EL TEOREMA DE HAHN-BANACH COMO PRINCIPIO DE ELECCIÓN

por

Xavier Caicedo [1] **& Germán Enciso** [2]

A Jairo Charris, in memoriam

Resumen

Caicedo, X. & G. Enciso. El teorema de Hahn-Banch como principio de elección. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 11–20, 2004. ISSN 0370-3908.

El teorema de Hahn–Banch implica el axioma de elección para familias de conjuntos convexos cerrados en espacios reflexivos y para familias más generales de convexos en espacios localmente convexos. Es, en efecto, equivalente a varias formas de elección coherente en familias inversamente dirigidas de convexos y transformaciones continuas afines. Lo anterior es consecuencia de algunos resultados relacionados con baricentros de medidas finitamente aditivas y compacidad convexa. Dos caracterizaciones de la reflexividad de espacios normados en términos de estos últimos conceptos se siguen de Hahn–Banach.

Palabras clave: Teorema de Hahn–Banach, axioma de elección, medidas finitamente aditivas, baricentros, compacidad convexa.

Abstract

The Hahn–Banach theorem implies the axiom of choice for families of closed convex sets in normed reflexive spaces and for more general families of convex sets in locally convex spaces. It is, in fact, equivalent to several forms of coherent choice in inversely directed families of convex sets and affine continuous transformations. This is consequence of some results about convex compactness and baricenters of finitely aditive measures. Two characterizations of reflexive normed spaces in terms of these last concepts follow from Hahn–Banach.

Key words: Hahn–Banach theorem, axiom of choice, finitely aditive measures, baricenters, convex compactness.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, A.A. 4976, Bogotá, E-mail: xcaicedo@uniandes.edu.co
Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
[2]Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08854–9019, EE. UU., E-mail: enciso@eden.rutgers.edu
AMS 2000 Mathematics Subject Classification 46A03, 46A12, 03E25, 52A07, 46G12.

1. Introducción

El famoso teorema sobre de extensión de funcionales que hoy llamamos de Hahn–Banach, pieza fundamental de análisis funcional, se debe independientemente al matemático austríaco **Hans Hahn** (1927) y al polonés **Stefan Banach** (1929), quienes aparentemente generalizaron ideas del también austríaco **Edward Helly** (1912). El teorema se presenta en la literatura en formas diversas, tanto analíticas como geométricas. Tomaremos como básica para este trabajo la siguiente:

HB. *Todo funcional lineal f definido en un subespacio E de un espacio vectorial real V y tal que $f(x) \leq p(x)$, donde p es un funcional sublineal definido en V, puede extenderse a un funcional lineal $\widehat{f}$ de V que sigue siendo acotado por p.*

Recuérdese que $p : V \to \mathbb{R}$ es un *funcional sublineal* si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, para todo x, $y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Del caso real se obtiene fácilmente el teorema para espacios complejos con respecto a una seminorma p y con el acotamiento expresado en la forma $|f(x)| \leq p(x)$.

Por simplicidad consideraremos solamente espacios vectoriales reales.

Si $\dim(V/E)$ es finita, la extensión $\widehat{f}$ puede construirse explícitamente por inducción en la dimensión. En particular, la demostración del teorema para espacios finito-dimensionales no requiere el uso de principios no constructivos como el Axioma de Elección (AE). Sin embargo, en el caso de dimensión infinita la existencia de $\widehat{f}$ requiere alguna forma de elección.[3] Comunmente se utiliza toda la fuerza de este axioma, en la forma del Lema de Zorn, para demostrar el teorema.

Por otra parte, HB funciona en muchas circunstancias como un buen substituto de AE. El mismo **Banach** (1932) lo utilizó para demostrar la existencia de extensiones totales finitamente aditivas e invariantes bajo isometrías de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$.

Posteriormente **Luxemburg** (1969) demostró que HB es equivalente a la existencia de medidas finitamente aditivas en cualquier álgebra booleana. Además de sus consabidas aplicaciones al análisis funcional, HB permite demostrar algunas famosas consecuencias de AE que han sido utilizadas para cuestionar la validez de este último axioma, como son la existencia de conjuntos no Lebesgue-medibles en la recta (**Foreman** y **Wehrung**, 1991) o la paradoja de Banach-Tarski en la esfera (**Pawiikowski**, 1991). Como es bien sabido, de ésta última se desprende la imposibilidad de extender la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, a una medida total finitamente aditiva e invariante bajo isometrías (cf. **Wagon**, 1994).

Se sabe, sin embargo, que HB es estrictamente más débil que AE, pues se sigue del principio de existencia de ultrafiltros (**Łoś** y **Ryll-Nardzewski,** 1954):

UF. *Todo filtro propio sobre un conjunto puede extenderse a un ultrafiltro,*

principio que no implica AE, como fuera demostrado por **Halpern** y **Levy** (1971). Se sabe incluso que HB es estrictamente más débil que UF (**Pincus**, 1974). Tenemos pues, en la teoría axiomática de conjuntos sin el axioma de elección las implicaciones no reversibles:

$$\text{AE} \Rightarrow \text{UF} \Rightarrow \text{HB}$$

Cabe preguntar entonces cuál es el alcance de HB como un principio de elección, pregunta que intentaremos responder en esta nota.

Mostraremos que HB implica el axioma de elección para familias de convexos cerrados en espacios de Banach reflexivos y para familias más generales de convexos en espacios localmente convexos, y que es en efecto equivalente a ciertas formas de elección coherente en familias inversamente dirigidas de convexos. En particular, HB resulta equivalente a la afirmación de que el límite proyectivo de una familia inversamente dirigida de simplejos finito-dimensionales y funciones simpliciales es siempre no vacío. En el curso del trabajo presentamos algunos resultados relacionados con baricentros de medidas finitamente aditivas y compacidad convexa, incluyendo dos caracterizaciones de la reflexividad de espacios normados en términos de estos conceptos.

