UNA LÓGICA MODAL PARA LA GEOMETRÍA PLANA DE LOBACHEVSKI

por

Alfonso Ríder Moyano[1] **& Rafael María Rubio Ruiz**[2]

Dedicado a la memoria del profesor Jairo Charris C.

Resumen

Ríder Moyano, Alfonso & Rubio Ruiz, Rafael María : Una lógica modal para la geometría plana de Lobachevski. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 87–94, 2004. ISSN 0370-3908.

Habitualmente, las geometrías de incidencia están basadas en estructuras bisurtidas formadas por puntos y rectas, y conectadas por una relación entre ambas clases. En lo que sigue, introducimos una estructura monosurtida, que llamamos marco de Lobachevski, la cual resulta adecuada, para construir una base semántica que permita su consideración en el lenguaje modal. Construiremos así un sistema axiomático para dicho lenguaje, que estará determinado por la estructura creada, es decir probaremos su corrección y completitud.

Palabras clave: Lógica modal, geometría de Lobachevski.

Abstract

Usually, the incidence geometries are based in two-sorted structures formed of points, lines conected each other for a relationship. Furthermore, we introduce a one-sorted structure that we call Lobachevski frame which results appropriate to build a semantic base that allows its consideration in modal language. We build an axiomatic system for that language will be determinated by the structure created.

Key words: Modal Logic, Lobachevski Geometry

---

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba, Córdoba, España, email: ma1rimoa@uco.es
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba, Córdoba, España, email: ma1rurur@uco.es
AMS 2000 Mathematics Subject Classification: AMS Subject Class. (2000): 03B45, 51A15.

1. Introducción

El desarrollo de sistemas lógicos deductivos, susceptibles de ser utilizados como herramientas para la ingeniería del conocimiento, se ha convertido actualmente en una de las líneas más prolíferas de investigación en lógica matemática. En particular, los sistemas basados en lenguajes modales, resultan especialmente adecuados para las ciencias de la computación. Bajo estos enfoques, han sido ampliamente estudiados sistemas que modelizan las relaciones temporales en sus diversas interpretaciones y aspectos de uso. En los últimos años, empiezan a ser también numerosos los autores que se han interesado en el estudio de las propiedades y relaciones geométricas, bajo el prisma de dichos lenguajes modales, si bién es claro, que el estudio de las propiedades y relaciones espaciales resulta ser considerablemente más complejo que el caso del tiempo. Esto es debido, al hecho, de que aquellas estructuras suelen estar compuestas por diversas clases de objetos (multisurtidas): puntos, lineas, planos, etc.., estando además ligados tales objetos mediante relaciones, a su vez variadas: colinealidad, paralelismo, ortogonalidad, incidencia, etc.

En este trabajo, siguiendo la estela marcada por distintos autores (véase [3],[17]), construimos una estructura monosurtida (es decir, con una única clase de objetos), que resulta ser adecuada para expresarla en un lenguaje modal, y capaz de capturar de forma equivalente, los modelos de la geometría plana de Lobavcheski.

2. Axiomática del plano de Lobachevski

Definición 1. *Una terna (P, L, in), donde P y L son dos conjuntos e $in \subset A \times B$ una relación binaria entre ellos, diremos que es un plano de incidencia si se verifican los siguientes axiomas:*

(IE0) $P \cap L = \emptyset$
(IE1) $(\forall x, y \in P)(\exists z\ inL)(x\ in\ z \wedge y\ in\ z)$
(IE2) $(\forall x, y \in P)(\forall z, t, w\ inL)((x\ in\ z \wedge\ y\ in\ z \wedge\ x\ in\ t \wedge\ y\ in\ t) \rightarrow (x = y\ \vee z = t))$
(IE3) $(\forall z\ inL)(\exists x, y\ inP)(x \neq y \wedge x\ in\ z \wedge y\ in\ z)$
(IE4) $(\forall x \in P)(\exists z, t \in L)(z \neq t \wedge x\ in\ z \wedge x\ in\ t)$

Si $x\ in\ z$ diremos que el punto x es incidente con la recta z, o de forma coloquial, que la recta z pasa por el punto x.

