APLICACIÓN DE UN PRINCIPIO DE MINIMIZACIÓN*

por

Jorge Cossio† **& Germán Jiménez**‡

Dedicado a la memoria del profesor Jairo Charris C.

Resumen

Cossio, Jorge & Germán Jiménez: Aplicación de un principio de minimización. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 21–25, 2004. ISSN 0370-3908.

En este artículo se demuestra la existencia de una solución para un problema de Dirichlet no lineal cuando la derivada en el infinito de la no linealidad es menor que el primer valor propio. En la demostración se utiliza, de manera esencial, un teorema de minimización obtenido a partir del principio variacional de Ekeland.

Palabras clave: Principio variacional de Ekeland, soluciones débiles, problema no lineal de Dirichlet.

Abstract

In this paper we prove that a nonlinear Dirichlet problem has a solution when the derivative at infinity of the nonlinearity is less than the first eigenvalue. The proof uses a basic minimization theorem of functionals obtained from the Ekeland variational principle.

Key words: Ekeland variational principle, weak solution, nonlinear Dirichlet problem.

---

*2000 Mathematics Subject Classification: 35J65, 35J60, 35J20. Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por Colciencias contrato 063-2002 y por la DIME proyecto No. 030802593.

†Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Apartado Aéreo 3840, Medellín, Colombia. email: jcossio@unalmed.edu.co

‡Germán Jiménez, Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia, email: gjimenez@uninorte.edu.co

1. Introducción

Sea $f : R \to R$ una función continua tal que

$$\begin{aligned} f'(-\infty) &:= \lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s} \in R\ , \\ f'(+\infty) &:= \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \in R. \end{aligned} \tag{1}$$

Sean $\Omega \subset R^N$ $(N \geq 3)$ un dominio acotado con frontera suave y Δ el operador de Laplace. Sea $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ la sucesión de valores propios de $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera.

En este artículo se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Si $f'(-\infty) = a$ y $f'(+\infty) = b$ con a y $b \in (0, \lambda_1)$, entonces el problema*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) &= 0 \quad en \ \ \Omega \\ \qquad\quad u &= 0 \quad en \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

tiene una solución.

La solubilidad del problema (2) ha demostrado estar estrechamente relacionada con la posición de la derivada de la no linealidad con respecto al espectro de $-\Delta$. En efecto, A. Castro y J. Cossio en [C-C2], utilizando métodos variacionales y teoría de grado, demostraron que si el intervalo $(f'(0), f'(\infty))$ contiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ y $f'(t) < \lambda_{k+1}$ para todo $t \in R$, entonces (2) tiene por lo menos cuatro soluciones no triviales. Los mismos autores en [C-C1] estudiaron la existencia de soluciones en el caso radialmente simétrico cuando el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los primeros j valores propios y Ω es la bola unitaria en R^N; allí se emplean técnicas de teoría de bifurcación y se utiliza el hecho de que la ecuación (2) en el caso radialmente simétrico se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. K.C. Chang (véase [Ch]) se ha aproximado al problema (2) usando Teoría de Morse. La existencia de soluciones al problema (2) ha sido ampliamente estudiada por muchos autores (véase [Ad-C], [Am-Ra], [C-C-N1], [C-C-N2], [C-C-N3], [C-L1], [C-L2], [C], [E], [H], [Wa]).

El Teorema 1.1 se demuestra usando un teorema de minimización de funcionales obtenido a partir del Principio Variacional de Ekeland (véase [Ek]). En la Sección 2 se presenta la demostración de dicho teorema de minimización. En la Sección 3 se demuestra el Teorema 1.1.

Como un corolario del Teorema 1.1 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Sea $f : R \to R$ una función continua tal que $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} = a$ con $a \in (0, \lambda_1)$. Entonces el problema*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) &= 0 \quad en \quad \Omega \\ \qquad\quad u &= 0 \quad en \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

tiene una solución.

