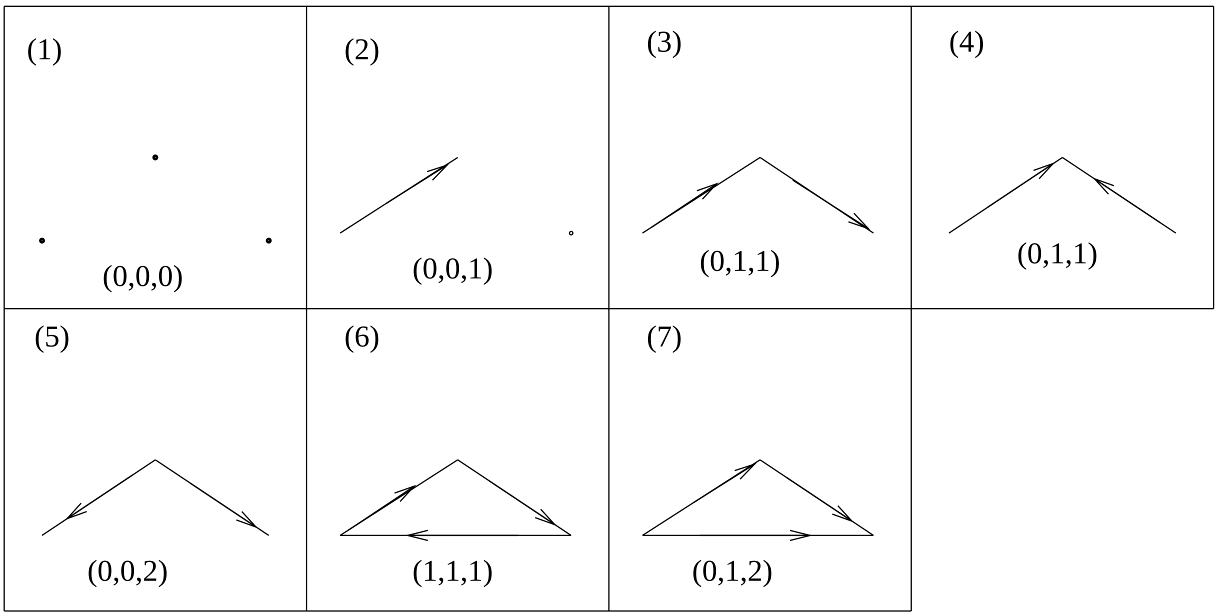

Figura 4: Clases de isomorfismos para $n = 3$.

9. El caso $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ (1,2)-simpléctica

Recordemos que $\mathbb{F}(n)$ es la variedad bandera maximal clásica, o sea, ella está asociada al álgebra de Lie, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, es decir el caso de la bandera maximal asociada a las álgebras de tipo A_n.

En este caso el conjunto formado por $E_{jk}, j \neq k$ y $E_{jj} - E_{kk}, j < k$, es una base de Weyl para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{h}$ es la subálgebra de las matrices diagonales, $\Theta = \emptyset$, así $\mathfrak{q}$ es generada por las matrices $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$ y $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$. Donde

$$E_{jk} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & k & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Para $\mathbb{F}(n)$ y $\mathcal{F}$ una estructura cuasicompleja, es posible establecer una correspondencia entre $\mathcal{F}$ y un grafo orientado completo (torneo) (véase [20], [25], [8]).