La geometría de incidencia es la estructura geométrica mínima, susceptible de ser ampliada con nuevos axiomas. Una posible ampliación es la inserción de axiomas de paralelismo. Así definiremos la relación "ser paralela" del siguiente modo:

Sean $z, t \in L$,

$z \parallel t$ si y solo si $(\forall x \in P)(x\ in\ z \wedge x\ in\ t \rightarrow z = t)$

Con esta nueva relación, se pueden construir esencialmente, dos tipos diferenciados de geometrías planas en el siguiente sentido:

Dados $x \in P$ y $z \in L$, tales que x no incida en z:

(P1) Existe una única recta t tal que x incide en t y z es paralela a t (geometría afín).
(P2) Existen dos rectas distintas t y l paralelas a z e incidentes con x (geometría de Lobachevski).

Definición 2. *Una estructura $S = (P, L,\ in, \parallel)$, siendo P y L dos conjuntos, e $in, \parallel \subset P \times L$ dos relaciones entre ambos, diremos que es un plano de Lobachevski si (P,L,in) es un plano de incidencia, y además se verifica que:*

(IL) $(\forall x \in P)(\forall z \in L)(\exists t, l \in L)((t \neq l) \wedge (z \parallel t) \wedge (z \parallel l) \wedge (x\ in\ t) \wedge (x\ in\ l) \vee (x\ in\ z))$

Definición 3. *Sean*

$$S = (P, L, in, \parallel) \quad \text{y} \quad S' = (P', L', in', \parallel')$$

dos planos de Lobachevski. Una aplicación

$$f : P \cup L \mapsto P' \cup L'$$

se dirá que un homomorfismo de S en S' si:

(i) *Para todo $x \in P$ y todo $z \in L$ se cumple que $f(x) \in P'$ y $f(z) \in L'$*
(ii) *Para todo $x \in P$ y todo $z \in L$, si $x\ in\ z$ entonces $f(x)\ in'\ f(z)$*
(iii) *Para toda pareja $z, z' \in L$, si $z \parallel z'$ entonces $f(z) \parallel f(z')$*

En lo que sigue, denotaremos por Σ_i la categoría de los planos de Lobachevski (PL), donde sus objetos vienen dados por los planos de Lobachevski, y cuyos morfismos se acaban de definir arriba.

3. Marco de Lobachevski

Contruiremos ahora una nueva categoría compuesta de estructuras monosurtidas y la cual resultará ser equivalente a la anterior.

Sea $S = (P, L, in, \parallel)$ un plano de Lobachevski y consideremos el subconjunto W del producto cartesiano $P \times L$, dado por $W = \{(x, z) \mid x \in P, z \in L, x \in\ \ z\}$. Sobre W, definiremos las siguientes relaciones binarias:

1. ($\equiv_1$) Diremos que $(x_1, z_1) \equiv_1 (x_2, z_2)$ si y solo si $x_1 = x_2$.
2. ($\equiv_2$) Analogamente se dirá que $(x_1, z_1) \equiv_2 (x_2, z_2)$ si y solo si $z_1 = z_2$.
3. ($\|$) Por último, abusando de nuestra notación, diremos que $(x_1, z_1) \parallel (x_2, z_2)$ si y solo si $z_1 \parallel z_2$.

Desde un punto de vista intuitivo, los elementos de W pueden considerarse como puntos o rectas dependiendo del contexto en que aparezcan, es decir $x \equiv_1 y$ significará que considerados como puntos son iguales y de manera análoga al leer $x \equiv_2 y$ interpretaremos que x e y son la misma recta.

Definición 4. *La estructura* $W(S) = (W, \equiv_1, \equiv_2, \|)$*, se denominará marco geométrico asociado al plano de Lobachevski* $S = (P, L, in, \|)$*, o sencillamente marco geométrico sobre* S*.*

Sobre $W(S)$ daremos una nueva relación "(on)" a partir de $\equiv_1$ y $\equiv_2$ de la siguiente forma:

$$(x_1, z_1)\ on\ (x_2, z_2) \text{ si y solo si } x_1 \in\ z_2$$

Tanto la relación *on* como su inversa on^{-1} puede definirse como composición de $\equiv_1$ y $\equiv_2$ de manera alternada.

Lema 1. *Sea* S *un plano de incidencia y* $W = W(S)$ *el marco geométrico asociado a* S*. Entonces para todo* $x, y \in W$ *se tiene:*

(i) $x\ on\ y$ *si y solo si* $(\exists z \in W)(x \equiv_1 z \wedge z \equiv_2 y)$.
(ii) $x\ on^{-1}\ y$ *si y solo si* $(\exists z \in W)(x \equiv_2 z \wedge z \equiv_1 y)$.