2. Un teorema de minimización obtenido a partir del principio variacional de Ekeland

En [Ek], I. Ekeland demostró el siguiente principio variacional que ha demostrado ser una herramienta muy útil en el estudio de problemas de optimización, teoría de control, geometría diferencial y ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.1. [Principio variacional de Ekeland] *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\phi : X \to R \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$, y acotada inferiormente. Sean $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que*

$$\phi\left(\overline{u}\right) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Entonces existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(\overline{u}) \tag{5}$$

$$d\left(u_\varepsilon, \overline{u}\right) \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{6}$$

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \sqrt{\varepsilon} d\left(u_\varepsilon, u\right) \quad \forall u \neq u_\varepsilon \tag{7}$$

El siguiente teorema es una consecuencia del principio variacional de Ekeland y es útil en la prueba del teorema principal de esta sección.

Teorema 2.2. *Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y Gateaux-diferenciable $\forall x \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

$$\phi\left(u_\varepsilon\right) \leq \phi(\overline{u}), \tag{9}$$

$$\left\|\overline{u} - u_\varepsilon\right\| \leq \sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\left\|\phi'\left(u_\varepsilon\right)\right\|_{X^*} \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{11}$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tales que satisfacen (8). Por el Teorema 2.1 existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen (9), (10) y

$$\phi(u_\varepsilon) < \phi(u) + \sqrt{\varepsilon}\,\|u - u_\varepsilon\| \quad \forall u \in X \quad u \neq u_\varepsilon. \quad (12)$$

Sean $v \in X - \{0\}$ y $t > 0$. Tomando $u = u_\varepsilon + tv$ se tiene

$$\frac{\phi(u_\varepsilon) - \phi(u_\varepsilon + tv)}{t} \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|v\|. \quad (13)$$

Pasando al límite cuando $t \to 0^+$ se obtiene

$$-\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|v\| \quad \forall v \in X. \quad (14)$$

Como $-v \in X$ y $\phi'(u_\varepsilon)$ es lineal se sigue que

$$|\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\,\|v\| \quad \forall v \in X. \quad (15)$$

Por lo tanto

$$\|\phi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} = \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{|\langle \phi'(u_\varepsilon), v\rangle|}{\|v\|} \leq \sqrt{\varepsilon},$$

lo cual concluye la prueba del teorema. □

En la siguiente definición presentamos una condición de compacidad, conocida como la condición de Palais-Smale, la cual es una herramienta útil en la demostración de la existencia de puntos críticos de funcionales definidos en espacios de Banach.

Definición 2.3. Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ una función de clase C^1. Decimos que ϕ *satisface la condición de Palais-Smale* si toda sucesión $(u_n)_{n \in N}$ en X tal que $\phi(u_n)$ es una sucesión acotada y

$$\phi'(u_n) \to 0 \quad \text{en} \quad X^* \quad (16)$$

tiene una subsucesión convergente en X.

A continuación se demuestra el teorema principal de esta sección, el cual establece condiciones suficientes que permiten encontrar puntos de mínimo de funcionales definidos en espacios de Banach.

Teorema 2.4. *Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to R$ un funcional de clase C^1 que satisface la condición de Palais-Smale y tal que ϕ está acotado inferiormente. Entonces existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\inf_X \phi = \phi(u_0) \quad y \quad \phi'(u_0) = 0. \quad (17)$$

Demostración. Sea $n \in N$. Aplicando el Teorema 2.2 con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe $u_n \in X$ tal que

$$\phi(u_n) \leq \inf_X \phi + \frac{1}{n} \quad y \quad \left\|\phi'(u_n)\right\|_{X^*} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (18)$$

Por lo tanto, la sucesión $\phi(u_n)$ es acotada y $\phi'(u_n) \to 0$ en X^*. Como ϕ satisface la condición de Palais-Smale, existen una subsucesión $\left(u_{n_j}\right)_{j \in N}$ y un $u_0 \in X$ tales que $u_{n_j} \to u_0$. Como ϕ es continua se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \phi\left(u_{n_j}\right) &\leq \lim_{j\to\infty}\left(\inf_X \phi + \frac{1}{n_j}\right) && (19)\\ \phi(u_0) &\leq \inf_X \phi. && (20)\end{aligned}$$