Mo y Negreiros probaron en [21] que existen $3^{\binom{n}{2}}$ $f-$estruturas $U(n)-$invariantes sobre una variedad bandera compleja, y que ellas están en correspondencia 1:1 con las matrices antisimétricas $\epsilon(\mathcal{F}) = \{\varepsilon_{ij}\}$, donde ε_{ij} toma valores en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$, lo que sugiere una correspondencia 1:1 entre $f-$estruturas invariantes y grafos orientados (digrafos) no necesariamente completos. La matriz $\varepsilon(\mathcal{F})$ puede ser identificada con la matriz de incidencia de algún grafo orientado finito no completo $\mathcal{G} = (V, E)$, con $V = \{1, \cdots, n\}$ de la siguiente forma: si $\mathcal{F}(E_{jk}) = i\varepsilon_{jk}E_{jk}$, entonces $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es tal que para $j < k$,

$$\begin{aligned} j \to k &\iff \varepsilon_{jk} = 1, \\ j \leftarrow k &\iff \varepsilon_{jk} = -1 \\ j \not\to k &\iff \varepsilon_{jk} = 0. \end{aligned}$$

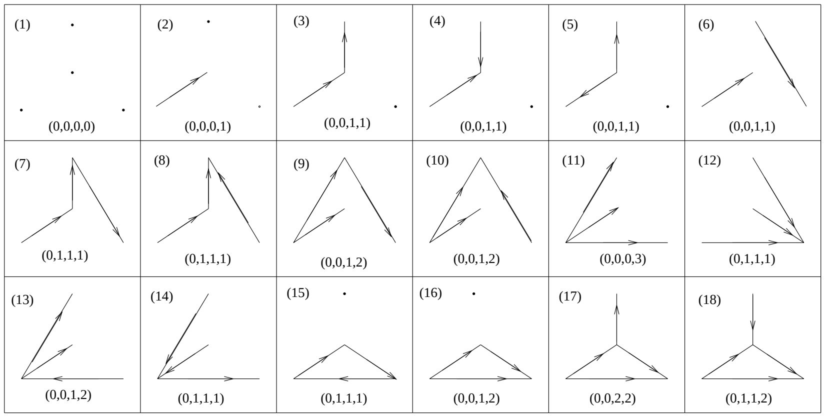

Figura 5: Clases de isomorfismos de digrafos con 4 vértices.

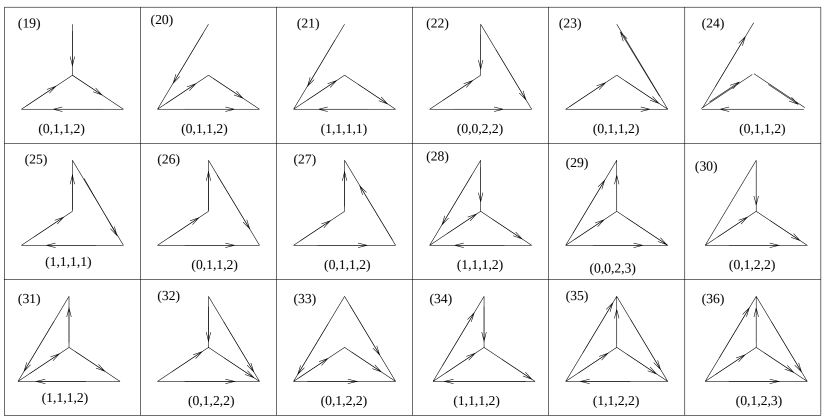

Figura 6: Clases de isomorfismos de digrafos con 4 vértices.

Una construcción similar es válida para las métricas $\Lambda = \{\lambda_{jk}\}$; identificamos cada λ_{jk} con un peso positivo sobre el arco jk de E.

Ejemplo 9.1. Consideremos

$$\mathbb{F}(3) = U(3)/(U(1) \times U(1) \times U(1)) = U(3)/T.$$

En este caso,

$$\mathfrak{q} = T(\mathbb{F}(3))_{(b_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tomemos la siguiente $f-$estructura sobre $\mathbb{F}(3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & ia & -ib \\ i\bar{a} & 0 & 0 \\ -i\bar{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El digrafo de la Figura 2 es el digrafo asociado a esta f-estructura.