Presuponemos familiaridad con las bases del análisis funcional (véase, por ejemplo, **Berberian** 1974, **Horváth** 1966 o **Rudin** 1973). Entre las diversas consecuencias del teorema de Hahn–Banach, utilizaremos más adelante las dos siguientes. La primera se obtiene directamente de HB tomando como funcional sublineal la función $p(x) = ||f||\,||x||$ y es, como veremos, equivalente a HB.

HBN (Hahn–Banach para espacios normados). *Cualquier funcional lineal continuo f definido en un subespacio de un espacio normado tiene una extensión continua $\hat{f}$ a todo el espacio tal que $||\hat{f}|| = ||f||$.*

[3] Aunque para algunas familias especiales, por ejemplo espacios de Hilbert, la prueba puede hacerse constructivamente.

Para la segunda, recuérdese que un espacio vectorial topológico es *localmente convexo* si tiene una base de vecindades convexas, como es el caso de los espacios normados.

HBG (Hahn–Banach geométrico). *Sea $v \notin C$, donde C es un subconjunto cerrado convexo de un espacio localmente convexo V. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y un funcional continuo f de V tal que $f(v) < \alpha < f(x)$ para toda $x \in C$.*

El anterior resultado se sigue de HB sin ninguna intervención auxiliar de AE, pues depende de la regularidad de los espacios vectoriales topológicos y de las propiedades del funcional de Minkowski en espacios localmente convexos, las cuales pueden demostrarse constructivamente. Examínese, por ejemplo, la demostración del Th. 3.4(b) en **Rudin** (1973). HBG es una de los muchos teoremas de separación derivados de HB, y vale también si reemplazamos $\{v\}$ por un convexo compacto disyunto de C. Garantiza, entre otras cosas, que los funcionales lineales continuos de un espacio localmente convexo de Hausdorff separan puntos.

2. Medidas finitamente aditivas

Una *medida finitamente aditiva* en una álgebra booleana B no trivial (en adelante simplemente, una *medida*) será una función $m : B \to \mathbb{R}$ que cumple: $m(1_B) = 1$, $m(a) \geq 0$ y $m(a \vee b) = m(a) + m(b)$ si $a \wedge b = 0$. Esto implica $m(a) = 0$ y $m(a) \leq m(b)$ cuando $a \leq b$.

Luxemburg (1969) demostró la equivalencia entre HB y la existencia de medidas en cualquier álgebra booleana no trivial, utilizando productos reducidos e ideas del análisis no-estándar. Damos aquí una nueva demostración de este resultado. Comenzamos mostrando a partir de HBN un teorema más general sobre extensión de medidas, debido originalmente a **Horn** y **Tarski** (1948), del cual se sigue el de existencia. La otra dirección de la equivalencia se obtendrá más adelante. A lo largo del trabajo, indicaremos entre paréntesis las hipótesis de las que cada proposición depende. ZF denotará la teoría de conjuntos sin el axioma de elección.

Teorema 1 (ZF + HBN). *Cualquier medida definida en una subálgebra de una álgebra booleana puede extenderse a toda el álgebra.*

Demostración. Dada una álgebra booleana $B \neq \{0_B\}$, una *partición* de B es un subconjunto finito $P \subseteq B - \{0\}$ tal que $\bigvee P = 1_B$ y $p \wedge p' = 0$ para todo $p, p' \in P$, $p \neq p'$. Las particiones están parcialmente ordenadas por la siguiente relación (Q *es más fina que* P):

$$Q \leq P \text{ si y solamente si } \forall q \in Q\ \exists p \in P$$
$$\text{(necesariamente único) tal que } q \leq p,$$

equivalentemente, todo elemento de P es un supremo de elementos de Q. Con este orden las particiones forman un semiretículo inferior con

$$P \wedge Q = \{p \wedge q : p \in P, q \in Q\} - \{0\}.$$

Toda función $f : P \to \mathbb{R}$ puede "extenderse" a $Q \leq P$, definiendo $f_Q(q) = f(p)$ para el único $p \in P$ tal que $q \leq p$. El conjunto $S(B) = \{f : P \to \mathbb{R} : P$ partición de $B\}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia:

$$f \sim g \text{ si y solamente si } f_{P\wedge Q} = g_{P\wedge Q},$$

forma un espacio vectorial normado con producto por escalar $\alpha f_\sim = (\alpha f)_\sim$, suma $f_\sim + g_\sim = (f_{P\wedge Q} + g_{P\wedge Q})_\sim$, y norma $||f_\sim|| = \max\{|f(p)| : p \in P\}$. Cada $a \in B$ tiene una *función característica* $\chi_a \in S(B)$:

$\chi_a = f_\sim$, donde $f : \{a, a^c\} \to \mathbb{R}$, $f(a) = 1$, $f(a^c) = 0$, si $a, a^c \neq 0_B$,

$\chi_{1_B} = f_\sim$, donde $f : \{1_B\} \to \mathbb{R}$, $f(1_B) = 1$,

$\chi_{0_B} = f_\sim$, donde $f : \{1_B\} \to \mathbb{R}$, $f(1_B) = 0$.

Se verifica fácilmente que χ_{0_B} es el cero del espacio vectorial y que si $a \wedge b = 0$ entonces $\chi_{a\vee b} = \chi_a + \chi_b$. Ahora, si A es una subálgebra de B en la cual está definida una medida m, considere el siguiente subespacio de $S(B)$: $E = \{f_\sim : dom\ f \subseteq A\}$. Entonces la función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(f_\sim) = \sum_{p \in dom(f)} f(p)m(p)$$

es un funcional lineal bien definido. Claramente $||\varphi|| = 1$, y por HBN podemos extender φ a todo $S(B)$ manteniendo la misma norma. Entonces $m(a) = \varphi(\chi_a)$ es la medida buscada pues $\varphi(\chi_{1_B}) = 1$, $\varphi(\chi_a) = 1 \cdot m(a) + 0 \cdot m(a^c) = m(a)$ para todo $a \in A$, $\varphi(\chi_{a\vee b}) = \varphi(\chi_a + \chi_b) = \varphi(\chi_a) + \varphi(\chi_b)$ si $a \wedge b = 0$, y además $\varphi(\chi_a) \geq 0$, pues de lo contrario se tendría $1 = \varphi(\chi_a) + \varphi(\chi_{a^c}) < \varphi(\chi_{a^c}) \leq ||\varphi||\,||\chi_{a^c}|| = ||\chi_{a^c}|| \leq 1$. $\square$

Recuérdese que un subconjunto S de una álgebra booleana tiene la propiedad de intersecciones finitas (p.i.f.) si para todo $x_1, ..., x_n \in S$ se tiene $x_1 \wedge ... \wedge x_n \neq 0$.