Demostración. Basta utilizar la definición de *on* y on^{-1}. □

Lema 2. *Sea* S *un plano de Lobachevski y* $W = W(S)$ *el marco goemétrico sobre* S*. Entonces:*

(ML0) $\equiv_1$ *y* $\equiv_2$ *son relaciones de equivalencia tales que*

$$(\forall x, y \in W)(x \equiv_1 y \wedge x \equiv_2 y \rightarrow x = y)$$

(ML0*) $z \parallel t \leftrightarrow (\forall x \in W)(x\ on\ z \wedge x\ on\ t \rightarrow z \equiv_2 t)$
(ML1) $(\forall x, y \in W)(\exists z \in W)(x\ on\ z \wedge y\ on\ z)$
(ML2) $(\forall x, y, z, t \in W)(x\ on\ z \wedge\ y\ on\ z \wedge\ x\ on\ t \wedge y\ on\ t) \rightarrow$ $(x = y\ \vee z = t)$
(ML3) $(\forall z \in W)(\exists x, y \in W)(x \not\equiv_1 y \wedge x\ on\ z \wedge y\ on\ z)$
(ML4) $(\forall x \in W)(\exists z, t \in W)(z \not\equiv_2 t \wedge x\ on\ z \wedge x\ on\ t)$
(ML5) $(\forall x, z \in W)(\exists t, l \in W)(t \not\equiv_2 l \wedge z \parallel t \wedge z \parallel l \wedge x\ on\ t \wedge x\ on\ l)$

Demostración. Es de comprobación directa, a partir de las definiciones. □

Definición 5. *LLamaremos* **marco de Lobachevski** *a cualquier estructura de la forma* $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2, \|)$*, donde* W *es un conjunto no vacío y* $\{\equiv_1, \equiv_2, \|\}$ *relaciones binarias en* W_F *y para la cual además son válidos los axiomas* (ML0), ..., (ML5) *del lema anterior.*

Después de esta definición los marcos geométricos sobre un plano de Lobachevski serán, en particular, marcos de Lobachevski. En lo que sigue, denotaremos mediante Φ_i a la clase formada por los marcos de Lobachevski (ML).

Haciendo un abuso de notación, designaremos también mediante Φ_i, a la categoría cuyos objetos son los marcos de Lobachevski y cuyos morfismos vienen dados por las aplicaciones

$$f : W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2, \|) \mapsto W'_F = (W', \equiv'_1, \equiv'_2, \|')$$

tales que, para todo $x, y \in W$, verifican que:

(i) si $x \equiv_i y,$ entonces $f(x) \equiv'_i f(y)$, $i = 1, 2$

(ii) si $z \parallel z'$, entonces $f(z) \parallel f(z')$.

4. Equivalencia entre las categorías plano y marco de Lobachevski

Procediendo de forma inversa a como hicimos en el apartado anterior, para cada marco de Lobachevski $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2, \|)$, construiremos un plano de Lobachevski asociado a él que denominaremos plano de Lobachevski sobre W_F y denotaremos por $S(W_F)$.

A tal efecto, procedemos con las siguientes definiciones. Consideremos $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2)$ un marco de Lobachevski y dado $x \in W$, denotaremos por $|x|_i, i = 1, 2$ la clase de equivalencia de x determinada por la relación $\equiv_i$, $i = 1, 2$. Definamos ahora los siguientes conjuntos y relaciones:

$$P_S(W_F) = P = W/_{\equiv_1} = \{|x|_1 : x \in W\}$$

$$L_S(W_F) = L = W/_{\equiv_2} = \{|z|_2 : z \in W\}$$

$$in_S(W_F) = in = \{(|x|_1, |z|_2) : x \in W, z \in W, x\ on\ z\}$$

$$\|_S(W_F) = \| = \{(|z|_2, |z'|_2) : z \in W, z' \in W, z \parallel z'\}$$

Si x, x' representantes de $|x|_1$, y z, z' representantes de $|z|_2$ tales que $x\ on\ z$, utilizando el lema 1 aseguramos la existencia de $x_1 \in W_F$ cumpliendo

$$x' \equiv_1 x \equiv_1 x_1 \equiv_2 z \equiv_2 z'$$

y al ser $\equiv_1$ y $\equiv_2$ relaciones de equivalencia, concluimos que x' *on* z'. Lo cual prueba que la relación *in* está bien definida.

