

MARIPOSAS Y 3-VARIEDADES

por

M. H. Hilden*, J. M. Montesinos[†], D. M. Tejada & M. M. Toro[‡]

Dedicado a la memoria del profesor Jairo Charris C.

Resumen

Hilden, M. H., J. M. Montesinos, D. M. Tejada & M. M. Toro: Mariposas y n -variedades. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 71–78, 2004. ISSN 0370-3908.

En este artículo mostraremos que para cada diagrama de un nudo 3-coloreable se le puede asociar, en forma canónica, una 3-bola (llamada mariposa) con caras identificadas por reflexiones topológicas, la cual se puede triangular y 4-colorear, de tal manera que la coloración del nudo y de la triangulación resultan compatibles. Como corolario se obtiene que para toda 3-variedad hay al menos una bola asociada a ella con dichas características.

Palabras clave: Nudos, grupo fundamental, 3-variedades, recubrimientos ramificados.

Abstract

In this paper we show that for any 3-colorable knot diagram there is a canonic 3-ball, called butterfly, with faces that are identified by topological reflections. Moreover, we prove that this ball admits a 4-colored triangulation compatible with the 3-coloration of the knot. As a corollary we associate to any 3-manifold at least one of these balls.

Key words: Knots, Fundamental group, 3-manifolds, Branched coverings.

*Department of Mathematics, University of Hawaii, Honolulu, Hawaii 96825, USA. e-mail: mike@math.hawaii.edu

[†]José María Montesinos Amilibia, Departamento de Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. e-mail: montesin@mat.ucm.es

[‡]Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 3840, Medellín, Colombia. e-mail: dtejada@perseus.unalmed.edu.co ; mmtoro@perseus.unalmed.edu.co

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: Primary 57M25. Secondary: 57M12.

1. Introducción

Aproximadamente, desde hace un siglo, el problema de la clasificación de 3-variedades está planteado. Prácticamente, desde ese entonces la clasificación de las superficies (2-variedades) es conocida. Específicamente, una superficie (2-variedad) compacta, conexa sin frontera es una esfera o una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. Este es un teorema sencillo y elegante. Un resultado similar se busca para las 3-variedades.

El teorema de clasificación de superficies se prueba usando métodos de topología combinatoria. Una de las pruebas clásicas se hace tomando polígonos con un número par de lados e identificando los lados por parejas. Se sabe que toda 3-variedad es una bola (o poliedro) con un número par de caras poligonales que se identifican por parejas. Así que uno pensaría que es posible generalizar la prueba de superficies a 3-variedades, pero infortunadamente, al tratar de imitar dicha prueba en dimensión 3, uno de los problemas que se encuentra es que el número de formas de identificar un par de caras fijas puede ser grande, lo cual hace que rápidamente se descarte este método.

Nuestro trabajo pretende reactivar este estudio, concentrándonos en bolas para las cuales identificamos sus caras de una forma precisa y única. Estas bolas las llamamos mariposas ya que la forma de identificar sus caras nos recuerda como se cierran las alas de una mariposa. Dichas bolas en sí mismas no nos producirán cualquier 3-variedad, para ello deberemos recurrir al Teorema de Hilden y Montesinos (véase [Hi], [Mo1]) que relaciona para cada 3-variedad un nudo 3-coloreado.

1.1. Preliminares

1.1.1. Resultados de la teoría de nudos

Recordaremos en esta sección algunos conceptos y teoremas de la teoría de nudos.

Un *nudo* K es una copia homeomorfa de S^1 en $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Una proyección de un nudo sobre un plano, tal que la gráfica tenga sólo puntos simples o dobles y los segmentos que la formen se intersecten transversalmente, es llamada un *diagrama del nudo* (véase [Ro]). Las Figuras 2, 3 y 4 ilustran distintos diagramas.

El *grupo de un nudo* K es el grupo fundamental de $S^3 \setminus K$ y es denotado por $\pi_1(K)$. Para cada diagrama de un nudo existe una presentación canónica de su grupo, la cual es llamada *la presentación de Wirtinger*. Esta

presentación tiene tantos generadores como tramos continuos tenga el diagrama y tantas relaciones como cruces tenga el diagrama, siendo una cualquiera de ellas redundante. Cada una de las relaciones se obtiene teniendo en cuenta la orientación del nudo en dicho cruce.