Corolario 1 (ZF + HBN). *En toda álgebra booleana no trivial B existe una medida m. Además, si $S \subseteq B$ tiene* *la p.i.f., ésta puede escogerse de manera que $m(b) = 1$ para todo $b \in S$.*

Demostración. Para obtener la existencia de una medida en B, extienda la medida obvia en la subálgebra $\{0_B, 1_B\}$. Ahora, si el subconjunto S tiene la p.i.f. considere el homomorfismo natural $\eta : B \to B/F$, donde F es el filtro generado por S en B. Como F es propio, B/F es no trivial y tiene una medida μ; luego $m = \mu \circ \eta$ es la medida deseada. $\square$

Una primera ilustración del poder de elección de HB es que permite escoger una medida para cada álgebra de una familia dada de álgebras booleanas, sin tener que apelar al axioma de elección, observación debida a **Pawiikowski** (1991).

Corolario 2 (ZF + HB). *Para toda familia $\{B_i\}_{i \in I}$ de álgebras booleanas no triviales existe una familia $\{m_i\}_{i \in I}$ tal que m_i es una medida en B_i.*

Demostración. Sea B el coproducto de las B_i y sean $h_i : B_i \to B$, $i \in I$, los homomorfismos canónicos. Como éstos son siempre inyectivos, B es no trivial y por tanto soporta una medida m. Defina $m_i = m \circ h_i$. $\square$

Una medida en el álgebra de partes $\mathcal{P}(X)$ de un conjunto X se llamará una medida *sobre* X. Las siguientes afirmaciones y construcciones, que generalizan hechos bien conocidos acerca de medidas σ-aditivas definidas en σ-álgebras de conjuntos, pueden obtenerse sin utilizar HB ni forma alguna de AE, como puede verificarlo el lector.

Dado un conjunto X sea $A(X)$ el espacio vectorial de las funciones reales acotadas en X con la norma del supremo, y sea $S(X)$ el subespacio de las funciones en X de rango finito (*funciones simples*). $S(X)$ es efectivamente denso en $A(X)$, es decir, para cada $f \in A(X)$ puede construirse explícitamente una sucesión de Cauchy s_n en $S(X)$ tal que $s_n \to f$. Tómese, por ejemplo, $r_n = (-1 + \frac{k}{n})||f||$, $k = 0, 1, ..., 2n$, y defínase:

$$s_n(x) = r_k \text{ si } x \in f^{-1}([r_k, r_{k+1})),\ k = 0, 1, ..., 2n-1.$$
$$s_n(x) = r_{2n} \text{ si } x \in f^{-1}(\{r_{2n}\}).$$

(en general, la densidad de un espacio métrico en otro no implica la existencia de tales sucesiones, a no ser que se utilize el axioma de elección enumerable.)

Dada una medida m sobre X puede definirse una integral en las funciones simples de la manera obvia:

$$\int_X s\, dm = \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(s^{-1}(a_i))$$

donde $\{a_1, .., a_n\}$ es el rango de s, y se verifica fácilmente que $\int_X (rs + t)dm = r \int_X s\, dm + \int_X t\, dm$, y $|\int_X s\ dm| \leq ||s||$. Esto significa que $\int_X (\ )dm$ es un funcional lineal continuo en $S(X)$. Como la continuidad es necesariamente uniforme, este funcional puede extenderse unívocamente a todo $A(X)$, definiendo

$$\textstyle\int_X f\ dm = \lim_n \int_X s_n\ dm.$$

La linealidad y el acotamiento se heredan automáticamente. Otras propiedades que se verifican fácilmente, primero en funciones simples y luego en funciones acotadas, son las siguientes:

I-1. *Si $f \leq g$ en X, se tiene $\int_X f\ dm \leq \int_X g\ dm$.*

I-2. *$\int_X c\ dm = c$, para c constante.*

I-3. *$|\int_X f\ dm| \leq ||f||_{A(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|$.*

Si $C \subseteq X$ es tal que $m(C) = 1$, entonces m puede considerarse como una medida sobre C y se tiene, escribiendo $\int_C f dm$ por $\int_C f{\restriction}C\, dm$:

I-4. *$\int_C f\, dm = \int_X f dm$.*

Una función cualquiera $h : X \to Y$ induce una medida $\mu(S) = m(h^{-1}(S))$ sobre Y, y se tiene para toda $f \in A(Y)$:

I-5. *$\int_Y f\, d\mu = \int_X f \circ h\, dm$.*

Verificamos esta última propiedad: vale claramente para funciones simples pues $\int_Y s\ d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(s^{-1}(a_i))$ $= \sum_{i=1}^n a_i m((s \circ h)^{-1}(a_i)) = \int_A s \circ h\ dm$. Ahora, si $s_n \in S(X)$ converge a $f \in A(X)$, entonces $s_n \circ h$ converge a $f \circ h$ y por lo tanto, $\int_Y f\ d\mu = \lim_n \int_Y s_n d\mu =$ $\lim_n \int_A s_n \circ h\ dm = \int_B f \circ h\ dm$.

3. Baricentros

En adelante, V denotará un espacio vectorial topológico (e.v.t.) y V' denotará el espacio de funcionales lineales continuos de V, es decir su *espacio dual*.