Lema 3. *Sea W_F un marco de Lobachevski, entonces $S(W_F)$ es un plano de Lobachevski.*

Demostración. Se deduce de forma directa, de la propia construcción. □

Teorema 1. *Para cada marco de Lobachevski W_F, el marco W'_F, construido como $W(S(W_F))$ es isomorfo a W_F.*

Demostración. Basta comprobar que la aplicación $f : W_F \mapsto W'_F$ dada como

$$f(x) = (|x|_1, |x|_2) \quad \forall x \in W$$

está bien definida y es un isomorfismo. □

Teorema 2. *Para cada plano de Lobachevski S, el plano S', construido como $S(W(S))$ es isomorfo a S.*

Demostración. Definamos la aplicación $f : S \mapsto S'$, que a cada elemento $x \in P$ y $z \in L$ le asigna

$$f(x) = |(x, z_1)|_1$$

$$f(z) = |(x_1, z)|_2$$

donde la existencia de $z_1 \in L$ con $x \in \ z_1$ nos la garantiza el axioma (IE4) y la de $x_1 \in P$ verificando $x_1 \in \ z$, el axioma (IE3).

No Es difícil comprobar que la aplicación f es un isomorfismo. □

Siendo Σ_i y Φ_i las categorías de los planos y marcos de Lobachevski respectivamente, las construcciones hechas anteriormente, nos permiten definir sendas aplicaciones $W : \Sigma_i \to \Phi_i$ y $S : \Phi_i \to \Sigma_i$ entre los objetos de ambas categorías.

Sea ahora f, un homomorfismo entre dos planos de S y S', y consideremos la aplicación

$$W(f) : W(S) \mapsto W(S')$$

que viene dada del siguiente modo:

$$\text{Si } (x, z) \in W(S), \text{ entonces } W(f)((x, z)) = (f(x), f(z))$$

Con esta definición es claro que el digrama que sigue será conmutativo, convirtiendo a W en un funtor entre las categorías Σ_i y Φ_i.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "W"'] & S' \arrow[d, "W"] \\ W(S) \arrow[r, "W(f)"'] & W(S') \end{tikzcd}$$

Analogamente, si $f : W \mapsto W'$ es un homomorfismo de marcos de Lobachevski, la aplicación

$$S(f) : S(W_F) \mapsto S(W'_F)$$

definida mediante

$$S(f)(|x|_1) = |f(x)|_1, S(f)(|z|_2) = |f(z)|_2$$

hace conmutativo el siguiente diagrama y convierte a S en un funtor entre las categorías Φ_i y Σ_i.

$$\begin{tikzcd} W_F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & W'_F \arrow[d, "S"] \\ S(W_F) \arrow[r, "S(f)"'] & S(W'_F) \end{tikzcd}$$

Para concluir esta sección, diremos que en estas condiciones, un bién conocido teorema de la teoría de categorías (véase [11]), nos permite asegurar que Σ_i y Φ_i conforman categorías equivalentes.

5. Lenguaje

Consideremos un lenguaje multimodal con operadores monarios

$\{[\equiv_1], [\equiv_2], [\not\equiv_1], [\not\equiv_2], [\|]\}$, un conjunto infinito numerable de literales proposicionales $\{p_1, p_2, \dots\}$, junto con las constantes $\bot, \top$ y las conectivas usuales $\{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$.

El conjunto de fbf se define de forma usual. Denotaremos con letras latinas mayúsculas $A, B, C, \dots$ a las fórmulas multimodales de este lenguaje. Además, para simplificar la escritura definimos los siguientes operadores modales secundarios:

- $[\neq]A = [\not\equiv_1]A \wedge [\not\equiv_2]A$
- $[U]A = A \wedge [\neq]A$
- $OA = A \wedge [\neq]\neg A$
- $[on]A = [\equiv_1][\equiv_2]A$
- $[on^{-1}]A = [\equiv_2][\equiv_1]A$

- $\langle R\rangle A = \neg[R]\neg A$, donde
$$[R] \in \{[\equiv_1], [\equiv_2], [\not\equiv_1], [\not\equiv_2], [\|]\}$$

6. Semántica

La semántica que en principio consideramos, para la interpretación del anterior lenguaje será la de Kripke sobre los marcos de la forma $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|\}$, donde W es no vacío y $\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2$ y $\|$ son relaciones binarias arbitrarias sobre W.