En las figuras siguientes, donde las letras denotan los generadores asociados a cada tramo continuo, mostramos la relación que aparece con cada estilo de cruce.

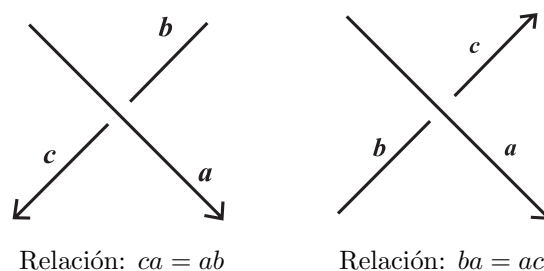


Figura 1.

Ejemplo 1. La presentación

$$\langle a, b, c, d, f, g, h, i, j : da = ac; af = fb; hb = bg; \\ cg = gb; dc = cf; ad = dj; if = fh; gi = if \rangle$$

es una presentación de Wirtinger para el grupo del nudo 9_{45} , que ilustramos en la Figura 2.

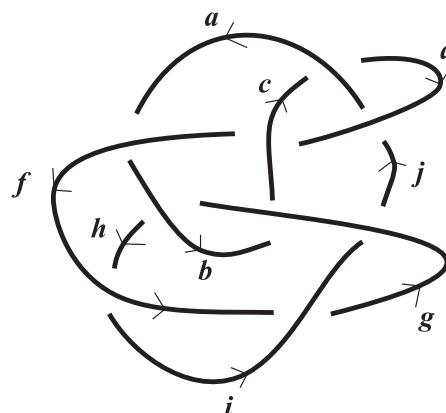


Figura 2.

Definición 2. Decimos que un nudo (o enlace) es *3-coloreable* si admite un diagrama al cual se le puede hacer lo siguiente:

1. Colorear cada arco del diagrama.
2. Usar un total de 3 colores.
3. En cada cruce debe ocurrir una sola de las siguientes posibilidades:
 - (a) Cada arco que está en dicho cruce se colorea con diferente color.

(b) Se usa únicamente un color.

Nota 3. Realmente si un nudo es 3-coloreable, entonces todos sus diagramas lo son. Esto es porque la propiedad de ser 3-coloreable es invariante bajo los movimientos de Reidemeister (véase [FaSt]).

Ejemplo 4. Los siguientes nudos son 3-coloreables.

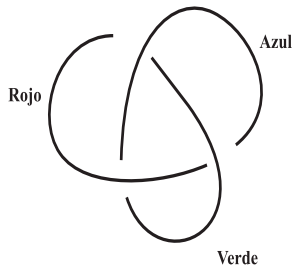


Figura 3a.

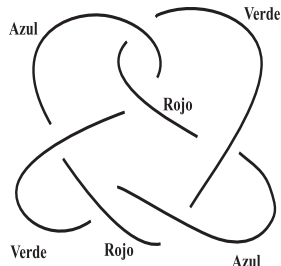


Figura 3b.

Sin embargo, no todo nudo es 3-coloreable, por ejemplo es fácil comprobar que el nudo del ocho de la Figura 4 no lo es.

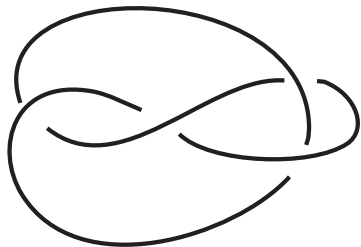


Figura 4.

Sea $\Sigma_3 = \{id, (0\ 1), (1\ 2), (0\ 2), (0\ 1\ 2), (0\ 2\ 1)\}$ el grupo simétrico de orden 3.

Teorema 5. Sea K un nudo 3-coloreable. Entonces su grupo fundamental admite una representación u homomorfismo (no trivial) en Σ_3 .