Recuérdese que si V es normado entonces también lo es V' en forma natural, con la norma $||f|| = \sup\{\,|f(x)| : ||x|| \leq 1\}$. Para cada $x \in V$ la *evaluación* $\mathcal{E}_x : V' \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_x(f) = f(x)$ es un funcional lineal continuo, es decir, $\mathcal{E}_x \in V''$. La transformación lineal $J : V \to V''$ dada por

$J(x) = \mathcal{E}_x$ es continua, y es una inyección isométrica si V' separa puntos de V. Este será siempre el caso si suponemos HB. El espacio V se dice *reflexivo* si $J : V \to V''$ es una biyección, es decir todo funcional $\varphi \in V''$ tiene la forma $\varphi(f) = f(x)$ para algún $x \in V$.

Consideraremos también en V' la topología *débil estrella*, es decir, la topología inicial inducida por las evaluaciones $\mathcal{E}_x$. Esta topología es de Hausdorff, localmente convexa, y en general más débil que la de la norma.

Definición. Sea $X \neq \emptyset$ un subconjunto de un e.v.t. V tal que todo $f \in V'$ es acotado en X y sea m una medida sobre X. Entonces para todo $f \in V'$ existe la integral $\varphi_m(f) = \int_X f\, dm = \int_X f \restriction X\, dm$, así que φ_m constituye un funcional lineal de V'. Diremos que $b \in V$ es un *baricentro* de m si $\int_X f\ dm = f(b)$ para toda $f \in V'$. [4]

Si X es acotado en un espacio normado, se tiene $|\varphi_m(f)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \leq ||f||(\sup_{x\in X} ||x||)$, y por tanto la integral φ_m es continua para la topología de la norma en V', es decir $\varphi_m \in V''$. Luego, por definición de reflexividad tenemos:

Lema 1 (ZF). *Toda medida sobre un subconjunto acotado de un espacio normado reflexivo tiene baricentro.*

En particular, en espacios de Hilbert y en espacios finito-dimensionales el baricentro existe y coincide con el familiar *centro de masa* (ver **Enciso**, 2000).

Para acotados de espacios normados no reflexivos no necesariamente existe el baricentro (véase el Teorema 2 en esta sección). Sin embargo, una medida en un subconjunto acotado del dual V' de un espacio normado V siempre tiene baricentro si se considera la topología débil estrella en lugar de la topología de la norma, independientemente de que V' sea reflexivo o no.

Lema 2 (ZF). *Sean V normado y $F \subseteq V'$ acotado para la norma inducida en V'. Entonces toda medida m sobre F tiene baricentro con respecto a la topología débil estrella de V'.*

Demostración. Se verifica fácilmente que $b_m(x) = \int_F \mathcal{E}_x\ dm$ es lineal en $x \in V$, y además $|b_m(x)| \leq \sup_{f\in F} |f(x)| \leq (\sup_{f\in F} ||f||)||x||$, es decir, $b_m \in V'$. Como $\int_F \mathcal{E}_x dm = \mathcal{E}_x(b_m)$ para cada x por definición, y los funcionales continuos de V' para la topología débil estrella son precisamente las evaluaciones $\mathcal{E}_x$ (**Rudin**, Th. 3.10), se tiene que b_m es el baricentro de m con respecto a esta topología. □

HB garantiza que el baricentro de una medida sobre X en un espacio de Hausdorff localmente convexo es único y pertenece a la clausura de la envolvente convexa de X ($convX$), además de que es preservado por transformaciones lineales continuas. Más precisamente,

Lema 3 (ZF + HB). *Sea V un espacio localmente convexo de Hausdorff y suponga que m es una medida en $X \subseteq V$ con baricentro b. Entonces:*

i. *b es único.*

ii. *$b \in \overline{convC}$, para todo $C \subseteq X$ tal que $m(C) = 1$.*

iii. *Si $t : X \to Y$ es la restricción de un transformación lineal continua de V a un espacio localmente convexo W y μ es la medida inducida por m en Y entonces $t(b)$ es baricentro de μ en W.*

Demostración. (i) Si $x \neq b$ por HBG existe $f \in V'$ tal que $f(x) \neq f(b)$, luego $\int_X f\ dm = f(b) \neq f(x)$.

(ii) Consideremos a m como una medida en C. Si $b \notin \overline{convC}$ entonces por HBG existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in V'$ tales que $f(b) < \alpha \leq f(x)$ para toda $x \in \overline{convC}$. Luego $f(b) < \alpha = \int_C \alpha dm \leq \int_C f\ dm = \int_X f\ dm$, por las propiedades I-1,2,4 en la sección anterior, una contradicción.

(iii) Para cualquier $g \in W'$ se tiene $\int_Y g\ d\mu = \int_X g \circ t\ dm = g(t(b))$ por la propiedad I-5 de la sección anterior. *square*

Observación. En el caso de espacios de Hilbert o espacios finito-dimensionales, el lema anterior depende solamente de ZF, pues los usos de HBG en la prueba pueden obtenerse constructivamente sin invocar HB.

Como hemos dicho, el baricentro no siempre existe en espacios normados no reflexivos. En efecto, suponiendo HB, la existencia de baricentros caracteriza los espacios normados reflexivos.