Si V es una valoración, de forma inductiva diremos que la fórmula A es verdadera en un estado x de W si:

$$x \models_V p \text{ si y solo si } x \in V(p)$$
$$x \models_V \neg A \text{ si y solo si } x \not\models_V A$$
$$x \models_V A \wedge B \text{ si y solo si } x \models_V A \text{ y } x \models_V B$$
$$x \models_V [R]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(xRy \to y \models_V A),$$

donde
$$R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|\}$$

Recordemos que si $M = (W_F, V)$ es un modelo basado sobre el marco W_F y ϕ es una fórmula tal que $x \models_V \phi$ para todo $x \in W$, se dirá que ϕ en verdadera en M y escribiremos $M \models \phi$. Cuando ϕ sea verdadera en todo modelo basado sobre un marco W_F, se dirá que ϕ es válida en el marco W_F, lo cual se denotará $F \models \phi$, diciendo en tal caso, que F es un marco de ϕ.

Si ϕ es válida en todo marco F perteneciente a una clase de marcos $\mathbf{C}$, se diré que ϕ es $\mathbf{C}$-válida y lo denotaremos $\models_{\mathbf{C}} \phi$. Diremos, en tal caso, que $\mathbf{C}$ es una clase de marcos de ϕ.

El conjunto de todas las fórmulas válidas en una cierta clase de marcos $\mathbf{C}$ se denomina, la lógica de la clase $\mathbf{C}$. En nuestro caso a la lógica de la clase de los marcos de Lobachevski la denotaremos por LML. Por otra parte, recordemos que si Σ y Σ' son dos clases de marcos, decimos que Σ es modalmente definible en Σ' por una fórmula A, si para cada marco $F \in \Sigma'$, A es válida en F si y solo si $F \in \Sigma$.

Definición 6. *Un marco $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|)$ diremos que es $\neq -$estándar si satisface:*

$$(\forall x, y \in W)(x \neq y \leftrightarrow x \not\equiv_1 y \vee x \not\equiv_2 y)$$

Recordemos que no en todos los marcos las modalidaddes secundarias $[\neq]$ y $[U]$, tienen la interpretación semántica habitual (o estándar), pero en el caso de los marcos $\neq -$estándar sí.

En nuestro caso, los marcos de Lobachevski son $\neq -$estándar.

Definición 7. *Un marco $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|)$ lo llamaremos cuasi-estándar si es $\neq -$estándar y la relación $\not\equiv_i$ es complemento de la relación $\equiv_i$, $i = 1, 2$.*

Lema 4. *La clase de marcos cuasi-estándar es modalmente definible en la clase de marcos $\neq -$estándar mediante las siguientes fórmulas:*

$$[\text{MGEI}^*] \quad \langle U\rangle p \to \langle\equiv_i\rangle p \vee \langle\not\equiv_i\rangle p,\ i = 1, 2$$
$$[\text{MGEI}^{**}] \quad \langle\equiv_i\rangle[\neq]p \to [\not\equiv_i]p, i = 1, 2$$

Demostración. Consideremos un marco $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|) \neq -$estándar, entonces W_F es cuasi-estándar si y solo si se cumple:

1. $\equiv_i \cup \not\equiv_i = W \times W$
2. $\equiv_i \cap \not\equiv_i = \emptyset$

Ahora basta con comprobar, que los axiomas MGEI* y MGEI** son válidos si y solo si (1) y (2) se cumplen en W_F. $\square$

Lema 5. *La clase de los marcos de Lobachevski es modalmente definible en la clase de marcos cuasi-estándar mediante las siguientes fórmulas:*

(LMGL0) $[\equiv_i]p \to p$, $\langle\equiv_i\rangle[\equiv_i]p \to p$,
$[\equiv_i]p \to [\equiv_i][\equiv_i]p$, $i = 1, 2$
(LMGL0 *) $\langle U\rangle p \to \langle\|\rangle p \vee \langle on^{-1}\rangle\langle on\rangle p$, $\langle\equiv_2\rangle p \to \langle\|\rangle p$,
$[\equiv_2]q \wedge \langle on^{-1}\rangle\langle on\rangle([\neq]p \wedge \neg q) \to [\|]p$
(MGL1) $\langle U\rangle p \to \langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle p$
(LMGL2) $\langle on\rangle(p \wedge \langle on^{-1}\rangle([\neq]q \wedge r)) \to$
$([on](\langle\equiv_2\rangle p \vee [on^{-1}]q) \vee \langle\equiv_1\rangle r)$
(LMGL) $p \to \langle on^{-1}\rangle\langle\not\equiv_1\rangle\langle on\rangle p$
(LMGL4) $p \to \langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle p$
[LMGL5] $\langle U\rangle p \wedge q \to \langle on\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle\not\equiv_2\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle on^{-1}\rangle q)) \vee$
$\langle U\rangle(\langle on\rangle p \wedge q)$

Demostración. Las fórmulas (LMGL0) se corresponden con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de $\equiv_i$, $i = 1, 2$.