Demostración. En efecto, sea D_K un diagrama dado del nudo K , el cual está 3-coloreado. Sean $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de generadores de la presentación de Wirtinger para este diagrama. Entonces cada arco tiene asignado un generador y un color. Supongamos que los colores son *verde*, *rojo* y *azul*, definimos $\Phi : \pi_1(K) \rightarrow \Sigma_3$ tal que $\Phi(\text{generador asociado a arco verde}) \mapsto (0\ 1)$, $\Phi(\text{generador asociado a arco rojo}) \mapsto (1\ 2)$ y $\Phi(\text{generador asociado a arco azul}) \mapsto (0\ 2)$. Ahora, ya que las relaciones de Wirtinger se satisfacen en cada cruce y como, además, $(i\ j)(i\ k)(i\ j)^{-1} = (j\ k)$ y $(i\ j)(i\ j)(i\ j)^{-1} = (i\ j)$ para i, j, k diferentes entre sí

en $\{1, 2, 3\}$, entonces se sigue inmediatamente que Φ es una representación u homomorfismo de grupos. \square

Así pues, cada vez que tengamos un diagrama de un nudo 3-coloreado, para cada arco escribiremos la transposición asociada, en vez de escribir el nombre de su color.

Las pruebas de los teoremas que enunciaremos a continuación se pueden consultar en [BuZi], [CrFo], [Fo], [Kaw], [Ka], [Mo2], [Ro], [SeTh1] o en [SeTh2].

Sean K un nudo en S^3 , Σ_n el grupo simétrico de n elementos, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

Teorema 6. Para toda representación $\rho : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \Sigma_n$ existe una única n -cubierta ramificada $p(\rho) : M^3 \rightarrow S^3$ asociada a ρ , donde M^3 es una 3-variedad y cuyo conjunto de ramificación es el nudo K (o un subconjunto de K). Además, si ρ es transitiva M^3 es conexa.

Teorema 7. Sea M^3 una 3-variedad. Para toda n -cubierta $p : M^3 \rightarrow S^3$ ramificada sobre un nudo K , existe una única representación $\rho(p) : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \Sigma_n$ asociada a p , salvo conjugación en Σ_n . Además, si M^3 es conexa ρ es transitiva.

El siguiente teorema fue probado, simultánea e independientemente, por M. H. Hilden y J. M. Montesinos.

Teorema 8. Para toda 3-variedad M^3 cerrada y orientable, existe una 3-cubierta ramificada sobre un nudo, la cual es simple.

Demostración. Véase [Hi] y [Mo1]. \square

Recordemos que una cubierta ramificada p sobre un nudo K se llama *simple* si la representación $\rho(p)$ asociada a ella envía los generadores de Wirtinger, de un diagrama de K , a transposiciones. Así pues, el teorema anterior es equivalente a:

Teorema 9. Para toda 3-variedad M^3 cerrada y orientable, existe una 3-cubierta ramificada sobre un nudo 3-coloreable.

El teorema que sigue es debido a Goodman y Onishi (véase [GoOn] y [Te]), si bien no hace parte de la Teoría de Nudos, lo utilizaremos en la prueba de nuestro Teorema Principal.

Teorema 10. Sean B^3 una bola con frontera S^2 , entonces toda triangulación 4-coloreada Δ^2 de S^2 puede ser extendida a una triangulación 4-coloreada Δ de la bola B^3 .

2. Mariposas

En esta sección, inicialmente, damos la definición de mariposa, ilustrándola con algunos ejemplos y, a continuación, veremos que todo diagrama de un nudo tiene una mariposa asociada. En [HMTT1], [HMTT2] y en [Te] se encuentra una definición de mariposa más formal y además, se pueden consultar más detalles de las pruebas que aquí presentamos.

Definición 11. Una *mariposa* es una 3-bola con un número par de caras poligonales (llamadas *alas*) identificadas por parejas. Dos alas se pueden identificar si ellas comparten una arista y la identificación se realiza al hacer una reflexión topológica (no necesariamente isometría) a lo largo de la arista común. La unión de las aristas sobre las cuales se hacen las reflexiones es llamada el *tronco* de la mariposa.

Ejemplo 12. Las 3-bolas siguientes son todas mariposas, las reflexiones están indicadas por las flechas dobles.

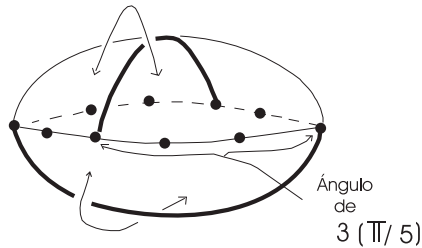


Figura 5a.

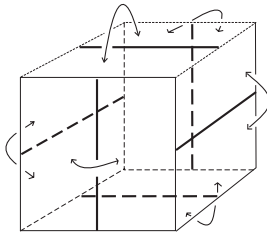


Figura 5b.