Definición 9.2. Sean $\mathcal{G}_1$ un digrafo con n vértices $\{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{G}_2$ un digrafo con m vértices $\{1, \ldots, m\}$. Um homomorfismo entre $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ es una aplicación $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \quad \Longrightarrow \quad \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t) \qquad \text{ó} \qquad \phi(s) = \phi(t),$$

y

$$s \overset{\mathcal{G}_1}{\not\to} t \quad \Longrightarrow \quad \phi(s) \overset{\mathcal{G}_2}{\not\to} \phi(t).$$

Cuando ϕ es bijectiva decimos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son isomorfos.

Para $n = 2$ existen 2 clases de isomorfismos; para $n = 3$ aparecen 7 clases de isomorfismos, y para $n = 4$, 42 clases de isomorfismos (veánse las Figuras 3, 4, 5-7).

Definición 9.3. Sea $\Gamma(N)$ el espacio de los campos vectoriales sobre una variedad diferenciable N.

(i) Definimos $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} : \Gamma^+(N) \times \Gamma^-(N) \to \Gamma(N)$.
(ii) $(N, h, \mathcal{F})$ es llamada $(1,2)-$simpléctica si $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Nuestra intención es caracterizar las f-estructuras invariantes que admiten métricas (1,2)-simplécticas. En otras palabras, deseamos caracterizar los digrafos $\mathcal{G} = (V, E)$ que admiten pesos positivos $\Lambda = (\lambda_{jk})$, los cuales satisfacen las condiciones (8), (9) y (10). Para esto analizamos en $\mathbb{F}(2), \mathbb{F}(3), \mathbb{F}(4)$ las f-estructuras que admiten métricas (1,2)-simplécticas.

Las Figuras 3, 4, 5-7 muestran las clases de isomorfismos de $f-$estruturas invariantes en $\mathbb{F}(n)$ para $n = 2, 3, 4$, respectivamente. Para $n = 2, 3$ todas las clases son (1,2)-admisibles.

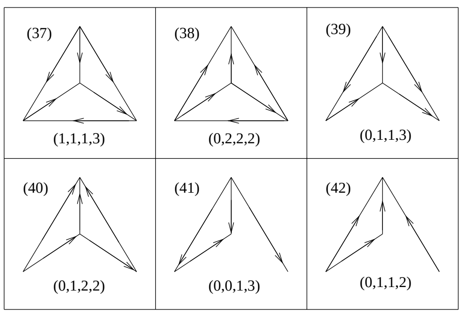

Figura 7: Clases de isomorfismos de digrafos con 4 vértices.

En $\mathbb{F}(4)$ existen 42 clases de isomorfismos de $f-$estructuras invariantes (ver Figuras , , y 7). Las 36 que aparecen en las figuras 5 y 6 son (1,2)-admisibles.

De acuerdo con Black [2], las condiciones para que $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ sea (1,2)-simpléctica son determinadas por las siguientes reglas:

Si $k \to j, k \to l, j \not\leftrightarrow l$, entonces $\lambda_{jk} = \lambda_{kl}$; (8)

Si $j \to k, l \to k, j \not\leftrightarrow l$, entonces $\lambda_{jk} = \lambda_{kl}$; (9)

Si $k \to j, j \to l, k \to l$, entonces $\lambda_{kl} = \lambda_{jk} + \lambda_{jl}$.(10)

Estas reglas se resumen en la Figura 8.

A partir del comportamiento, en los casos mencionados, de las f-estructuras que admiten métrica (1,2)-simpléctica, vimos la necesidad de las siguientes definiciones:

Definición 9.4. Sea $\mathcal{G} := (V, E)$ un digrafo no completo.