Luego

$$\phi(u_0) = \inf_X \phi. \quad (21)$$

Además, como ϕ' es continua,

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty}\left\|\phi'\left(u_{n_j}\right)\right\| &\leq \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n_j}}\right) && (22)\\ \left\|\phi'(u_0)\right\| &\leq 0. && (23)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi'(u_0) = 0$. □

3. Demostración del teorema 1.1

Sea H el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (véase [Br]). Recordamos que una **solución débil** de (2) es una función $u \in H$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega f(u)\,v = 0 \quad \forall v \in H. \quad (24)$$

Sea $J : H \to R$ el funcional definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u), \quad (25)$$

donde $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$.

Como $f'(-\infty) = a$ y $f'(+\infty) = b$ con a y $b \in (0, \lambda_1)$, existen $c_1 \in R$ con $max\{a, b\} < c_1 < \lambda_1$ y $s_0 > 0$ tales que

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| < c_1 \quad \text{para} \quad |s| > s_0. \quad (26)$$

Por la continuidad de f en $[-s_0, s_0]$ existe c_2 tal que

$$|f(s)| \leq c_2 \quad \text{para} \quad |s| \leq s_0. \quad (27)$$

Luego

$$|f(s)| \leq c_1\,|s| + c_2 \qquad \forall s \in R. \quad (28)$$

Por lo tanto $J \in C^1(H, R)$ (véase [Ra]) y

$$J'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega f(u)v \quad \forall v \in H_0^1. \quad (29)$$

En particular $u \in H$ es solución débil de (2) si y sólo si u es un punto crítico de J.

Demostremos ahora que el funcional J satisface la condición de Palais-Smale. Para ello utilizaremos el siguiente lema y un resultado de D. G. De Figueiredo (véase [DF]).

Lema 3.1 *Si* $a, b \in (0, \lambda_1)$ *entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta w &= bw^+ - aw^- \quad en \quad \Omega \\ w &= 0 \qquad\qquad\quad en \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{30}$$

tiene como única solución $w \equiv 0$.

Demostración. Si w es una solución de (30) tal que $w > 0$ en Ω entonces $w^+ = w$ y $w^- = 0$. Luego

$$\begin{cases} -\Delta w &= bw \text{ en } \Omega \\ w &= 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$

por lo tanto b es un valor propio de $-\Delta$, esto es una contradicción ya que por hipótesis $b < \lambda_1$. Similarmente se prueba que si w es una solución de (30) tal que $w < 0$ en Ω entonces a es un valor propio de $-\Delta$, lo cual es una contradicción.
Si w es una solución de (30) que cambia de signo, sea $A = \{x \in \Omega \,/\, w(x) > 0\}$. Luego

$$\begin{cases} -\Delta w &= bw \text{ en } A \\ w &= 0 \text{ en } \partial A. \end{cases} \tag{32}$$

Como $b < \lambda_1$ y el autovalor principal de $-\Delta$ en cualquier subregión de Ω es mayor o igual a λ_1 (véase [C-H]), se sigue que $A = \emptyset$. Similarmente se demuestra que si $B = \{x \in \Omega \,/\, w(x) < 0\}$ entonces $B = \emptyset$.
Como $w \equiv 0$ es una solución de (30), entonces tiene lugar la afirmación del lema.

Por el Lema 6.3 de De Figueiredo (véase [DF]) se sigue que J satisface la condición de Palais-Smale.