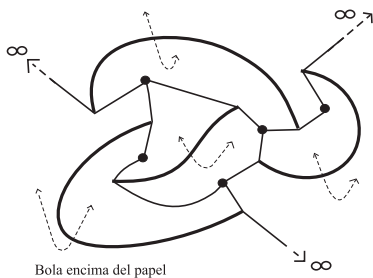


Figura 5c.

Estas tres mariposas tienen todas la particularidad que al hacer la identificación de todas las parejas de alas se obtiene la esfera S^3 (en [HMTT2] se prueba que esto siempre es así) y el tronco se convierte en un nudo inmerso en S^3 . En efecto, la primera mariposa produce el nudo racional $\frac{5}{3}$ que ilustramos a continuación (véase prueba en [HMTT2] y en [Te]).

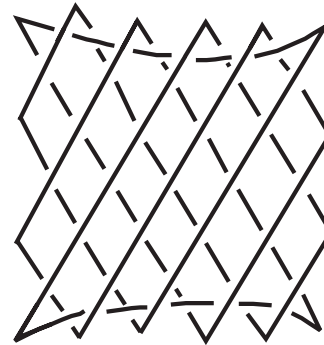


Figura 6.

La segunda mariposa, debida a Thurston (véase [Thu]) produce los anillos de Borromeo. Y como veremos a continuación, al hacer las identificaciones de las caras de la última mariposa obtenemos el nudo del ocho (Figura 4). Obsérvese que ésta la hemos dibujado en forma diferente, pues allí suponemos que la frontera de la mariposa es el papel y que la 3-bola está sobre el plano del papel.

Definición 13. Si al realizar las identificaciones de las caras de una mariposa el tronco produce un nudo inmerso en S^3 , decimos que *el nudo admite una representación de mariposa*.

Teorema 14. *Todo nudo admite una representación de mariposa.*

Demostración. La prueba se puede consultar en [HMTT1], [Te] o en el artículo “Nudos Combinatorios y Mariposas” de M. M. Toro que aparece en esta misma revista. \square

Dicha prueba es constructiva y permite deducir el siguiente algoritmo:

Algoritmo para construir la mariposa.

1. Partimos de un diagrama del nudo, es decir de una colección S de arcos disjuntos en un plano P (del

papel). (Ilustraremos el algoritmo con el nudo del ocho de la Figura 4.)

2. En el interior de cada región acotada y determinada por el diagrama del nudo marcamos un punto B (que depende de la región). En la región no acotada, dicho punto B es el infinito, pero no lo marcamos.

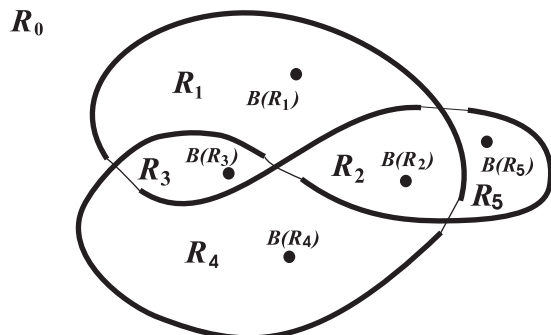


Figura 7.

3. Cada extremo de un arco de S lo unimos con los dos puntos B pertenecientes a las dos regiones adyacentes a dicho arco, por medio de un arco contenido en el plano P del papel. El papel queda así poligonalizado.

4. Las caras adyacentes a cada segmento de S se identifican por reflexión en el segmento, como lo indican las dobles flechas de la Figura 5c.

5. Sobre el plano P del papel suponemos que hay una 3-bola cuya frontera es el plano P del papel y por lo tanto está poligonalizada.

Esta 3-bola es la mariposa buscada, cuya frontera visualizamos en la Figura 5c. En efecto, al hacer las identificaciones en dicha bola obtenemos el cono inmerso en S^3 de la Figura 8, donde se visualiza claramente en nudo del ocho.

Definición 15. La mariposa obtenida con el algoritmo anterior la llamaremos *la mariposa asociada al diagrama del nudo*.

Nota 16. Según dicho algoritmo, por cada arco de la colección S , hay dos alas de la mariposa adyacentes a él, las cuales se identifican por reflexión a lo largo de dicho arco y tienen la forma que se muestra en la Figura 9.