1. Dados los subdigrafos de $\mathcal{G}$ determinados por los subconjuntos
$$\mathcal{G}_p(v) = \{w \in V : vw \in E\},$$
$$\mathcal{G}_g(v) = \{w \in V : wv \in E\}.$$
Decimos que v es un *ganador* (respectivamente *perdedor*) en $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}_p(v)$ (respectivamente $\mathcal{G}_g(v)$) es igual a $V \setminus \{v\}$. (Veáse Figura 9).
2. Decimos que $\mathcal{G}$ es trivial si $|E'| = 0$.
3. $\mathcal{G}$ es transitivo si la relación "$\to$" es transitiva (o sea, para $i, j, k \in V'$, $i \to j \to k$ implica $i \to k$);
4. $\mathcal{G}$ es relativamente conexo si para todo $i, j, k \in V$, $i \to j$ implica $i \leftrightarrow k$ o $j \leftrightarrow k$.
5. $\mathcal{G}$ es llamado localmente transitivo si cada uno de los subdigrafos $\mathcal{G}_p(v)$ y $\mathcal{G}_g(v)$ es transitivo y relativamente conexo.

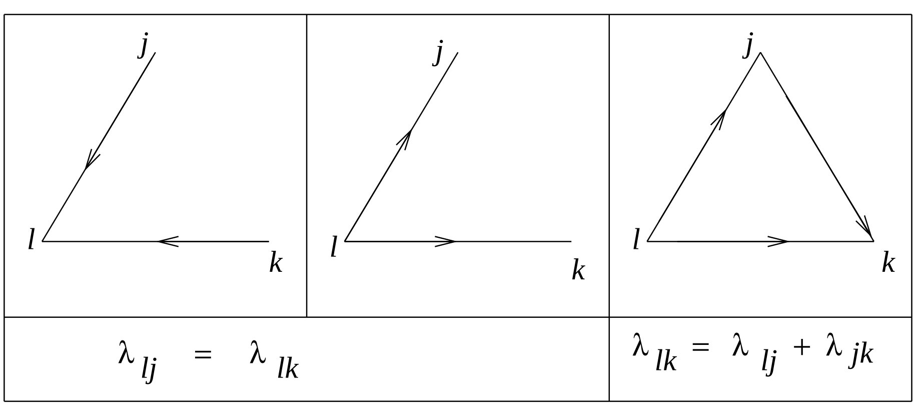

Figura 8: Condiciones de la métrica.

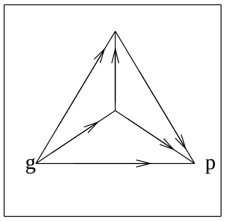

Figura 9: 4-torneo canónico.

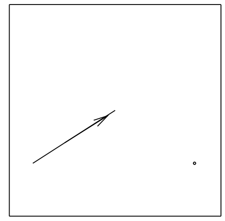

Figura 10: Digrafo no relativamente conexo.

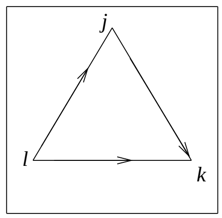

Figura 11: Triángulo transitivo.

Observación 9.5. De la Definición tenemos:

1. Transitividad local significa que el digrafo $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ omite determinados 4–subdigrafos, es decir, aquellos que poseen un subconjunto no vacío de flechas de un 3–ciclo (ver Figura 7).
2. En el caso no completo, la definición es menos fuerte que la definición de torneo localmente transitivo dado que esta definición permite que alguno de estos subdigrafos, por ejemplo $\mathcal{G}_g(v)$, pueda ser trivial, mientras que $\mathcal{G}_p(v)$ puede ser transitivo y relativamente conexo.
3. Si $max\{|\mathcal{G}_g(v)|, |\mathcal{G}_p(v)|\} \leq 2$, para todo $v \in V$, entonces $\mathcal{G}$ es localmente transitivo.

En $\mathbb{F}(3)$ se puede ver fácilmente que las 7 clases de isomorfismos de f-estructuras invariantes son todas localmente transitivas, verificando que los digrafos asociados a estas $f-$estructuras (ver Figura) son localmente transitivos.

En $\mathbb{F}(4)$, de las 42 clases de isomorfismos de $f-$estructuras invariantes apenas las 36 que aparecen en las Figuras 5 y 6 son localmente transitivas.