De (28) se sigue que existen c_3 y c_4 en R con $c_1 < c_3 < \lambda_1$ tales que

$$F(s) \leq \frac{1}{2}c_3 s^2 + c_4 \quad \forall s \in R. \tag{33}$$

Demostremos que J está acotado inferiormente: en efecto, usando (33) se tiene que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}c_3\int_\Omega u^2 - \int_\Omega c_4. \end{aligned} \tag{34}$$

Por la desigualdad de Poincaré (véase [C1]) se sigue que

$$J(u) \geq \left(\frac{\lambda_1 - c_3}{2}\right)\int_\Omega u^2 - \int_\Omega c_4 \geq -c_4|\Omega|. \tag{35}$$

Luego J está acotado inferiormente.

Hemos demostrado que J satisface las hipótesis del Teorema 2.4, por lo tanto existe $u_0 \in H$ tal que

$$\inf_H J = J(u_0) \quad \text{ y } \quad J'(u_0) = 0 \tag{36}$$

Es decir u_0 es un punto crítico de J y por lo tanto una solución débil de (2). Como f es continua y sublineal, por la teoría de regularidad para operadores elípticos (véase [C-L2]) se sigue que las soluciones débiles del problema (2) son soluciones clásicas . Por lo tanto u_0 es una solución clásica de (2). □

Como una consecuencia inmediata del Teorema 1.1 se obtiene el Teorema 1.2.

Referencias

[Ad-C] **H. Aduén and A. Castro**, *Infinitely Many Nonradial Solutions to a Superlinear Dirichlet Problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 835–843.

[Am-Ra] **A. Ambrosetti and P. Rabinowitz**, *Dual variational methods in critical point theory*, J. Funct. Anal., **14** (1973), 349–381.

[Br] **H. Brezis**, *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, (1984).

[C1] **A. Castro**, *Métodos de Reducción via Minimax*, Primer Simposio Colombiano de Análisis Funcional, Medellín, Colombia, (1981).

[C-C1] **A. Castro and J. Cossio**, *Multiple Radial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem in a ball*, Rev. Colombiana Mat., **27** (1993), 15–24.

[C-C2] **A. Castro and J. Cossio**, *Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem*, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994), pp. 1554–1561.

[C-C-N1] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *A Sign-Changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem*, Rocky Mountain J.M., **27** (1997), 1041–1053.

[C-C-N2] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *On Multiple Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **30** (1997), 3657–3662.

[C-C-N3] **A. Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger**, *A Minmax Principle, Index of the Critical Point, and Existence of Sign-changing Solutions to Elliptic Boundary Value Problems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 1998 (1998), 1–18.

[C-L1] **A. Castro and A. C. Lazer**, *Applications of a Maxmin Principle*, Rev. Colombiana Mat., **10** (1976), 141–149.

[C-L2] **A. Castro and A. C. Lazer**, *Critical Point Theory and the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Ann. Mat. Pura Appl., **70** (1979), 113–137.

[Ch] **K. C. Chang**, *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse Theory*, Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981), 693–712.

[C] **J. Cossio**, *Múltiples soluciones para un problema elíptico semilineal*, en *Memorias de la III Escuela de* *verano en Geometría diferencial, ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Colección Memorias No. 7, 1995, 53–59.

[C-H] **R. Courant and D. Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*, New York, John Wiley (1989).

[DF] **D. G. De Figueiredo**, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detour*, Tata Institute of Fundamental Research / Springer-Verlag, (1989).

[Ek] **I. Ekeland**, *On the Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.

[E] **M. Esteban**, *Multiple Solutions of Semilinear Elliptic Problems in a Ball*, J. Differential Equations, **57** (1985), 112–137.

[H] **H. Hofer**, *Variational and Topological Methods in Partially Ordered Hilbert Spaces*, Math. Ann., **261** (1982), 493–514.

[Ra] **P. Rabinowitz**, *Minimax methods in critical point theory and applications to differential equations*, Conference Series in Mathematics, number 65, American Mathematical society, Providence (1986).

[Wa] **Z. Q. Wang**, *On a Superlinear Elliptic Equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **8** (1991), 43–57.