Notación: En cada cara distinguiremos dos clases de vértices: aquellos que son extremos de los arcos del nudo, que denotaremos por A , y los que ya hemos denotado por B , los cuales se identifican todos con el vértice del cono (véase Figura 8), el cual también hemos marcado con B en dicha figura.

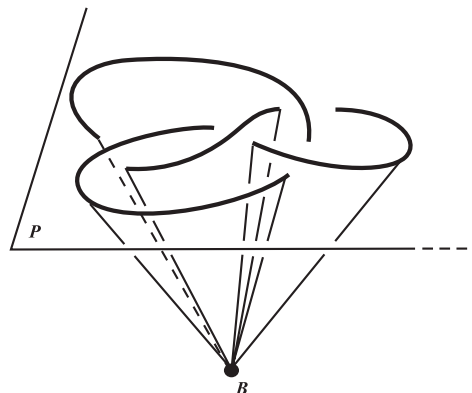


Figura 8.

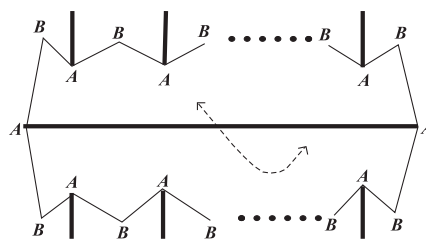


Figura 9.

3. Teorema principal

Primero estableceremos lo que entenderemos por una triangulación en una variedad y en una mariposa.

Definición 17. Sean M una n -variedad, $\Delta = \{T_i\}_{i \in I}$ una colección de n -simplex (véase [Mu]). Si $M = \bigcup_{i \in I} T_i$ y es tal que la intersección entre cada par T_i, T_j ($i \neq j$) es o vacía, o un único $(n - k)$ -simplex ($k < n$), se dice que $\Delta = \{T_i\}_{i \in I}$ es una *triangulación* de M .

Diremos que *una mariposa está triangulada* si tiene una triangulación Δ , tal que al realizar las identificaciones de la frontera, los k -simplex de Δ (contenidos en la frontera) se identifican con k -simplex de Δ (también contenidos en la frontera), para $k = 0, 1, 2$.

Una n -coloración de una triangulación Δ es una función $C : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, donde V es el conjunto de vértices (0-simplex) de Δ , tal que dos vértices de un mismo simplex no tienen el mismo número (o color).

Al comienzo hemos definido lo que es un nudo 3-coloreable. En nuestro Teorema Principal relacionaremos la 3-coloración de un nudo con la 4-coloración de una mariposa asociada a éste. Definimos entonces lo que significa que estas dos coloraciones sean compatibles.

Definición 18. Sea D_K el diagrama de un nudo 3-coloreable, B_K la mariposa asociada a este diagrama. Si B_K está triangulada y 4-coloreada, entenderemos que la 4-coloración de la mariposa B_K es compatible con la 3-coloración del nudo (o que ambas coloraciones son compatibles) si cuando se identifican dos triángulos de la frontera de B_K por la reflexión en un arco cuya transposición asociada es $(i j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces los colores de sus vértices realizan dicha transposición. En este caso el índice 4 siempre permanecerá fijo. Así, los vértices de color 4 se identifican sólo con vértices del mismo color.

Ejemplo 19. En la gráfica siguiente tenemos una mariposa asociada al nudo racional $\frac{3}{1}$, llamado trébol, la cual tiene una triangulación 4-coloreada compatible con la 3-coloración del nudo. Por simplicidad en el dibujo no mostramos sino los triángulos de la frontera.

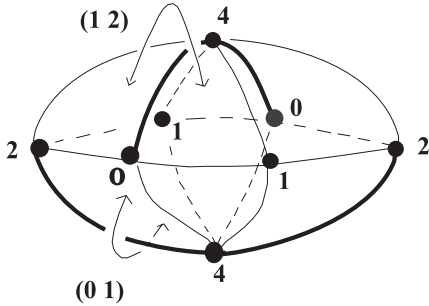


Figura 10.

En el teorema siguiente veremos que siempre es posible encontrar una mariposa de este estilo para cualquier nudo dado.

Teorema 20. [Teorema Principal] *La mariposa asociada al diagrama de un nudo K 3-coloreable es triangulable y 4-coloreable. Además ambas coloraciones son compatibles entre sí.*

Demostración. La prueba de este teorema es constructiva y la exhibiremos dando los pasos específicos de la construcción. Nuestro objetivo es encontrar una triangulación de la frontera de la mariposa que esté bien 4-coloreada y sea compatible con la 3-coloración del nudo K . Una prueba más detallada se encuentra en [HMTT1] y en [Te].