Teorema 2 (ZF + HB). *Un espacio normado es reflexivo si y solamente si toda medida sobre un subconjunto acotado (o simplemente sobre la bola unitaria cerrada) tiene baricentro para la topología de la norma.*

Demostración. Suponga que V es normado no reflexivo, y sean B y B'' las bolas unitarias cerradas de V y V'', respectivamente. Entonces existe $d \in B'' \setminus J(B)$, de lo contrario V sería reflexivo. Sea $\mathcal{F}$ el filtro de vecindades

[4] La terminología utilizada en la literatura no es homogénea, **Bourbaki** llama baricentro al funcional φ_m mismo.

cerradas convexas de d para la topología débil estrella de V''. Como $J(B)$ es densa en B'' para esta topología (la prueba de esta afirmación puede hacerse constructivamente, véase Th. 45.3 en **Berberian**, 1974), el filtro $\mathcal{G} = \{J^{-1}(N) \cap B : N \in \mathcal{F}\}$ tiene la p.i.f. Tome una medida m en B que dé valor 1 a los elementos de $\mathcal{G}$ (Corolario 1) y suponga que tiene baricentro $b \in V$ con respecto la topología de la norma, entonces $b \in B$ por el Lema 1-ii. Como $J : V \to V''$ es continua para la topología débil estrella en V'' entonces $J(b)$ debe ser el baricentro de la medida inducida en B'' con respecto a esta topología por el Lema 3-iii. Como las vecindades cerradas convexas de d en B'' para esta topología tienen medida 1, $J(b)$ pertenece a su intersección (Lema 1-ii). Pero por convexidad local y la propiedad de Hausdorff de la topología débil estrella en V'', la intersección de estas vecindades deber ser $d \notin J(B)$, lo que da una contradicción. $\square$

4. Compacidad convexa

Diremos que un subconjunto convexo C de un espacio vectorial topológico V es *convexamente compacto* ($c-$*compacto*) si toda colección de conjuntos convexos cerrados en C con la propiedad de intersecciones finitas (p.i.f.) tiene intersección no vacía. **Kothe** (1969) considera una versión débil de esta propiedad.

Por supuesto, todo convexo compacto es $c-$compacto, pero no vale el recíproco. Por ejemplo, la bola unitaria cerrada de un espacio de Hilbert de dimensión infinita es $c-$compacta (ver Corolario 3), pero es bien sabido que no puede ser compacta. En espacios finito-dimensionales $c-$compacto y compacto coinciden. Los $c-$compactos comparten muchas de las agradables propiedades de los compactos si nos restringimos a funciones lineales, o más generalmente a funciones afines. Una función $f : X \to Y$ entre convexos se dice *afín* si $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, para todo $x,\ y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Claramente, la imagen directa o inversa de una función afín preserva convexidad.

Lema 4 (ZF). *Sea C un conjunto convexo $c-$compacto en un e.v.t. V. Entonces:*

i. *Toda función real afín continua definida en C es acotada.*

ii. *La imagen de C bajo cualquier transformación afín continua es $c-$compacta.*

iii. *Si V es de Haudorff, C es cerrado.*

Demostración. (i) Si $f \in V'$ no fuera acotado en C entonces los convexos cerrados de $C : C_n = C \cap f^{-1}([n, \infty))$ tendrían la p.i.f. y por $c-$compacidad existiría $x \in C$ con $f(x) \geq n$ para toda n. (ii) La prueba es la misma que para compacidad ordinaria, pues los conjuntos convexos son preservados por imágenes inversas de funciones afines. (iii) Si $x \in \overline{C}$, entonces $C \cap N \neq \emptyset$ para toda vecindad convexa N de x. Por $c-$compacidad, $C \cap \bigcap_{x \in N} \overline{N} \neq \emptyset$, y por convexidad local, regularidad y la propiedad de Hausdorff: $\bigcap_{x\in N} \overline{N} = \{x\}$, luego $x \in C$. $\square$

Se desprende del lema anterior que si m es una medida en un convexo $c-$compacto C entonces $\int_C f\ dm$ está definida para toda función real afín continua f.

El siguiente teorema generaliza un resultado clásico sobre existencia de baricentros para medidas σ-aditivas en convexos compactos de espacios localmente convexos (cf. **Bourbaki**, 1955, o **Fonf-Lindenstrauss-Phelps**, 2001), y generaliza el hecho de que en este caso el baricentro representa también la integral de las funciones reales afines continuas.

Teorema 3 (ZF). *Toda medida finitamente aditiva sobre un conjunto convexo $c-$compacto C de un espacio vectorial topológico tiene un baricentro b en C. Además se tiene $\varphi(f) = \int_C f\ dm = f(b)$ para toda función real afín continua definida en C.*

Demostración. Por $c-$compacidad, es suficiente demostrar que la familia de conjuntos convexos cerrados $H_f = C \cap f^{-1}(\varphi(f))$ con f real afín continua en C tiene la p.i.f., pues un elemento $b \in \bigcap_{f \in V'} H_f$ será necesariamente un baricentro de m en C con la propiedad adicional requerida. Dadas funciones reales afines continuas $f_1, ..., f_n$ en C, sea $T : V \to \mathbb{R}^n$ el operador afín continuo $T(v) = (f_1(v), ..., f_n(v))$. Entonces $T(C)$ es convexo, $c-$compacto por el Lema 4-ii, y cerrado por el Lema 4-iii. Suponga $t = (\varphi(f_1), ..., \varphi(f_n)) \notin T(C)$, entonces por HBG en $\mathbb{R}^n$ (que no requiere invocar HB, por ser $\mathbb{R}^n$ finito-dimensional), existen un funcional $h(y_1, ..., y_n) = \sum_i a_i y_i$ en $\mathbb{R}^n$ y un real α tales que $h(t) > \alpha \geq h(x)$, para todo $x \in T(C)$. Es decir, $\sum_i a_i \varphi(f_i) > \alpha \geq \sum_i a_i f_i(v)$ para toda $v \in C$. Tomando la función afín $g = \sum_i a_i f_i$, y usando la linealidad de la integral, esto significa $\varphi(g) > \alpha \geq g(v)$ para todo $v \in C$; lo cual es imposible pues la segunda desigualdad implica $\varphi(g) = \int_C g dm \leq \int_C \alpha dm = \alpha$. Concluimos que $(\varphi(f_1), ..., \varphi(f_n)) \in T(C)$ y por tanto $(\varphi(f_1), ..., \varphi(f_n)) = (f_1(b), ..., f_n(b))$ para algún $b \in C$, es decir, $b \in H_{f_1} \cap ... \cap H_{f_n}$. $\square$

Si suponemos HB, la existencia de baricentros caracteriza los $c-$compactos convexos en espacios localmente convexos de Hausdorff.