Las de (LMGL0*), se corresponden respectivamente con las condiciones de primer orden:

1. $x \parallel y \vee (\exists z \in W)(x\ on^{-1} z \wedge z\ on\ y)$
2. $x \equiv_2 y \to x \parallel y$
3. $(\exists z \in W)(x\ on^{-1} z \wedge z\ on\ y) \wedge x \parallel y \to x \equiv_2 y$

cuya conjunción es equivalente a la definición dada de paralelismo.

El resto de expresiones modales (LMGL1), ..., (LMGL5), se corresponden con los axiomas de primer orden (ML1)...(ML5) respectivamente.

Desarrollaremos la prueba de correspondencia, para el caso del axioma que caracteriza a esta geometría, (LMGL5). Observemos para ello, que la fórmula en cuestión, resulta ser una fórmula de Sahlqvist y tenemos por tanto, asegurada la existencia de una fórmula de primer orden que se corresponde con ella. Usando la traslación estándar, obtendremos como primer paso, la fórmula de segundo orden correspondiente a (LMGL5).

$$ST_x(\langle U\rangle p \wedge q \rightarrow \langle on\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle\not\equiv_2\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle on^{-1}\rangle q)) \vee \langle U\rangle(\langle on\rangle p \wedge q))$$
$$\Updownarrow$$
$$ST_x(\langle U\rangle p \wedge q) \rightarrow ST_x(\langle on\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle\not\equiv_2\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle on^{-1}\rangle q)) \vee \langle U\rangle(\langle on\rangle p \wedge q))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P, Q)((\exists z)(Pz \wedge Qx) \rightarrow (\exists l)(x\ on\ l) \wedge (\exists z_2)(l \parallel z_2 \wedge Pz_2)\wedge$$
$$(\exists t)(l \not\equiv_2 t) \wedge (\exists z_4)(t \parallel z_4 \wedge Pz_4) \wedge (\exists x_1)(t\ on^{-1} x_1 \wedge Qx_1)\vee$$
$$(\exists x_2, z_5)(x_2\ on\ z_5 \wedge Pz_5 \wedge Qx_2))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P, Q)(\forall z)(Pz \wedge Qx \rightarrow (\exists l)(x\ on\ l) \wedge (\exists z_2)(l \parallel z_2 \wedge Pz_2)\wedge$$
$$(\exists t)(l \not\equiv_2 t) \wedge (\exists z_4)(t \parallel z_4 \wedge Pz_4) \wedge (\exists x_1)(t\ on^{-1} x_1 \wedge Qx_1)\vee$$
$$(\exists x_2, z_5)(x_2\ on\ z_5 \wedge Pz_5 \wedge Qx_2))$$

Elijamos las mínimas asignaciones de P y Q que hacen el atecedente verdadero, $\sigma(P) \equiv \lambda u.(z = u), \sigma(Q) \equiv \lambda u.(x = u)$; en consecuencia obtenemos

$$(\forall z)(z = z \wedge x = z \rightarrow (\exists l)(x\ on\ l) \wedge (\exists z_2)(l \parallel z_2) \wedge (z = z_2)\wedge$$
$$(\exists t)(l \not\equiv_2 t) \wedge (\exists z_4)(t \parallel z_4) \wedge (z = z_4) \wedge (\exists x_1)(t\ on^{-1} x_1) \wedge (x = x_1)\vee$$
$$(\exists x_2, z_5)(x_2\ on\ z_5) \wedge (z = z_5) \wedge (x = x_2))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall z)(\exists l)((x\ on\ l) \wedge (l \parallel z) \wedge (\exists t)(l \not\equiv_2 t) \wedge (t \parallel z) \wedge (t\ on^{-1} x) \vee (x\ on\ z))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall z)(\exists l, t)((x\ on\ l) \wedge (l \parallel z) \wedge (l \not\equiv_2 t) \wedge (t \parallel z) \wedge (x\ on\ t) \vee (x\ on\ z))$$