De acuerdo con la Figura 7, un 4–digrafo no localmente transitivo tiene un ganador o un perdedor, pero no ambos. Los arcos del 3–digrafo obtenido quitando el ganador/perdedor forman un subconjunto no vacío de los arcos de un 3–ciclo (ver Figura 7).

Lema 9.6. *$\mathcal{G}$ es localmente transitivo si, y solamente si, cada 4-subdigrafo de $\mathcal{G}$ es localmente transitivo.*

Proposición 9.7. *En $\mathbb{F}(4)$ una f-estructura es localmente transitiva si y solamente si admite métrica (1,2)-simpléctica.*

Definición 9.8.

(i) Un *triángulo transitivo* es un digrafo completo transitivo $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$ com $|V_t| = 3$. (Véase la Figura 11).

(ii) Un digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ será llamado *completamente no transitivo* si $\mathcal{G}$ no contiene triángulos transitivos; a la f-estructura asociada se la llamará de la misma forma. (Véase la Figura 12).

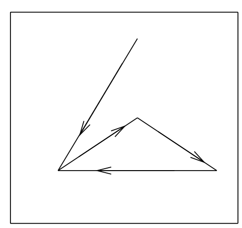

Figura 12: Digrafo completamente no transitivo.

Proposición 9.9. *digrafo completamente no transitivo es localmente transitivo.*

Demostración. En un digrafo completamente no transitivo, $\mathcal{G} = (V, E)$ y los conjuntos $\mathcal{G}_g(v)$ e $\mathcal{G}_p(v)$ son triviales en el sentido de la Definición . Al mismo tiempo, un digrafo completamente no transitivo admite métricas (1,2)-simplécticas, es decir, pesos positivos $\{\lambda_e > 0, e \in E\}$, los cuales satisfacen las identidades (8)-(10).

De hecho, debido a la ausencia de triángulos transitivos, el sistema de ecuaciones (8)-(10) no posee identidades del tipo (10); luego la *métrica Cartan–Killing* ($\lambda \equiv 1$), la cual satisface automáticamente (8-9), es (1,2)–simpléctica (en general, $\mathcal{G}$ admite métricas (1,2)–simplécticas no-constantes junto con la métrica Cartan–Killing).

Observamos que la métrica Cartan–Killing sobre un digrafo $\mathcal{G}$ es (1,2)–simpléctica si y solamente si $\mathcal{G}'$ es completamente no transitivo. En particular, si $\mathcal{G}$ es completo, la métrica Cartan–Killing es (1,2)–simpléctica si, y solamente si, $|V| \leq 3$, como fue observado en [7].

Teorema 9.10. *La f-estructura asociada al digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ admite métricas (1,2)-simpléticas si, y solamente si, $\mathcal{G}$ es localmente transitivo.*

En la construcción de las métricas (1,2)–simplécticas sobre un digrafo localmente transitivo $\mathcal{G}$ nuestra metodología fue la de reducir $\mathcal{G}$ a un digrafo completamente no transitivo asociado $\mathcal{G}'$, con el mismo conjunto de vértices de $\mathcal{G}$.

Para finalizar, aplicando el Teorema 8.2 y la Proposición 9.9, tenemos:

Teorema 9.11. *Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión par, con estructura cuasicompleja J, forma de Kähler Ω y $\phi : (M, g, J) \to (\mathbb{F}(n), \mathcal{F})$ una aplicación f-holomorfa, es decir, ($d\phi \circ J = \mathcal{F} \circ d\phi$) con $\mathcal{F}$ completamente no transitivo. Supóngase además M es co-simpléctica, es decir $d^*\Omega = 0$. Entonces ϕ es armónica con respecto a la métrica Cartan–Killing.*

Bibliografía

[1] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups*, New York, 1969.

[2] M. Black, *Harmonic Maps into Homogeneous Spaces*, Pitman Research Notes, Math series 255. Longman, Harlow, 1991.

[3] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. of Sci. **40**:1147-1151, 1954.

[4] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80**:458-538, 1958.