Lema 5 (ZF + HB). *Un convexo X en un espacio localmente convexo de Hausdorff es $c-$compacto si y solamente si es cerrado y toda medida en X tiene baricentro en X.*

Demostración. Una dirección la dan el Lema 4-iii y el teorema anterior. Para la otra suponga que X es cerrado y toda medida tiene baricentro en X, y sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos convexos cerrados de X con la p.i.f. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la familia es cerrada bajo intersecciones finitas. Por HB existe una medida m sobre X tal que $m(C_i) = 1$ para toda $i \in I$. Si b es el baricentro de m, entonces $b \in C_i$ para todo i por el Lema 3-ii. □

De los Lemas 1, 2 y 5 obtenemos:

Corolario 3 (ZF + HB). *Todo convexo cerrado y acotado de un espacio normado reflexivo, o del dual de un espacio normado con la topología débil estrella, es $c-$compacto.*

Finalmente, del Teorema 2 y el Corolario 3 obtenemos otra caracterización de los espacios normados reflexivos.

Corolario 4 (ZF + HB). *Un espacio normado es reflexivo si y solamente si su bola unitaria es $c-$compacta para la topología de la norma.*

5. Elección en convexos

Tenemos ya los elementos para obtener las formas de elección explícita que HB provee. Una *elección* para una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos será una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $x_i \in C_i$ para todo $i \in I$. El axioma de elección afirma, por supuesto, que una tal elección siempre existe.

Teorema 4 (ZF). HB *implica el axioma de elección para familias $\{C_i\}_{i\in I}$ de conjuntos $c-$compactos en espacios localmente convexos de Hausdorff. Igualmente, para familias de convexos cerrados en espacios normados reflexivos, o en duales de normados con la topología débil estrella.*

Demostración. Por el Corolario 2, existe una familia de medidas m_i sobre C_i, que por el Teorema 3 y el Lemas 3-ii y tienen baricentro único $b_i \in C_i$. La familia $\{b_i\}_{i\in I}$ es la elección requerida. Para la segunda afirmación, si los C_i son convexos cerrados pero no acotados, sea $\delta_i = \inf\{||x||_{V_i} : x \in C_i\}$ y aplique lo anterior a los conjuntos $C_i^* = \overline{N_{\delta_i+1}(0)} \cap C_i$, que son convexos cerrados y acotados por construcción, y por lo tanto $c-$compactos por el Corolario 3. □

Debemos observar que en el caso de espacios de Hilbert la elección en una familia de convexos cerrados no vacíos $\{C_i\}_{i\in I}$ puede obtenerse explícitamente sin apelar al teorema de Hahn–Banach, pues en este caso existe un único $x_i \in C_i$ tal que $||x_i|| = \inf\{||x|| : x \in C\}$. Sin embargo, esta última afirmación no es válida para espacios de Banach reflexivos que no sean de Hilbert, ni siquiera en el caso finito-dimensional.

Sea $\{C_i,\, f_{ij}\}_{i\le j\in I}$ una familia inversamente dirigida de conjuntos y funciones, donde $(I, \le)$ es un conjunto parcialmente ordenado e inversamente dirigido (es decir, para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $k \le i, j$). Una elección $\{x_i\}_{i\in I}$ de $\{C_i\}_{i\in I}$ se dice *coherente* si

$$f_{ij}(x_i) = x_j \text{ para todo } i \le j.$$

En otras palabras, $\{x_i\}_{i\in I}$ pertenece al límite inverso o proyectivo de la familia $\{C_i,\, f_{ij}\}_{i\le j\in I}$.

Una elección coherente no siempre existe, ni siquiera suponiendo el axioma de elección. Considere, por ejemplo, la cadena de inclusiones $\cdots \to (0, \frac{1}{3}) \to (0, \frac{1}{2}) \to (0, 1)$ en $\mathbb{R}$. Sin embargo, como consecuencia del Teorema de Tichonoff, si los C_i son compactos de Hausdorff no vacíos y cada f_{ij} es continua entonces el límite proyectivo es no vacío y por lo tanto existe una eleccion coherente. Ésta es realmente una consecuencia de UF, pues requiere solamente el Teorema de Tichonoff para espacios compactos de Hausdorff, principio equivalente a UF (cf. **Levy**, 1979). El teorema de Hanh-Banach nos proporciona una versión lineal de este resultado.

Teorema 5 (ZF). HB *implica elección coherente para familias inversamente dirigidas de convexos $c-$compactos no vacíos en espacios localmente convexos de Hausdorff y transformaciones afines continuas.*

Demostración. Una familia inversamente dirigida

$$\{C_i \stackrel{t_{ij}}{\to} C_j : i, j \in I,\ i \le j\},$$

donde cada C_i yace en un espacio localmente convexo de Hausdorff y t_{ij} es una transformación afín, induce una familia directamente dirigida de álgebras booleanas y homomorfismos booleanos con respecto al orden opuesto de $(I, \le)$:

$$\cdots P(C_i) \stackrel{t_{ij}^{-1}}{\leftarrow} P(C_j) \cdots$$

Sea $B = \varinjlim P(C_i)$ el límite directo (o inductivo) de esta familia, y sean $P(C_i) \xrightarrow{\rho_i} B$ los homomorfismos canónicos. Como $C_i \neq \emptyset$, entonces cada $P(C_i)$ es una álgebra booleana no trivial y por tanto B es no trivial (el 0 y el 1 de las álgebras no son identificados en ningún $P(C_i)$, luego no son identificados en el límite). Por HB (Corolario 1-i), existe una medida m en B, que induce a su vez una medida $m_i = m \circ \rho_i : P(C_i) \to \mathbb{R}$, para cada i. Entonces se tiene para toda $j \geq i$

$$m_j = \mu \circ \rho_j = \mu \circ \rho_i \circ t_{ij}^{-1} = m_i \circ t_{ij}^{-1}.$$

Es decir, m_j es la medida inducida por m_i y t_{ij} sobre C_j. Por el Teorema 3 y el Lema 3-i, m_i tiene un único baricentro $b_i \in C_i$. Por la afinidad y continuidad de t_{ij} y el Lema 3-iii, que vale para t afín por el mismo Teorema 3, tenemos para toda $j \geq i$ que $t_{ij}(b_i)$ es baricentro de m_j, y por unicidad de b_j concluimos que $t_{ij}(b_i) = b_j$. Es decir, $\{b_i\}_{i \in I}$ es una elección coherente. $\square$

Por el Corolario 3, tenemos entonces elección coherente para familias inversamente dirigidas de convexos cerrados acotados no vacíos en espacios reflexivos o duales de normados con la topología débil estrella, y funciones lineales o afines continuas. En particular, para convexos cerrados y acotados en espacios finito-dimensionales.