Primero construiremos una triangulación Δ de la frontera de la mariposa asociada al diagrama de K , la cual tendremos que refinar para garantizar que es 4-coloreable.

Paso 1. (Vértices y aristas de Δ .) Los vértices de Δ son todos los puntos de tipo A y B (según el algoritmo), además, un punto por cada arco del nudo, el cual es tomado en el interior de cada arco. Estos últimos puntos los llamaremos de tipo D . Las aristas son las curvas AB y AD comprendidas en las fronteras de las caras de la mariposa y, además, las siguientes curvas disjuntas (excepto en D) DA y DB , que pertenecen a las 2 caras de la mariposa que son adyacentes al arco que contiene a D . Las ilustramos en la figura siguiente:

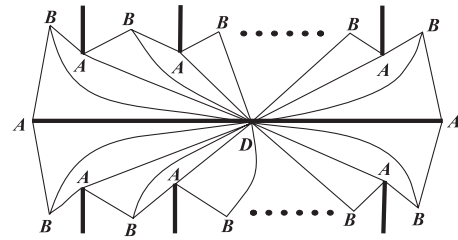


Figura 11.

Paso 2. (Se colorean los vértices de Δ .) A todos los vértices de tipo D se les asignará como color el número 4. Los vértices de tipo A se colorearán según la siguiente regla: si un vértice A pertenece a un arco cuya transposición asociada es $(i j)$, el número asociado será $k \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Los vértices de tipo B se colorean así: comenzamos con uno cualquiera y lo coloreamos con cualquiera de los números 1, 2 ó 3. Una vez coloreado este vértice, los colores de todos los otros quedan predeterminados de la siguiente manera: si R_1 y R_2 son dos regiones cualesquiera que tienen un arco común cuya transposición asociada es $(i j)$, y si se tiene la coloración $k \in \{1, 2, 3\}$ para el vértice $B(R_1)$, entonces el vértice $B(R_2)$ adquiere la coloración de la imagen de k mediante la acción de $(i j)$ que denotaremos por $(i, j)k$. Esta regla para colorear y el hecho de que saliendo de uno de los vértices de tipo B se puede pasar a cualquier otro saltando arcos en forma transversal, ya que K es un nudo, nos implica que es suficiente escoger el color de uno solo de los $B(R_i)$ para que el resto quede coloreado.

Se observa que por la forma en la que hemos coloreado los vértices de Δ y por las relaciones de Wirtinger, la 4-coloración de Δ es compatible con la 3-coloración del nudo.

De esta manera han quedado coloreados todos los vértices de la triangulación Δ , sin embargo, esta coloración puede no ser una buena, ya que puede ocurrir

que queden dos vértices de un mismo triángulo con el mismo color. Si esto ocurriera, dichos vértices deberán ser de tipo A y B , pues los vértices de tipo D son los únicos que tienen el color 4 y ellos no se conectan entre sí por aristas.

Paso 3. (Refinamos Δ .) Pensemos ahora que tenemos un vértice de tipo A (que está en el extremo de un arco cuya transposición asociada es $(i j)$), que tiene el color k , y que se conecta por una arista a un vértice de tipo B que tiene el mismo color k . Es fácil ver que el otro vértice de tipo B que está conectado al del tipo A debe tener también la coloración k , ya que k está fijo con $(i j)$ y, además, si la transposición asociada al arco que sobrepasa en dicho cruce es $(i' j')$ entonces el color de los vértices de tipo A y B del otro lado del cruce debe ser, para ambos, $(i' j')k$, es decir, ellos tendrán también un mismo color.

Con el fin de evitar dicha discrepancia debemos hacer algunas subdivisiones. Tomamos entonces, un punto en el interior de cada una de las aristas en donde se da una discrepancia, de tal manera que al hacer las reflexiones estos puntos resulten identificados (véase Figura 12). Dichos puntos los llamaremos de tipo C y los unimos con los vértices de tipo D de las dos caras adyacentes a la arista a la cual pertenecía el de tipo C .