De esta forma se llega a la correspondencia local de nuestra fórmula y basta generalizar para obtener el resultado:

$$(\forall x, z)(\exists l, t)((x\ on\ l) \wedge (l \parallel z) \wedge (l \not\equiv_2 t) \wedge (t \parallel z) \wedge (x\ on\ t) \vee (x\ on\ z))$$

7. Axiomática

Proponemos la siguiente axiomatización para LML:

Axiomas

[I] Todas las tautologías de la lógica de proposiciones

[II] $[R](p \rightarrow q) \rightarrow [R]p \rightarrow [R]q, R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|\}$, $\langle\not\equiv_i\rangle[\not\equiv_i]p \rightarrow p$, $i = 1, 2$, $\langle\|\rangle[\|]p \rightarrow p$.

[($\neq_1$)] $\langle\neq\rangle[\neq]p \rightarrow p$

[($\neq_2$)]$p \wedge [\neq]p \rightarrow [\neq][\neq]p$

[($R \subseteq U$)]$[U]p \rightarrow [R]p, R \in \{\equiv_1, \equiv_2\}$

[LMGL*] $\langle U\rangle p \rightarrow \langle\equiv_i\rangle p \vee \langle\not\equiv_i\rangle p$, $i = 1, 2$

[LMGL**] $\langle\equiv_i\rangle[\neq]p \rightarrow [\not\equiv_i]p, i = 1, 2$

[LMGL0] $[\equiv_i]p \to p, \langle\equiv_i\rangle[\equiv_i]p \to p, [\equiv_i]p \to [\equiv_i][\equiv_i]p, i = 1, 2$

(LMGL0*) $\langle U\rangle p \to \langle\|\rangle p \vee \langle on^{-1}\rangle\langle on\rangle p$, $\langle\equiv_2\rangle p \to \langle\|\rangle p$, $[\equiv_2]q \wedge \langle on^{-1}\rangle\langle on\rangle([\neq]p \wedge \neg q) \to [\|]p$

(LMGL1) $\langle U\rangle p \to \langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle p$

(LMGL2) $\langle on\rangle(p \wedge \langle on^{-1}\rangle([\neq]q \wedge r)) \to ([on](\langle\equiv_2\rangle p \vee [on^{-1}]q) \vee \langle\equiv_1\rangle r)$

(LMGL3) $p \to \langle on^{-1}\rangle\langle\not\equiv_1\rangle\langle on\rangle p$

(LMGL4) $p \to \langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle p$

(LMGL5) $\langle U\rangle p \wedge q \to \langle on\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle\not\equiv_2\rangle(\langle\|\rangle p \wedge \langle on^{-1}\rangle q)) \vee \langle U\rangle(\langle on\rangle p \wedge q)$

Reglas de inferencia:

(MP) modus ponens: si $\vdash A$ y $\vdash A \to B$ entonces $\vdash B$,

(RN) regla de necesidad: si $\vdash A$ entonces $\vdash [R]A$, $R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \|\}$,

(IR) regla de irreflexividad: si p no aparece en A y $\vdash Op \to A$ entonces $\vdash A$,

(RS) regla de sustitución de letras proposicionales.

8. Corrección y Completitud

El sistema axiomático LML será correcto respecto a la clase de los marcos de Lobachevski, si por una parte todos sus axiomas son válidos en dicha clase y por otro lado, sus reglas de inferencia son también admisibles.

La primera cuestión la hemos asegurado en la propia construcción. En cuanto a la segunda, solo restará hacer la comprobación en el caso de la regla de irreflexividad, ya que las restantes son las usuales en cualquier lógica normal y son válidas en cualquier clase de marcos.

Así pues, supongamos que $Op \to A$ es válida en nuestra clase de marcos y que por contra A no lo sea. Existirá por tanto una valoración V y un punto w en alguno de nuestros marcos, tal que $w \not\models_V A$. Consideremos una nueva valoración V' definida como $V'(p) = V(p)$ si $p_i \neq p$ y $V'(p) = \{w\}$. De esta forma $w \models_{V'} Op$ y como $Op \to A$ es una fórmula válida tendremos que $w \models_{V'} A$, pero al no intervenir el literal p en A, concluimos que $w \models_V A$, lo que nos lleva a una contradicción.