Un espacio finito-dimensional V posee una única topología que lo hace espacio vectorial topológico de Hausdorff, pues dadas dos tales topologías, la escogencia de una base produce un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$ que es un homeomorfismo para cada una de ellas. Fijando una base se ve fácilmente que toda transformación lineal es continua para esta topología. Además cualquier norma en el espacio la induce, y un subconjunto es compacto para esta única topología si y solamente es cerrado y acotado bajo dicha norma (la prueba de estos hechos no require forma alguna de AE). La noción de compacto es entonces intrínseca a la estructura lineal de los espacios finito-dimensionales. Por otra parte, los usos de HB en la demostración del teorema anterior (Lema 3-i, iii), aparte de la existencia de medidas, son eliminables en el caso finito-dimensional por la observación que sigue al Lema 3. Si llamamos EM a la existencia de medidas en álgebras booleanas, tenemos entonces:

Corolario 5 (ZF). EM *implica elección coherente para familias inversamente dirigidas de convexos compactos finito-dimensionales y restricciones de funciones lineales.*

Elección coherente en convexos compactos finito-dimensionales permite demostrar a su vez el Teorema de Hahn–Banach, en forma bastante natural.

Teorema 6. (ZF) *Elección coherente para convexos compactos finito-dimensionales y restricciones de funciones lineales implica* HB.

Demostración. Sea p un funcional sublineal en V, E un subespacio de V, y $f : E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f \leq p$ en E. Para cada subespacio finito-dimensional W de V, defina

$$C_W = \{g : g \in W', g \supseteq f \restriction W \cap E,\, g(x) \leq p(x) \text{ para toda } x \in W\},$$

y para $W \supseteq Z$ sea $t_{WZ} : W' \to Z'$ el operador lineal de restricción. Obviamente C_W es convexo, y es no vacío ya que HB vale en dimensión finita. Si fijamos una base en W y tomamos por norma $|| \; ||$ la suma del valor absoluto de las coordenadas, se verifica fácilmente por la sublinealidad y homogeneidad de p que $\sup_{||x|| \leq 1} p(x) = M < \infty$. Además, $|| \; ||$ induce una norma $||g|| = \sup_{||x|| \leq 1} |g(x)|$ en W' para la cual C_W es obviamente acotado por M, y con la cual es fácil probar que C_W es cerrado. Esto significa que C_W es compacto para la única topología de Hausdorff de W' (también finito-dimensional). Finalmente, por ser lineal, cada t_{WZ} es continua. Entonces $\{C_W, t_{WZ} \restriction C_W\}_{W \supseteq Z}$ forma un sistema inversamente dirigido de convexos compactos en espacios finito-dimensionales y por hipótesis existe una elección coherente $g_W \in C_W$. Así, $g = \bigcup g_W$ es un funcional que cumple los requisitos de HB. $\square$

De los corolarios 1, 5 y el Teorema 6 obtenemos la dirección que nos faltaba del teorema de Luxemburg, y también la equivalencia entre HB y HBN.

Corolario 6 (ZF). HB, HBN *y* EM *son equivalentes.*

Formas aparentemente más débiles de elección coherente ya implican HB. Recordemos que un *simplejo geométrico* es la envolvente convexa de un conjunto finito de vectores (en posición general) en algún espacio vectorial. Una *función simplicial* entre simplejos geométricos, que pueden yacer en distintos espacios, es la extension convexa de una función entre vértices de los simplejos.

Claramente, todo simplejo es compacto en el espacio finito-dimensional que genera y toda función simplicial es afín y continua.

Teorema 7 (ZF). *Elección coherente para simplejos geométricos y funciones simpliciales implica* HB.

Demostración. Por el corolario anterior, es suficiente mostrar EM. Dada una álgebras booleana B y una subálgebra finita no trivial D, el conjunto de sus átomos, A_D, es necesariamente no vacío. Es fácil ver que si $D' \leq D \leq B$ son subálgebra finitas no triviales de B entonces A_D y $A_{D'}$ son particiones de B (en el sentido de la sección 2) con A_D más fina que $A_{D'}$, luego la función $f_{DD'} : A_D \to A_{D'}$ dada por

$$f_{DD'}(a) = \text{único } a' \in A_{D'} \text{ tal que } a \leq a'$$

esta bien definida. Sea $\Delta(A_D)$ el simplejo geométrico generado por A_D en $\mathbb{R}^{A_D}$, y $\bar{f}_{DD'}$ la extensión convexa de $f_{DD'}$ a $\Delta(A_D)$. Entonces la familia

$$\bar{f}_{DD'} : \Delta(A_D) \to \Delta(A_{D'}),\ D \geq D'$$

subindicada por las subálgebras finitas de B forma un sistema inversamente dirigido de simplejos y funciones simpliciales. Sea $v_D = \sum_{a \in A_D} v_D(a)a \in \Delta(A_D)$ una elección coherente en este sistema, entonces

$$\bar{f}_{DD'}(v_D) = \sum_{a \in A_D} v_D(a) f_{DD'}(a) = \sum_{a' \in A_{D'}} v_{D'}(a)a',$$

lo que implica, por definición de $f_{DD'}$ que $v_{D'}(a) = \sum\{v_D(a) : f_{DD'}(a) = a'\} = \sum\{v_D(a) : a \leq a', a \in A_D\}$. Defina en D la medida:

$$\mu_D(b) = \sum_{a \in A_D,\ a \leq b} v_D(a)\,.$$

Entonces $\mu_{D'} = \mu_D \restriction D'$ para $D' \leq D$, pues si $b \in D'$ se tiene $\mu_{D'}(b) = \sum_{a' \in A_{D'},\ a' \leq b} \sum\{v_D(a) : a \leq a', a \in A_D\} = \sum_{a \leq b,\ a \in A_D} v_D(a) = \mu_D(b)$. Así que la medida deseada es $\mu_B = \bigcup\{\mu_D : D$ subálgebra finita de $B\}$. $\square$