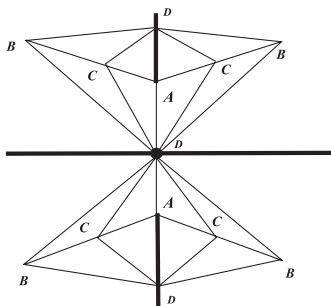


Figura 12.

Paso 4. (Coloreamos los vértices tipo C .) La coloración la hacemos independientemente en todo cruce donde había discrepancia de colores. Para colorear los cuatro puntos de tipo C adyacentes a un cruce, tomamos uno de ellos y le damos el color $i \in \{1, 2, 3\}$, donde i es diferente del color que tengan los extremos de la arista donde está localizado. Inmediatamente, el color de los otros tres puntos de tipo C (del mismo cruce) queda predeterminado, además, dicha coloración no predetermina la coloración de ningún otro punto del tipo C . Ilustremos la situación con la figura siguiente.

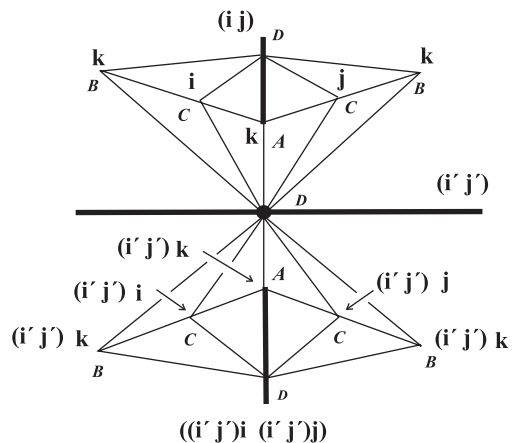


Figura 13.

De nuevo se tiene que, debido a las relaciones de Wirtinger, la coloración de los vértices de tipo C es compatible con la 3-coloración del nudo K .

Paso 5. (Se triangula el interior de la mariposa.) Como ya tenemos la frontera 4-coloreada, utilizamos el Teorema 10, de Goodman y Onishi, para extender esta triangulación y su coloración hacia el interior de la mariposa. \square

Corolario 21. Para toda 3-variedad existe al menos una mariposa triangulada y 4-coloreada asociada a ella.

Demostración. Esto es consecuencia del Teorema 8, de Hilden y Montesinos, y del teorema anterior. \square

Ilustraremos el teorema principal con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 22. Tomemos el nudo 3-coloreable 6_1 de la Figura 3b. Usando el algoritmo construimos la mariposa asociada a este diagrama (Figura 14). Nótese que por claridad en la ilustración hemos puesto el punto del infinito (que es de tipo B) varias veces, sin embargo es el mismo punto.

A continuación aplicamos los Pasos 1 y 2 del Teorema 20 y obtenemos la Figura 15. Luego aplicamos los Pasos 3 y 4 y encontramos la triangulación 4-coloreada de la frontera de la mariposa asociada al nudo 6_1 , la cual es compatible con la 3-coloración del nudo (véase Figura 16). La triangulación en el interior de la bola se obtiene usando el Teorema 10 de Goodman y Onishi.

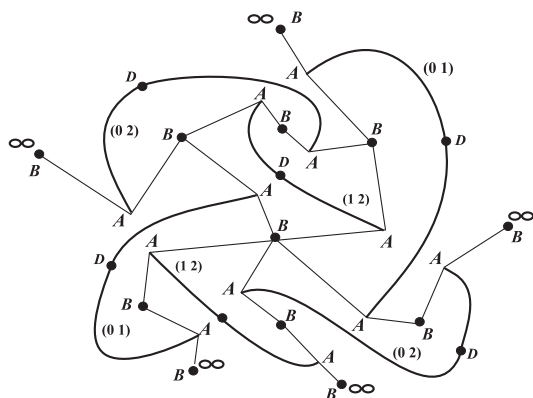


Figura 14.

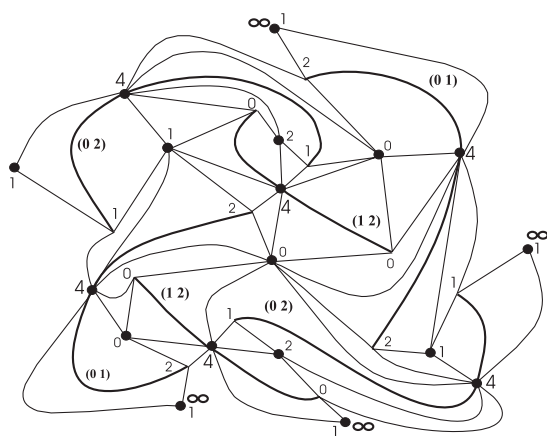


Figura 15.