Por otra parte, para asegurar la completitud del sistema, haremos uso de un un resultado general denominado teoremas SD, y debido a Yde Venema (véase [20]). En el trabajo reseñado, el autor da una prueba general de completitud para lógicas multimodales conteniendo el operador $\neq$, la regla de irreflexividad (IR) para $[\neq]$ y satifaciendo ciertas condiciones:

- Por cada operador [\$], el lenguaje debe contener el operador inverso $[\$^{-1}]$, relacionado con [\$] mediante los siguientes axiomas. $\langle\$\rangle[\$^{-1}]A \to A$ y $\langle\$^{-1}\rangle[\$] \to A$. Obviamente la lógica LML satisface esta condición; para cada operador \$, el inverso es él mismo.
- La lógica (normal) debe contener los mínimos axiomas que hagan a los operadores tensionados junto con los axiomas $(\neq_1), (\neq_2)$ y $(R \subseteq U)$. El resto de axiomas adicionales deben ser fórmulas de Sahlqvist.

En estas condiciones el teorema SD asegura la completitud de la lógica, en la clase de marcos modalmente definible por los axiomas adicionales. En nuestro caso LML se encuentra en las condiciones del teorema, por lo que es completa respecto a los marcos de Lobachevski.

Referencias

[1] **Balbiani P.** *The modal multilogic of geometry*, J. of Appied Nonclassical Logics, **8**(1998),259–281.

[2] **Balbiani P., V. Dugat, L. Fariñas del Cerro & A. López**. *Éléments de Géométrie Mécanique.* Hermès, 1994.

[3] **Ph. Balbiani, L. Fariñas del Cerro, T. Tinchev & D. Vakarelov**. *Modal Logic for incidence geometries.* Journal of Logic and Computation, **7** (1997), 59–78.

[4] **Blumental L.** *A modern view of Geometry.* Dover.

[5] **Coxeter H.** *Fundamentos de Geometría.* Limusa.

[6] **Gabbay D.** *An irreflexivity lemma with aplications to axiomatizations of conditions on tense frames.* In *Aspects of Philosophical Logic*, U. Mönnich, ed. pp. 67-89. Reidel, 1981.

[7] **Gadbay D. & I. Hodkinson**. *An axiomatization of the temporal logic with until and since over the real numbers.* Journal of Logic and Computation, **1** (990), 229–259.

[8] **Gadbay D., I. Hodkinson & M. Reynolds**. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, Vol. I. Oxford University Press, 1995

[9] **Hilbert D.** *Les Fondements de la Géométrie*. Dunod, Paris, 1971.

[10] **Hughes G. & M. Cresswell**. *A companion to Modal Logic*. Methuen, London, 1984.

[11] **Jacobson N.** *Basic Algebra II*. W. H. Freeman and Company, New York, 1980.

[12] **Marx M.** *Complexity of modal logics of relations.* Technical Report ML–97–02, Institute for logic, Languaje and Computation, University of Amsterdam, 1997.

[13] **Marx M. & Y. Venema.** *Multidimensional Modal Logic*. Kluver Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[14] **Rijke M.** *The modal logic of inequality.* Journal of Simbolic Logic, **57** (1992), 566–584.

[15] **Sahlqvist H.** *Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic.* In *Proceeding of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Uppsala, Sweden. 1973, s. Kanger, ed. pp: 110–118. North-Holland. Amsterdam, 1975.

[16] **Patrick Blackburn, Mararten de Rijke & Y de Venema**. *Modal Logic*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.

[17] **Vakarelov D.** *A modal theory of arrow.* In *Proceedings of the logic in AI. European Workshop JELIA' 92.* Berlin, Germany, September 1992. D. Pearce and G. Wagner. eds. pp. 1-24. Vol. 633 of Lectures Notes in Artificial Intelligence. Springer-Verlag, Berlin 1992.

[18] **Venema Y.** *Modal derivation rules.* ITLI prepublication series for mathematical logic and foundations ML–01–07, University of Amsterdam. Amsterdam, 1991.

[19] **Venema Y.** *Many dimensional Modal Logic*. Doctoral dissertation. University of Amsterdam, 1992.

[20] **Venema Y.** *Derivation rules as anti-axioms in modal logic.* Journal of simbolic Logic, **58** (1993), 1003–1034.

[21] **Wright G.** *A modal logic of space.* In *The Philosophy of Nicholas Rescher*, F. Sosa, ed. Reidel, Dordrecht, 1979.