Resumiendo los resultados relacionados con elección coherente, tenemos:

Teorema 8 (ZF). HB *es equivalente a cualquiera de los siguientes casos de elección coherente en familias inversamente dirigidas:*

1. *Convexos $c-$compactos en espacios localmente convexos de Hausdorff y funciones afines continuas.*

2. *Convexos cerrados acotados en espacios normados reflexivos o en duales de normados con la topología débil estrella, y funciones afines continuas.*

3. *Convexos compactos en espacios finito-dimensionales y funciones lineales.*

4. *Simplejos geométricos y funciones simpliciales.*

Demostración. HB $\Rightarrow$ 1 (Teorema 5), HB $\Rightarrow$ 2 (1 y el Corolario 3), 1 o 2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 4 (trivialmente), 4 $\Rightarrow$ HB (Teorema 7). $\square$

6. Limitaciones de HB

Algunos importantes resultados de análisis funcional requieren mucho más que HB para su demostración. Por ejemplo el teorema de Alaoglu (**AL**) que afirma**:** *La bola unitaria cerrada del dual de un espacio normado es compacta para la topología débil estrella,* no es deducible de HB pues es equivalente a UF. Sin embargo, por el Corolario 3, HB implica una versión débil de AL: *La bola unitaria cerrada del dual de un espacio normado es $c-$compacta para la topología débil estrella.* Esta forma de AL es equivalente a HB (**Luxemburg**, 1969).

Tampoco implica HB el teorema de Kreĭn-Mil'man (**KM**): *Todo compacto convexo no vacío en un espacio localmente convexo de Hausdorff tiene un punto extremo,* pues se sabe que

$$\text{AL} + \text{KM} \Leftrightarrow \text{AE}$$

(**Bell** y **Fremlin**, 1972), por lo que ni siquiera UF implica KM, de lo contrario implicaría AE.

Finalmente observamos que, aunque la existencia de puntos extremos en simplejos finito-dimensionales es trivialmente demostrable en ZF, el teorema de Hahn-Banch no garantiza la elección coherente de puntos extremos en familias inversamente dirigidas de simplejos y funciones simpliciales, pues ello implicaría elección coherente en conjuntos finitos, la cual es equivalente a UF.

Bibliografía

[1] **S. Banach** (1929), *Sur les funtionelles lineaires, I, II.* Studia Math. **1**, 211–216, 223–239.

[2] **S. Banach** (1932), *Théorie des opérations linéaires.* Monografje Matematyczne, Vol. 1, Warsawa.

[3] **J.L. Bell** & **D.H. Fremlin** (1972), *A geometric form of the axiom of choice.* Fundamenta Mathematicae **LXXVII**, 167–170.

[4] **S. K. Berberian** (1974), *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Springer Verlag, Berlin.

[5] **N. Bourbaki** (1955), *Élements de Mathématique, Libre VI, Intégration.* Hermann, Paris.

[6] **G. Enciso** (2000), *La fuerza de elección del Teorema de Hahn–Banach.* Tesis de pregrado, Universidad de los Andes, Bogotá.

[7] **V. P. Fonf, J. Lindenstrauss,** & **R.R. Phelps** (2001), *Infinite dimensional convexity.* In *Handbook of the Geometry of Banach Spaces.* Norht Holland-Elsevier, pp. 599-670.

[8] **M. Foreman** & **F. Wehrung** (1991), *The Hahn–Banach theorem implies the existence of a non Lebesgue measurable set.* Fundamenta Mathematica **138**, 13–19.

[9] **H. Hahn** (1926), *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **157**, 214–229.

[10] **J.D. Halpern** & **A. Lévy** (1971), *The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice.* AMS Proceedings in Axiomatic Set Theory, 83–134.

[11] **E. Helly** (1912), *Über lineare Funktionaloperationen.* Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien Math.-Kl. **121**, 265–297.

[12] **A. Horn** & **A. Tarski** (1948), *Measures in boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 467–497

[13] **J. Horváth** (1966), *Topological vector spaces and distributions*, Vol. I. Addison-Wesley.

[14] **G. Köthe** (1969), *Topological vector spaces, I.* Springer Verlag, Berlin.

[15] **A. Levy** (1979), *Basic Set Theory.* Springer Verlag, Berlin.

[16] **J. Łoś** & **C. Ryll-Nardzewski** (1954), *On the applications of Tychonoff's theorem in mathematical proofs.* Fundamenta Mathematicae **41**, 49–65.

[17] **W. A. J. Luxemburg** (1969), *Reduced powers of the real number system.* In: *Applications of model theory to algebra, analysis and probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[18] **J. Pawiikowski** (1991), *The Hahn–Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox.* Fundamenta Mathematicæ**138**, 21–22.

[19] **D. Pincus** (1974), *The strength of the Hahn–Banach theorem.* Victoria Symposium on Non-Standard Analysis. Lect. Notes in Math. 369. Springer Verlag, Berlin, 203–248.

[20] **W. Rudin** (1973), *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York.

[21] **S. Wagon (**1994), *The Banach-Tarski Paradox.* Cambridge University Press, Cambridge.