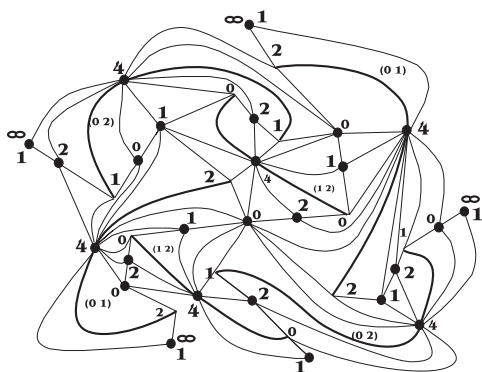


Figura 16.

Finalmente, podemos decir que el estudio de las mariposas abre nuevas perspectivas de trabajo en el estudio de 3-variedades y de nudos. Por ejemplo, se pueden plantear diversas preguntas que relacionen el número de alas de una mariposa asociada a un nudo con, por ejemplo, el número de puentes del nudo, respuestas a este estilo de preguntas permiten definir un invariante

nuevo para nudos (véase [HMTT2]). Por otro lado, las triangulaciones 4-coloreadas están relacionadas con los recientes trabajos de Izmetiev y Joswig ([IzJo]) y permiten probar al menos uno de sus teoremas en forma constructiva y mas simple (véase [HMTT1] y [Te]).

Agradecimientos. Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, y ha sido financiado parcialmente por COLCIENCIAS, proyecto 1118-05-13631 y por la DIME, Medellín.

Referencias

- [BuZi] **G. Burde and H. Zieschang**, *Knots*, Walter de Gruyter, New York, NY (1985).
- [CrFo] **R. Crowell and R. Fox**, *Introduction to knot theory*, Springer Verlag, New York, NY (1963).
- [FaSt] **D. Farmer and Th. Stanford**, *Knots and Surfaces*, Mathematical World, **6**, American Mathematical Society (1995).
- [Fo] **R. Fox**, *A quick trip through knot theory, Topology of 3-Manifolds and related topics*, Prentice-Hall, p.p.120-167 (1962).
- [GoOn] **J. Goodman and H. Onishi**, *Even Triangulations of S^3 and the coloring of graphs*. Trans. Amer. Mat. Soc. **246** (1978), 501–510 .
- [Hi] **M. H. Hilden**, *3-fold branched coverings of S^3* , Amer. J. of Math. **98** (1974), 989–997.
- [HMTT1] **M. H. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada and M. M. Toro**, *Knots, Butterflies and 3-manifolds*, preimpreso (2003).
- [HMTT2] **M. H. Hilden, J. M. Montesinos, D. M. Tejada and M. M. Toro**, *Butterflies*, preimpreso (2003).
- [IzJo] **I. Izmetiev and M. Joswig**, *Branched Coverings defined by Triangulations*, por aparecer en Adv. Geometry, arXiv:math.GT/0108202v2 (2001).
- [Ka] **L. Kauffman**, *On Knots*, University Press, Princeton (1987).
- [Kaw] **A. Kawachi**, *A survey of Knot Theory*, Birkhauser, Basel, Switzerland (1996).
- [Mo1] **J. M. Montesinos**, *3-manifolds as 3-fold branched covers of S^3* , Quart. J. Math. **27** (1976), 85–94.
- [Mo2] **J. M. Montesinos**, *Sobre la conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo*, Tesis Doctoral. Univ. Complutense de Madrid (1972).
- [Mu] **J. R. Munkres**, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York, N.Y. (1984).
- [Ro] **D. Rolfsen**, *Knots and links*, Publish or Perish, Princeton (1985).
- [SeTh1] **H. Seifert and W. Threlfall**, *Old and new results on Knots*, Canad. J. Math., **2** (1950), 1–15 .
- [SeTh2] **H. Seifert and W. Threlfall**, *A textbook of Topology*, Academic Press., New York-London (1980).
- [Te] **D. M. Tejada**, *Variedades, triangulaciones y representaciones*, preimpreso (2003).
- [Thu] **W. Thurston**, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Preprint (1990).