[5] A. E. Brouwer, *The enumeration of locally transitive tournaments.* Afdeling Zuivere Wiskunde [Department of Pure Mathematics], **138**. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[6] F. E. Burstall and S. Salamon, *Tournaments, flags and harmonic maps*, Math Ann. **277**:249-265, 1987.

[7] N. Cohen, C. J. C. Negreiros and L. A. B. San Martin, *Characterization of (1,2)–symplectic metrics on flag manifolds*, Contemporary Math. **288**:300–304, 2002.

[8] N. Cohen, C. J. C. Negreiros and L. A. B. San Martin, (1,2)-*Symplectic metrics, flag manifolds and tournaments*, Bull. of London Math. Soc. **34**:641-649, 2002.

[9] N. Cohen, C. J. C. Negreiros and L. A. B. San Martin, *A rank-three condition for invariant* $(1,2)$*-symplectic almost Hermitian structures on flag manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. New Series **33**: 49-73, 2002.

[10] J. Eells and S. Salamon, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **12**:589-640, 1985.

[11] J. Eells and L. Lemaire, *Another Report on Harmonic Maps*, Bull. of London Math. Soc. **20**:385-524, 1988.

[12] A. Gray and L. M. Hervella, *The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl **123**:35-58, 1980.

[13] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces*, Acad. Press, 1978.

[14] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1980.

[15] S. Ishihara and K. Yano, *On Integrability Conditions of a structure f satisfying* $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, Quart. J. Math. Oxford (2), **15**:217-222, 1964.

[16] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 1985.

[17] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry,* Vol. 1, Interscience Publishers, 1963.

[18] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques et variétés Kähleriennes*, Symp. Math. **3** (Bologna), 341-402, 1970.

[19] E. C. L. Santos, *Estruturas Quase-Hermitianas Invariantes e Ideais Abelianos*, Disertación de Maestría, Universidade Estadual de Campinas, 2003.

[20] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds*, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific, 1999.

[21] X. Mo and C. J. C. Negreiros, *Horizontal f-estructures, ϵ-matrices and Equiharmonic moving flags*, Relatorio de Pesquisa, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

[22] X. Mo and C. J. C. Negreiros, $(1,2)$-*Symplectic structure on flag manifolds*, Tôhoku Math. J. **52**:271-282, 2000.

[23] W. Moon, *Topics on Tournaments*, Holt, Reinhart and Winston, 1968.

[24] C. J. C. Negreiros, *Some remarks about harmonic maps into flag manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **37**:617-636, 1988.

[25] M. Paredes, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*, Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.

[26] M. Paredes, *Families of (1,2)–symplectic metrics on flag manifolds*, Internat. J. Math. Math. Sci. **29**:651–664, 2002.

[27] S. Pinzón, *Variedades Bandeira, f–Estruturas e Métricas (1,2)–Simpléticas*, Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.

[28] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[29] J. H. Rawnsley, *f–Structures, f–Twistor Spaces and Harmonic Maps*, Lec. Notes in Math. **1164**, 1986.

[30] S. Salamon, *Harmonic and holomorphic maps*, Lec. Notes in Math. **1164**, Springer 1986.

[31] L. A. B. San Martin *Algebras de Lie*, Campinas-S.P., Editora da Unicamp, 1999.

[32] L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros, *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, Adv. Math. **178**: 277–310, 2003.

[33] J. Y. Shi, *Alcoves corresponding to an affine Weyl group*, J. London Math. Soc. **35**:42-45, 1987.

[34] R. C. de Jesus Silva, *Estruturas Quase Hermitianas Invariantes em Espaços Homogêneos de Grupos Semi-simples*, Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.

[35] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, I.*, Springer-Verlag, 1972.

[36] J. A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I.*, J. Diff. Geom. **2**:77-114, 1968.

[37] J. A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II.*, J. Diff. Geom. **2**:115-159, 1968.

[38] K. Yano, *On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying* $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$, Tensor **14**:99-109, 1963.